E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI — ianuarie 1965

1

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI, nr. 1 — Ianuarie 1965

SUMARUL

	pag.
1. Despre şirurile recurente de I. I. Cristea . . .	1
2. Note matematice de C. Herling şi L. Pîrşan . . .	10
3. Cu privire la metoda inducţiei complete de O. Sacter	15
4. Probleme rezolvate: (6128, 6129, 6135, 6143, 6149, 6150, 6151, 6152, 6154, 6156, 6179, 6180, 6186, E: 2082, 2089, 2091)	17
5. Chestiuni de examen (6666—6678)	31
6. Probleme propuse (6679—6709)	34
7. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2248—2264)	39
8. Rubrica rezolvitorilor de probleme	42

ANUL XVI, 1 IANUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent; *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.* prof.; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.* profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

(SERIA B)

Anul XVI, nr. 1 — ianuarie 1965

DESPRE ȘIRURILE RECURENTE

de *ION I. CRISTEA*

1. Să considerăm un șir simplu

$$\{U_n\}_{n\in N} = \{U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots\}^{*)} \tag{1}$$

ai cărui termeni sînt numere reale sau complexe.

Să presupunem că între termenii acestui șir există o relație de dependență de forma

$$F(U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots U_{n-k}, n, \alpha) = 0, (n > k) \tag{2}$$

unde funcția F și numărul $k+1$ al termenilor consecutivi U_n, U_{n-1}, $U_{n-2}, \ldots U_{n-k}$ este același indiferent de rangul n. Prin α s-a notat un parametru sau un grup de parametri de care ar depinde șirul (1).

Un șir $\{U_n\}_{n\in N}$ pentru care termenii săi satisfac o relație de tipul (2) se va numi *șir recurent*. Dacă relația (2) este unică, numărul k ce intervine în această relație se numește *ordinul șirului recurent*, iar relația (2) — *relație de recurență*.

Vizibil, dacă între $k+1$ termeni consecutivi oarecari ai șirului (1) există două relații de tipul (2) independente, atunci eliminînd între aceste relații pe U_{n-k} sau U_n, obținem o relație de forma (2) dar între k termeni consecutivi ai șirului, încît șirul respectiv va fi un șir recurent de ordinul $k-1$.

Rezolvată în raport cu U_n relația de recurență (2) se poate scrie sub forma mai uzuală

$$U_n = f(U_{n-1} U_{n-2}, \ldots U_{n-k}, n, \alpha), (n > k) \tag{2'}$$

unde U_n se poate obține cu ajutorul primilor k termeni consecutivi precedenți $U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots U_{n-k}$ ai șirului (1).

Dacă în particular, în (2') funcția f este o funcție liniară și omogenă de $U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots U_{n-k}$, adică

$$U_n = A_1(n,\alpha) U_{n-1} + A_2(n,\alpha) U_{n-2} + \ldots A_k(n,\alpha) U_{n-k}; (n > k \geqslant 1) \tag{3}$$

*) Notația $\{U_n\}_{n\in N}$ este o scriere prescurtată a șirului $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ Prin $n \in N$ se arată că n aparține mulțimii N a numerelor naturale.

șirul (1) se va numi *linear și omogen recurent*. În relația de recurență (3) coeficienții $A_i(n, \alpha)$, $(i = 1,2,\ldots k)$ sînt funcțiuni de n și α.

Un caz deosebit de interesant și în același timp cel mai simplu posibil, este cazul în care coeficienții A_i (n, α_i) în relația de recurență (2) sînt constanți, adică nu depind de n și α. În acest caz particular relația de recurență (3) va lua forma

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \ldots a_k U_{n-k}, \quad (n > k \geqslant 1) \tag{3'}$$

Obiectul acestei expuneri va fi studiul șirurilor (1) care satisfac la o relație de recurență de forma (3').

2. Fie numerele reale sau complexe $x_1, x_2, \ldots x_k$ și să considerăm ecuația

$$x^k - \sigma_k^1 x^{k-1} + \sigma_k^2 x^{k-2} - \ldots + (-1)^k \sigma_k^k = 0. \tag{4}$$

care admite ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots x_k$. Prin σ_k^p, $(1 \leqslant p \leqslant k)$ se înțelege suma produselor ce se obțin prin combinarea în toate modurile posibile a numerelor $x_1, x_2, \ldots x_k$ luate cîte p. Cum $x_1, x_2, \ldots x_k$ verifică ecuația (4) avem identitățile.

$$x_i^k - \sigma_k^1 x_i^{k-1} + \sigma_k^2 x_i^{k-2} - \ldots + (-1)^k \sigma_k^k = 0, \ (i = 1,2,\ldots k) \tag{4'}$$

Înmulțind aceste identități respectiv cu $\alpha_i x_i^{n-k}$, $(i = 1, 2, \ldots k, n > k \geqslant 1)$, unde α_i sînt niște constante, și adunînd identitățile obținute, sîntem conduși la

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^n\right) - \sigma_k^1 \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^{n-1}\right) + \sigma_k^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^{n-2}\right) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \sigma_k^k \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^{n-k}\right) = 0 \tag{5}$$

Să notăm

$$U_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots + \alpha_k x_k^n \tag{6}$$

Identitățile (5) se transcriu atunci

$$U_n - \sigma_k^1 U_{n-1} + \sigma_k^2 U_{n-2} - \ldots + (-1)^k \sigma_k^k U_{n-k} = 0 \tag{7}$$

sau ceea ce este același lucru

$$U_n = \sigma_k^1 U_{n-1} - \sigma_k^2 U_{n-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \sigma_k^k U_{n-k} \tag{7'}$$

Relațiile de recurență (7)—(7') sînt relații de recurență lineare, omogene și cu coeficienți constanți.

Dacă șirul $\{U_n\}_{n \in N}$ definit în (6) este dat, adică sînt date numerele distincte $x_1, x_2, \ldots x_k$ și coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ atunci relația de recurență (7) este unic determinată.

Se pune problema inversă, dacă termenii unui șir linear și omogen recurent $\{U_n\}_{n \in N}$ care satisface o relație de recurență cu coeficienți constanți de forma (7) este totdeauna de tipul (6)? Altfel spus, unei com-

binații lineare de forma (3') între termenii șirului (1) îi corespunde totdeauna un termen general dat de (6)?

Afirmăm că nu! În adevăr, să considerăm progresia aritmetică, care este un șir linear și omogen recurent de ordinul doi cu relația de recurență

$$U_n = 2U_{n-1} - U_{n-2}$$

Cum însă

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

unde r este rația progresiei (care se știe că este egală cu diferența a doi termeni consecutivi), înseamnă că în cazul progresiei aritmetice, U_n este un polinom linear de rangul său n și nicidecum o sumă de forma (6).

Așadar, unui șir linear și omogen recurent de ordinul $k \geqslant 1$ satisfăcînd o relație de recurență cu coeficienți constanți, nu-i corespunde întotdeauna un termen general de forma (6) ca o combinație liniară de exponențiale. Rămîne atunci de studiat cînd și în ce condiții o relație de recurență de forma (3') atrage un termen general al șirului (1) de forma (6) și ce se întîmplă în celelalte cazuri.

3. Să notăm cu $P_h(n)$ un polinom de gradul h în variabila n.

Să considerăm identitatea

$$P_h(n) - C_{h+1}^1 P_h(n-1) + C_{h+1}^2 P_h(n-2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{h+1} C_{h+1}^{h+1} P_h(n-h-1) = 0 \qquad (8)$$
$$(n > h \geqslant 0)$$

pe care o vom demonstra prin inducție în raport cu h.

In adevăr, pentru $h = 1$ avem polinomul

$$P_1(n) = a_0 n + a_1$$

care evident verifică identitatea (8):

$$P_1(n) - C_2^1 P_1(n-1) + C_2^2 P_1(n-2) = 0$$

Să presupunem identitatea (8) valabilă pentru orice polinom de gradul h și să arătăm că ea rămîne adevărată și pentru orice polinom de gradul $h+1$. Ori un polinom de gradul $h+1$ se poate scrie sub forma

$$P_{h+1}(n) = a_0 n^{h+1} + P_h(n), \text{ cu } a_0 \neq 0$$

Evident că polinomul

$$P_{h+1}(n) - P_{h+1}(n-1) = P_h^*(n)$$

este un polinom de gradul h. Deci, în virtutea identității (8) presupusă adevărată pentru h, avem

$$[P_{h+1}(n) - P_{h+1}(n-1)] - C_{h+1}^1 [P_{h+1}(n-1) - P_{h+1}(n-2)] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{h+1} C_{h+1}^{h+1} [P_{h+1}(n-h-1) - P_{h+1}(n-h-2)] = 0$$

unde $n > h + 1 > 0$. Ori această ultimă identitate este echivalentă cu

$$P_{h+1}(n) - C^1_{h+2} P_{h+1}(n-1) + C^2_{h+2} P_{h+1}(n-2) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h+2} C^{h+2}_{h+2} P_{h+1}(n-h-2) = 0, \; (n > h+1 > 0)$$

și deci identitatea (8) este adevărată și pentru $h + 1$. Așadar, identitatea (8) este adevărată pentru orice h.

Să considerăm atunci, un șir $\{U_n\}_{n \in N}$, al cărui termen general U_n se exprimă astfel

$$U_n = \sum_{i=1}^{k} P_{h_i}(n) \cdot x_i^n = P_{h_1}(n) \cdot x_1^n + P_{h_2}(n) \cdot x_2^n + \ldots + P_{h_k}(n) \cdot x_k^n \qquad (9)$$

Transcriind această relație (9) pentru $n, n-1, n-2, \ldots, n-h_1-1$ și înmulțind aceste relații respectiv cu $1, -C^1_{h_1+1} x_1, C^2_{h_1+1} x_1^2, \ldots, (-1)^{h_1+1} C^{h_1+1}_{h_1+1} x_1^{h_1+1}$ prin adunarea relațiilor obținute și în virtutea identității (8) se elimină $P_{h_1}(n) \cdot x_1^n$:

$$U_n - C^1_{h_1+1} x_1 U_{n-1} + C^2_{h_1+1} x_1^2 U_{n-2} - \ldots + (-1)^{h_1+1} C^{h_1+1}_{h_1+1} x_1^{h_1+1} U_{n-h_1-1} =$$

$$= P^1_{h_2}(n) \cdot x_2^n + P^1_{h_3}(n) \cdot x_3^n + \ldots + P^1_{h_k}(n) \cdot x_k^n, \; (k > 1), \qquad (10)$$

unde $P^1_{h_i}(n)$, $(i = 2,3,\ldots,k)$ sînt polinoame în n respectiv de gradul h_i, definite prin

$$P^1_{h_i}(n) = [P_{h_i}(n)]^1_{x_1} =$$

$$= P_{h_i}(n) - C^1_{h_1+1} x_1 P_{h_i}(n-1) + C^2_{h_1+1} x_1^2 P_{h_i}(n-2) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_1+1} C^{h_1+1}_{h_1+1} x_1^{h_1+1} P_{h_i}(n-h_1-1), \; (i = 2,3,\ldots,k)$$

Dacă notăm

$$V^1_n = U_n - C^1_{h_1+1} x_1 U_{n-1} + C^2_{h_1+1} x_1^2 U_{n-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_1+1} C^{h_1+1}_{h_1+1} x_1^{h_1+1} U_{n-h_1-1}, \; (n > h_1 + 1 > 1) \qquad (11)$$

evident șirul $\{V^1_n\}_{n \in N}$, conform cu (10), va fi definit și prin

$$V^1_n = P^1_{h_2}(n) \cdot x_2^n + P^1_{h_3}(n) \cdot x_3^n + \ldots + P^1_{h_k}(n) \cdot x_k^n \qquad (9^1)$$

Aplicînd atunci, șirului $\{V^1_n\}_{n \in N}$ o relație analoagă cu (10), obținem și eliminarea lui $P^1_{h_2}(n) \cdot x_2^n$. Notînd atunci

$$V^2_n = V^1_n - C^1_{h_2+1} x_2 V^1_{n-1} + C^2_{h_2+1} x_2^2 V^1_{n-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_2+1} C^{h_2+1}_{h_2+1} x_2^{h_2+1} V^1_{n-h_2-1}, \; (n > h_1 + h_2 + 2 \geqslant 2) \qquad (11^1)$$

și de asemenea

$$P^2_{h_i}(n) = [P_{h_i}(n)]^2_{x_1 x_2} = [P^1_{h_i}(n)]^1_{x_2} =$$

$$= P^1_{h_i}(n) - C^1_{h_2+1} x_2 P^1_{h_i}(n-1) + C^2_{h_2+1} x_2^2 P^1_{h_i}(n-2) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_2+1} C^{h_2+1}_{h_2+1} x_2^{h_2+1} P_{h_1}(n - h_2 - 1), \quad (i = 3, \ldots, k)$$

prin eliminarea lui $P^1_{h_1}(n) \cdot x_2^n$ se obține

$$V_n^2 = P^2_{h_2}(n) \cdot x_3^n + \ldots + P^2_{h_k}(n) \cdot x_k^n, \quad (k > 2) \tag{9^2}$$

ș. a. m. d.

Deci, introducînd în general

$$V_n^i = V_n^{i-1} - C^1_{h_i+1} x_i V^{i-1}_{n-1} + C^2_{h_i+1} x_i^2 V^{i-1}_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_i+1} C^{h_i+1}_{h_i+1} x_i^{h_i+1} V^{i-1}_{n-h_i-1}, \quad (n > h_1 + h_2 + \ldots + h_i + i \geqslant i) \tag{11^{i-1}}$$

obținem șirul $\{V_n^i\}_{n \in N}$ pentru care termenul general V_n^i se exprimă sub forma

$$V_n^i = P^i_{h_i+1}(n) \cdot x_{i+1}^n + \ldots + P^i_{h_k}(n) \cdot x_k^n, \quad (k > i) \tag{9^i}$$

unde

$$P^i_{h_j}(n) = [P_{h_j}(n)]^i_{x_1 x_2 \ldots x_i} = [P^{i-1}_{h_j}(n)]^1_{x_i} =$$

$$= P^{i-1}_{h_j}(n) - C^1_{h_i+1} x_i P^{i-1}_{h_j}(n-1) + C^2_{h_i+1} x_i^2 P^{i-1}_{h_j}(n-2) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_i+1} C^{h_i+1}_{h_i+1} x_i^{h_i+1} P^{i-1}_{h_j}(n - h_i - 1), \quad (j = i+1, \ldots, k)$$

Pentru $i = k - 1$, șirul $\{V_n^{k-1}\}_{n \in N}$ va fi definit prin

$$V_n^{k-1} = P^{k-1}_{h_k}(n) \cdot x_k^n \tag{9^{k-1}}$$

încît în cele din urmă făcînd și eliminarea lui $P^{k-1}_{h_k}(n) \cdot x_k$ se obține relația de recurență pe care o satisfac șirurile $\{V_n^i\}_{n \in N}$, unde $V_n^0 = U_n$, această relație de recurență fiind dată de

$$V_n^k = 0. \tag{9^k}$$

Pentru șirurile $\{V_n^i\}_{n \in N}$ această relație (9^k) este o relație de recurență de ordinul $h_{i+1} + h_{i+2} + \ldots + h_k + k - i$. Deci, pentru șirul $\{U_n\}_{n \in N}$ relația de recurență va fi de ordinul $\sum_{j=1}^{k} h_j + k$. Complet, relația de recurență pentru șirul $\{U_n\}_{n \in N}$ se va scrie atunci

$$V_n^k = 0, \quad \left(n > \sum_{i=1}^{k} h_j + k \geqslant 1\right) \tag{12}$$

4. Vom arăta că relația de recurență (12), scrisă pentru șirul $\{U_n\}_{n \in N}$, dezvoltat se va prezenta sub forma (3′) :

$$U_n + a_1^k U_{n-1} + a_2^k U_{n-2} + \ldots + a^k_{r_k} U_{n-r_k} = 0, \quad (n > r_k \geqslant 1) \tag{3″}$$

unde s-a notat

$$r_k = \sum_{j=1}^{k} h_j + k$$

iar coeficienții $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{r_k}^k$ sînt dați de expresiile

$$a_i^k = (-1)^i \sum_{\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = i} C_{h_1+1}^{\lambda_1} C_{h_2+1}^{\lambda_2} \ldots C_{h_k+1}^{\lambda_k} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_k^{\lambda_k}, \qquad (13)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r_k)$$

unde λ_j iau numai acele valori pentru care $C_{h_j+1}^{\lambda_j}$ au sens, adică $\lambda_j \leqslant h_j + 1$.

Să procedăm prin inducție. Pentru $k = 1$ relația (13) este adevărată, căci în acest caz relația de recurență ia forma particulară

$$U_n - C_{h_1+1}^1 x_1 U_{n-1} + C_{h_1+1}^2 x_1^2 U_{n-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{h_1+1} C_{h_1+1}^{h_1+1} x_1^{h_1+1} U_{n-h_1+1} = 0, \quad (n > h_1 + 1 \geqslant 1)$$

și deci

$$a_i^1 = (-1)^i C_{h_1+1}^i x_1^i, \quad (i = 1, 2, \ldots, h_1 + 1)$$

Să presupunem că relația (13) este adevărată pentru k și să arătăm că ea este adevărată și pentru $k + 1$ în loc de k. În adevăr, conform cu (12), relația de recurență în cazul cînd

$$U_n = P_{h_1}(n) \cdot x_1^n + P_{h_2}(n) \cdot x_2^n + \ldots + P_{h_k}(n) \cdot x_k^n + P_{h_{k+1}}(n) \cdot x_{k+1}^n$$

va fi

$$V_n^{k+1} = 0, \left(n > \sum_{j=1}^{k+1} h_j + k + 1 \geqslant 1\right) \qquad (12')$$

sau ținînd seamă de (11^{l-1}) pentru $i = k + 1$:

$$V_n^k - C_{h_{k+1}+1}^1 x_{k+1} V_{n-1}^k + C_{h_{k+1}+1}^2 x_{k+1}^2 V_{n-2}^k - \ldots$$

$$\ldots + (-1) h_{k+1} + 1 C_{h_{k+1}+1}^{h_{k+1}+1} x_{k+1}^{k_{k+1}+1} V_{n-h_{k+1}-1}^k = 0 \qquad (11^k)$$

$$\left(n > \sum_{j=1}^{k+1} h_j + k + 1 \geqslant k + 1\right)$$

Ori

$$V_n^k = U_n + a_1^k U_{n-1} + a_2^k U_{n-2} + \ldots a_{r_k}^k U_{n-r_k}, \quad (n > r_k \geqslant 1)$$

unde coeficienții a_i^k, $(i = 1, 2, \ldots, r_k)$ sînt dați de (13). Rezultă atunci, că în (11^k) coeficienții a_i^{k+1}, $(i = 1, 2, \ldots, r_{k+1})$ vor fi dați de relația

$$a_i^{k+1} = \sum_{\lambda_{k+1} + \lambda = i} (-1)^{\lambda_{k+1}} C_{h_{k+1}+1}^{\lambda_{k+1}} x_{k+1}^{\lambda_{k+1}} a_\lambda^k, \quad (i = 1, 2, \ldots r_k + h_{k+1} + 1)$$

unde $a_0^k = 1$. Deci și $a_0^{k+1} = 1$.

Înlocuind valoarea coeficienților a_λ^k, $(\lambda = 1, 2, \ldots, r_k)$ dați de (13) și $a_0^k = 1$ obținem pentru a_i^{k+1} expresia

$$a_i^{k+1} = \sum_{\lambda_{k+1}+\lambda=i} (-1)^{\lambda_{k+1}} C_{h_{k+1}+1}^{\lambda_{k+1}} x_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \left[(-1)^{\lambda} \sum_{\sum_{j=1}^{k} h_j = \lambda} C_{h_1+1}^{\lambda_1} C_{h_2+1}^{\lambda_2} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots C_{h_k+1}^{\lambda_k} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_k^{\lambda_k} \right]$$

încît

$$a_i^{k+1} = (-1)^i \sum_{\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = i} C_{h_1+1}^{\lambda_1} C_{h_2+1}^{\lambda_2} \cdots C_{h_{k+1}+1}^{\lambda_{k+1}} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{k+1}^{\lambda_{k+1}}$$

care demonstrează relația (13) și pentru $k + 1$ în loc de k. În concluzie relația (13) este adevărată oricare ar fi k natural.

5. Cum expresia (13) a lui a_i^k se mai scrie

$$a_i^k = \sum_{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = i} \left[C_{h_1+1}^{\lambda_1} (-x_1)^{\lambda_1} \right] \cdot \left[C_{h_2+1}^{\lambda_2} (-x_2)^{\lambda_2} \right] \ldots \left[C_{h_k+1}^{\lambda_k} (-x_k)^{\lambda_k} \right]$$

este vizibil că coeficienții a_i^k, $(i = 1, 2, \ldots, r_k)$ sînt egali cu coeficienții lui $x^{r_k - 1}$ în dezvoltarea expresiei

$$(x - x_1)^{h_1+1} (x - x_2)^{h_2+1} \ldots (x - x_k)^{h_k+1}$$

în care sînt puse în evidență bazele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ale puterilor ce intervin în expresia de definiție (9) a lui U_n, precum și gradele $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ale polinoamelor ce înmulțesc respectiv pe $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n$ în expresia (9) a lui U_n.

Calculele efectuate mai înainte au arătat că dată fiind expresia (9) a lui U_n, atunci are loc relația de recurență cu coeficienți constanți (3″) unde coeficienții a_i^k, $(i = 1, 2, \ldots, r_k)$ sînt determinați în mod unic conform cu (13).

Reciproc, în baza observației precedente să considerăm că este dată relația de recurență cu coeficienți constanți (3″) și ne propunem să determinăm aspectul general al lui U_n.

Să considerăm ecuația algebrică cu o singură necunoscută

$$x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_{r_k} = 0 \qquad (14)$$

obținută în mod formal din (3″) prin înlocuirea lui U_n prin x^k (sau prin αx^n, unde α este o constantă). Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile esențiale ale

ecuației (14), iar $h_1 + 1$, $h_2 + 1, \ldots, h_k + 1$ ordinul lor de multiplicitate. Ecuația (14) este deci echivalentă cu ecuația

$$(x - x_1)^{h_1+1}(x - x_2)^{h_2+1} \ldots (x - x_k)^{h_k+1} = 0$$

În baza celor arătate anterior, șirul $\{U'_n\}_{n\in N}$ definit de

$$U'_n = P_{h_1}(n) \cdot x_1^n + P_{h_2}(n) \cdot x_2^n + \ldots + P_{h_k}(n) \cdot x_k^n$$

va satisface identic relația de recurență (3″):

$$U'_n + a_1^k U'_{n-1} + a_2^k U'_{n-2} + \ldots + a_{r_k}^k U'_{n-r_k} = 0 \qquad (3''')$$

Să presupunem că sînt cunoscuți primii r_k termeni ai șirului $\{U_n\}_{n\in N}$. Să determinăm atunci, polinoamele $P_{h_1}(n), P_{h_2}(n), \ldots, P_{h_k}(n)$ în expresia lui U'_n așa fel ca

$$U'_n = U_n, (n = 1, 2, \ldots, r_k) \qquad (15)$$

Cum fiecare polinom $P_{h_i}(n)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ conține $h_i + 1$ coeficienți nedeterminați, în total în expresia lui U'_n sînt

$$\sum_{j=1}^{k} h_j + k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k + k = r_k$$

coeficienți nedeterminați. Apoi $x_1, x_2, \ldots x_k$ fiind distincți între ei, condițiile (15) sînt suficiente pentru determinarea unică a acestor coeficienți. Vizibil, condițiile (15) vor da un sistem algebric linear cu r_k ecuații pentru cei r_k coeficienți necunoscuți ce intervin în expresiile lui U'_n.

Să punem atunci

$$U''_n = U'_n - U_n \qquad (16)$$

Cum atît U_n cît și U'_n satisfac aceleiași relații de recurență, (3″) și (3‴), scăzînd aceste relații de recurență obținem evident

$$U''_n + a_1^k U''_{n-1} + a_2^k U''_{n-2} + \ldots + a_{r_k}^k U''_{n-r_k} = 0, (n > r_k \geqslant 1) \qquad (3^{IV})$$

Ori cum avem condițiile (15), pentru U''_n înseamnă că avem

$$U''_n = 0, (n = 1, 2, \ldots, r_k) \qquad (15')$$

Astfel, în virtutea relației de recurență (3^{IV}) și ținînd cont de condițiile (15′) urmează că

$$U''_n = 0 \text{ pentru orice } n \in N \qquad (17)$$

În adevăr, făcînd în (3^{IV}) $n = r_k + 1$ avem

$$U''_{r_k+1} + a_1^k U''_{r_k} + a_2^k U''_{r_k-1} + \ldots + a_{r_k}^k U_1 = 0$$

relația care conform cu condițiile (15′) se reduce la

$$U''_{r_k+1} = 0$$

Să presupunem acum că r_k termeni consecutivi ai șirului $\{U''_n\}_{n\in N}$ sînt nuli, anume

$$U''_{n-r_k} = U''_{n-r_k-1} = \ldots = U''_{n-2} = U''_{n-1} = 0$$

În baza relației de recurență (3^{IV}) urmează atunci că și termenul U''_n este nul :

$$U''_n = 0.$$

Așadar, afirmația (17) este justă.

Conform cu (16), din (17) rezultă că

$$U_n = U'_n$$

adică

$$U_n = P_{h_1}(n) \cdot x_1^n + P_{h_2}(n) \cdot x_2^n + \ldots + P_{h_k}(n) \cdot x_k^n \qquad (1\ 8$$

În concluzie, fiind dată relația de recurență (3″), termenul general al șirului $\{U_n\}_{n\in N}$ este dat de o expresie de forma (18), această expresie fiind unic determinată în cazul cînd se cunosc primii $r_k = \sum_{j=1}^{k} h_j + k$ termeni ai șirului.

6. Fie șirul $\{U_n\}_{n\in N}$ definit prin relația (9). Să presupunem că în (9) polinoamele $P_{h_i}(n)$ au expresiile

$$P_{h_i}(n) = a_0^{h_i} n^{h_i} + a_1^{h_i} n^{h_i-1} + a_2^{h_i} n^{h_i-2} + \ldots + a_{h_i}^{h_i}, \ (i = 1, 2 \ldots k)$$

În paragraful precedent am văzut că din ecuația (14) se pot determina bazele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ce intervin în expresia (9) a lui U_n precum și gradele $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ale polinoamelor $P_{h_1}(n)$, $P_{h_2}(n), \ldots, P_{h_k}(n)$. Deasemenea, coeficienții $a_j^{h_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 0, 1, 2, \ldots, h_l)$ se pot determina în mod unic dacă se cunosc r_k din termenii șirului $\{U_n\}_{n\in N}$, în particular primii r_k termeni.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt rădăcini simple pentru ecuația (14) atunci termenul general U_n va avea expresia (6) considerată la început.

Dacă presupunem că $x_1, x_2, \ldots x_k$ și $h_1, h_2, \ldots h_k$ sînt determinați, considerînd $r_k + 1$ termeni în loc de r_k, avem de-a face cu un sistem algebric linear de $r_k + 1$ ecuații și r_k necunoscute $a_j^{h_i}$ încît eliminînd aceste necunoscute găsim condiția analitică prin care $r_k + 1$ termeni ai unui șir linear și omogen recurent $\{U_n\}_{n\in N}$ de ordinul r_k aparțin șirului. În particular dacă cei $r_k + 1$ termeni sînt consecutivi, obținem relația de recurență (3′) pe care o satisfac termenii șirului $\{U_n\}_{n\in N}$.

7. Ca aplicație a celor expuse în această notă să deducem formula lui Binet pentru șirul lui Fibonacci.

Șirul lui Fibonacci este un șir linear și omogen recurent de ordinul doi a cărui relație de recurență este

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

Conform cu rezultatele de la paragraful 4, ecuația (14) atașată acestei relații de recurență va fi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ și } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Deci, U_n va fi de forma (6) particulară a lui (9) căci rădăcinile x_1 și x_2 fiind simple $h_1 = h_2 = 0$. Așadar,

$$U_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ori dacă se dau U_1 și U_2 coeficienții α_1 și α_2 se pot determina din sistemul

$$U_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$U_2 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Dacă în particular $U_1 = U_2 = 1$, găsim $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și atunci

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

obținînd astfel formula lui Binet de reprezentare a termenului general al șirului lui Fibonacci pentru $U_1 = U_2 = 1$.

NOTE MATEMATICE

O aplicație a calculului vectorial la un tetraedru

Se consideră tetraedrul $VMNP$ și notăm vectorii: $\overline{VM} = \bar{p}$, $\overline{VN} = \bar{q}$, $\overline{VP} = \bar{r}$.

Pe muchiile VM, VN, VP luăm respectiv punctele M', N', P' astfel că

$$\overline{VM'} = a\overline{M'M};\ \overline{VN'} = b\overline{N'M};\ \overline{VP'} = c\overline{P'P}.$$

Planele $MN'P'$, $NP'M'$, $PM'N'$ se intersectează în punctul A care este definit de vectorul de poziție $\overline{VA}$ a cărui expresie, o determinăm mai jos. Avem

$$\overline{VM} = \overline{VM'} + \overline{M'M} = \overline{VM'} + \frac{\overline{VM'}}{a} = \bar{p}.$$

Rezultă $\overline{VM'} = \frac{a}{a+1}\bar{p}$; analog $\overline{VN'} = \frac{b}{b+1}\bar{q}$ și $\overline{VP'} = \frac{c}{c+1}\bar{r}$

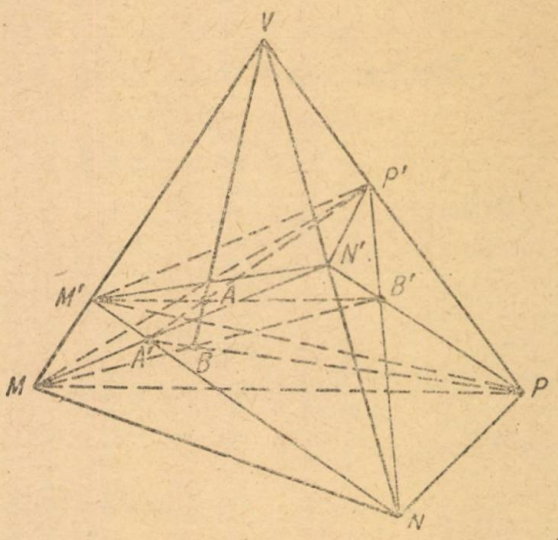
Un punct oarecare Q din planul $MN'P'$ este determinat de vectorul $\overline{VQ} = \overline{VM} + \alpha\overline{MN'} + \beta\overline{MP'}$, unde α, β sînt parametrii variabili.

Mai putem scrie

$$\overline{MN'} = \overline{VN'} - \overline{VM} = \frac{b}{b+1}\bar{q} - \bar{p}\ ;\ \overline{MP'} = \overline{VP'} - \overline{VM} = \frac{c}{c+1}\bar{r} - \bar{p}$$

Prin urmare:

$$\overline{VQ} = \bar{p} + \alpha\left(\frac{b}{b+1}\bar{q} - \bar{p}\right) + \beta\left(\frac{c}{c+1}\bar{r} - \bar{p}\right)$$



De asemenea, un punct oarecare R din planul $NP'M'$, este dat de relația vectorială

$$\overline{VR} = \overline{VN} + \alpha'\overline{NP'} + \beta'\overline{NM'}$$

sau

$$\overline{VR} = \bar{q} + \alpha'\left(\frac{c}{c+1}\bar{r} - \bar{q}\right) + \beta'\left(\frac{a}{a+1}\bar{p} - \bar{q}\right),$$

unde α', β' sînt parametrii variabili.

Se observă ușor că $\overline{VR}$ se deduce din $\overline{VQ}$ prin permutări circulare.

Un punct S din planul $PM'N'$ este dat de relația:

$\overline{VS} = \overline{VP} + \alpha''\overline{PM'} + \beta''\overline{PN'}$, unde α'', β'' sînt parametrii variabili.

Prin permutări circulare se deduce

$$\overline{VS} = r + \alpha''\left(\frac{a}{a+1}\bar{p} - \bar{r}\right) + \beta''\left(\frac{b}{b+1}\bar{q} - \bar{r}\right)$$

Vectorii $\overline{VQ}$, $\overline{VR}$, $\overline{VS}$ se mai pot scrie și astfel:

$$\overline{VQ} = \bar{p}(1 - \alpha - \beta) + \frac{\alpha b}{b+1}\bar{q} + \frac{\beta c}{c+1}\bar{r} \qquad (1)$$

$$\overline{VR} = \bar{p}\,\frac{\beta' a}{a+1} + \bar{p}(1 - \alpha' - \beta') + \frac{\alpha' c}{c+1}\bar{r} \qquad (2)$$

$$\overline{VS} = \bar{p}\,\frac{\alpha'' a}{a+1} + \frac{\beta'' b}{b+1}\bar{q} + \bar{r}(1 - \alpha''' - \beta''). \qquad (3)$$

Deoarece punctul de intersecție al planelor $MN'P'$, $NP'M'$, $PM'N'$ este A trebuie ca $\overline{VQ} = \overline{VR} = \overline{VS} = \overline{VA}$ și în formulele (1), (2), (3) trebuie să avem același vector, de unde condițiile:

$$\left.\begin{aligned} 1-\alpha-\beta &= \frac{\beta' a}{a+1} = \frac{\alpha'' a}{a+1}; \\ 1-\alpha'-\beta' &= \frac{\alpha b}{b+1} = \frac{\beta'' b}{b+1}; \\ 1-\alpha''-\beta'' &= \frac{\beta c}{c+1} = \frac{\alpha' c}{c+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ se găsește

$$\alpha = \frac{b+1}{a+nb+c+2}, \quad \beta = \frac{c+1}{a+b+c+2}.$$

Deci

$$\overline{VA} = \bar{p}\left(1 - \frac{b+1}{a+b+c+2} - \frac{c+1}{a+b+c+2}\right) + \frac{(b+1)b\bar{q}}{(b+1)(a+b+c+2)} + \frac{c(c+1)}{(c+1)(a+b+c+2)}\bar{r}.$$

sau

$$\overline{VA} = \frac{a\bar{p} + b\bar{q} + c\bar{r}}{a+b+c+2} \qquad (4)$$

Notăm cu B intersecția planelor $M'NP$, $N'MP$ și $P'MN$. Să arătăm că punctele V, A, B sînt coliniare.

Avem:

$$\overline{VM} = a\,\overline{M'M} = \overline{VM'} + \overline{M'M} = a\,\overline{M'M} + \overline{M'M} = (a+1)\,\overline{M'M}.$$

Analog

$$\overline{VN} = (b+1)\,\overline{N'N} \quad \text{și} \quad \overline{VP} = (c+1)\,\overline{P'P}.$$

Expresia vectorială pentru $\overline{VB}$ se calculează la fel ca și pentru vectorul $\overline{VA}$, considerînd puncte oarecare în planele $M'NP$, $N'MP$ și $P'MN$ precum și vectorii de poziții ai acestor puncte (față de V) și punînd la fel condiția ca vectorii să fie identici rezultă

$$\overline{VB} = \frac{(a+1)\,\overline{VM'} + (b+1)\,\overline{VN'} + (c+1)\,\overline{VP'}}{(a+1)+(b+1)+(c+1)+2}$$

deci:

$$\overline{VB} = \frac{(a+1)\frac{a}{a+1}\bar{p} + (b+1)\frac{b}{b+1}\bar{q} + (c+1)\frac{c}{c+1}\bar{r}}{a+1+b+1+c+1+2} =$$

$$= \frac{a\bar{p} + b\bar{q} + c\bar{r}}{a+b+c+5},$$

ceea ce arată că punctele V, A, B sînt coliniare.

C. Herling student Facultatea
de chimie industrială, I. P. Bucureşti

Generalizarea problemelor 4547 şi 5446

1° Să se rezolve ecuaţia:

$$(x^2+ax+b+c)(x^2+ax+b)(x^2+ax+b-c-1)+c(c+1)=0.$$

Soluţie. Notăm cu $x^2+ax+b=y$ şi ecuaţia devine

$$y(y+c)(y-c-1)+c(c+1)=0$$

sau

$$(y-1)[y^2-c(c+1)]=0,$$

de unde

$$y_1=1 \text{ şi } y_{2,3}=\pm\sqrt{c(c+1)}$$

din care se află cele 6 rădăcini ale ecuaţiei date.

In cazul particular $a=-3$, $b=-4$, $c=5$ obţinem ecuaţia

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)+30=0,$$

sau

$$(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)+30=0$$

adică tocmai ecuaţia din enunţul problemei 4547.

2° Să se arate că:

$$1\cdot p+2(p+1)+\cdots+n(n+p-1)=\frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{2}$$

unde n şi p sînt numere naturale (problema 5446).

a) Ne propunem *să calculăm suma:*

$$S=\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)r][b+(k-1)q]=$$

$$=a\cdot b+(a+r)(b+q)+(a+2r)(b+2q)+\cdots+$$

$$+[a+(n-1)r][b+(n-1)q],$$

unde a, b, r şi q sînt numere naturale.

Suma S se mai poate scrie:

$$S = \sum_{k=1}^{n} [ab + (aq + br)(k-1) + rq(k-1)^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ab + (aq + br) \sum_{k=1}^{n} (k-1) + \ldots + rq \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

sau, ținînd seama de formulele cunoscute:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

și

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

suma devine

$$S = nab + (aq + br)\frac{n(n-1)}{2} + rq\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Făcînd calculele obținem:

$$S = \frac{n}{6}[2n^2rq + 3n(aq + br - rq) + 6ab - 3(aq + br) + rq]$$

In cazul particular $a = 1$, $r = 1$, $b = p$, $q = 1$ obținem problema 5446.

b) *Să se calculeze suma:*

$$S = 1^{k-1} \cdot p + 2^{k-1}(p+1) + \ldots + n^{k-1}(n+p-1)$$

Dacă notăm cu $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ suma calculată devine

$$S = 1^{k-1}(1 + p - 1)2^{k-1}(2 + p - 1) + \ldots + n^{k-1}(n + p - 1)$$

sau:

$$S = S_k + (p-1)S_{k-1} \tag{1}$$

Dar

$$(n+1)^{k+1} - n - 1 = C_{k+1}^1 \cdot S_k + C_{k-1}^2 \cdot S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 \tag{2}$$

este o formulă de recurență care dă pe S_k în funcție de sumele anterioare $S_1, S_2, \ldots, S_{-1}$ (Vezi Algebra cl. X pag. 50 ed. 1958).

Din (2) scoatem pe S_k:

$$S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - n - 1 C_{k+1}^2 S_{k-1} - C_{k+1}^3 S_{k-2} - \ldots - C_{k+1}^k S_1}{C_{k+1}^1}$$

Inlocuind pe S_k în (1) și aducînd la același numitor obținem :

$$S = \frac{(n+1)^{k+1} - n - 1 + [(p-1)C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2]S_{k-1} - C_{k+1}^3 S_{k-2} - \ldots - C_{k+1}^k S_1}{C_{k+1}^1}$$

In cazul particular $k = 2$ obținem tot problema 5446.

Liviu Pirșan, student matematici București

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

Cu privire la metoda inducției complete

Cînd se aplică metoda inducției complete la demonstrarea unei identități sau a unei inegalități se pot aduce unele simplificări la aplicarea principiului inducției pe care le arătăm în cele ce urmează.

I. O identitate de demonstrat, la care se poate aplica metoda inducției complete, are forma generală

$$f(n) \equiv \varphi(n) \tag{1}$$

unde n este un număr natural, iar f și φ niște funcții oarecare.

Pentru demonstrarea identității (1) se poate aduce următoarea simplificare de metodă :

Notăm cu $E(n)$ diferența $f(n) - \varphi(n)$ și calculăm expresia $E(n+1) - E(n)$. Demonstrînd că $E(n+1) - E(n)$ este nulă, rezultă

$$E(n+1) \equiv E(n). \tag{2}$$

Dacă presupunem (1) adevărată pentru n înseamnă că $E(n) = 0$ iar din (2) deducem că și $E(n+1) = 0$, ceea ce se traduce prin aceea că dacă (1) este adevărată pentru n, ea este adevărată și pentru $n+1$. Demonstrînd că (1) este adevărată pentru $n = 0$, $n = 1$ înseamnă că este adevărată pentru orice n.

Să aplicăm cele spuse mai sus la demonstrarea formulei

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 \equiv (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

Formăm $E(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

și calculăm $E(n+1) - E(n)$. Rezultă :

$$E(n+1) - E(n) = \left[1^2 - 2^2 + 3^2 \ldots + (-1)^{n-1} n^2 + (-1)^n (n+1)^2 - (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right] - \left[1^2 - 2^2 + 3^2 \ldots + (-1)^{n-1} n^2 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] \equiv$$

$$\equiv (-1)^n (n+1)^2 - (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} + (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2},$$

sau

$$E(n+1)-E(n)\equiv(-1)^{n-1}(n+1)\left[-(n+1)+\frac{n+2}{2}+\frac{n}{2}\right]=0.$$

Astfel că avem $E(n+1)\equiv E(n)$ și cum se presupune E(n) = o adică (3) adevărată pentru n, rezultă din egalitatea obținută că (3) este adevărată și pentru $n+1$.

Deoarece (3) este verificată pentru $n=0$, $n=1$ înseamnă că ea este adevărată pentru orice n.

II. O neegalitate de demonstrat prin metoda inducției se poate scrie întotdeauna sub forma

$$f(n)>\varphi(n), \tag{4}$$

unde n este un număr natural, iar f și φ niște funcții oarecare.

Pentru demonstrarea neegalității (4) formăm diferența

$$E(n)\equiv f(n)-\varphi(n)$$

și calculăm expresia $E(n+1)-E(n)\equiv\psi(n)$, sau

$$E(n+1)\equiv E(n)+\psi(n).$$

Dacă demonstrăm că $\psi(n)$ este o expresie pozitivă pentru orice n și presupunem (4) adevărată pentru n, deducem din (5) că

$$E(n+1)>0.$$

ceea ce exprimă că inegalitatea (4) fiind adevărată pentru n este adevărată și pentru $n+1$.

Căutăm apoi valoarea k cea mai mică a lui n pentru care (4) este verificată. Ținînd seama de cele spuse mai sus va rezulta că inegalitatea (4) este adevărată pentru orice n natural începînd cu k.

Să demonstrăm că pentru orice n natural mai mare decît 1 avem:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}. \tag{6}$$

Avînd în vedere că $E(n)\equiv\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{13}{24}$,

avem:

$$E(n+1)-E(n)\equiv\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\ldots+\frac{1}{2n+2}-\frac{13}{24}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{13}{24}\right)$$

sau

$$E(n+1)=E(n)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=E(n)+\psi(n). \tag{7}$$

Rezultă

$$\psi(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)},$$

care este pozitivă pentru orice n. Presupunînd (6) adevărată pentru n, ceea ce înseamnă că $E(n) > 0$, astfel că din (7) deducem că avem și $E(n+1) > 0$.

Avînd în vedere și faptul că (6) este adevărată începînd cu $n = 2$ înseamnă că această neegalitate este adevărată pentru orice n natural mai mare ca 1.

O. Sacter

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6128

Se dă un cerc cu centrul în C și diametrul OA = 2a. Se prelungește diametrul OA cu AM = a. Din M se duce la cerc tangenta MT, în care T este punctul de contact. Tangenta MT se intersectează în P cu tangenta dusă în O. Se cere:

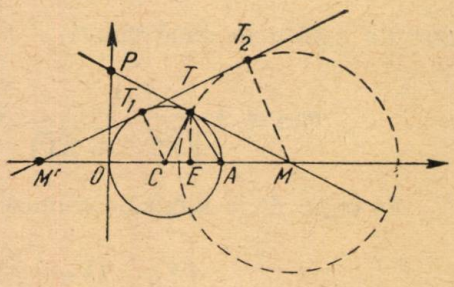
a) *Să se arate că triunghiul ACT este echilateral.*

b) *Să se calculeze segmentele OP, TM și aria triunghiului OTM în funcție de a.*

c) *Dacă OA este axa Ox și OP axa Oy, să se scrie ecuația cercului cu centrul în M și care trece prin punctul T.*

d) *Să se scrie ecuația tangentei celor două cercuri.*

(La admitere în Institutul Politehnic București, 1963)



Soluție dată de Mateescu Lucian, absolvent Craiova.

a) Triunghiul ACT este isoscel căci $AC = TC = a$. În triunghiul MCT dreptunghic AT fiind mediană are ca valoare jumătatea ipotenuzei, adică $AT = a$, deci triunghiul ACT este echilateral avînd toate laturile egale.

b) Din triunghiul dreptunghic CTM se obține $TM = a\sqrt{3}$, iar din asemănarea triunghiurilor MCT și MPO deducem $OP = a\sqrt{3}$.

Aria triunghiului OMT se obține din relația

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot TE = \frac{3}{4} a^2\sqrt{3} \text{ unități patrate, } E \text{ se află pe } OM.$$

c) Cercul cu centrul în $M(3a, 0)$ ce trece prin T are raza $r = MT = a\sqrt{3}$. Ecuația sa este

$$(x - 3a)^2 + y^2 - 3a^2 = 0, \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 - 6ax + 6a^2 = 0.$$

d) Tangenta T_1T_2 comună cercurilor cu centrele în C și M taie axa Ox în $M'(x, 0)$. Abscisa x a punctului se obține scriind proporționalitatea laturilor triunghiurilor asemenea $M'CT_1$ și $M'MT_2$, adică

$$\frac{M'C}{M'M}=\frac{CT_1}{MT_2}, \text{ sau } \frac{M'C}{MC}=\frac{1}{\sqrt{3}-1},$$

care conduce la ecuația

$$\frac{a-x}{2a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}, \text{ de unde } x=-a\sqrt{3}.$$

Ecuația unei drepte de pantă variabilă m, trecînd prin $M(-a\sqrt{3},0)$ este

$$y=m(x+a\sqrt{3})$$

Intersectăm această dreaptă cu cercul care are centrul în $C(a, 0)$ de ecuație

$$x^2+y^2-2ax=0$$

și punem condiția ca punctele de intersecție să fie confundate. Se obține ecuația de gradul II

$$\sqrt{3}(2+\sqrt{3})m^2-1=0$$

care dă pentru m două valori

$$m_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

Se obțin două tangente comune de ecuații

$$(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{2\sqrt{3}}\,y+a\sqrt{3}=0,$$

$$(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{2\sqrt{3}}\,y+a\sqrt{3}=0.$$

Problema 6129

Se dă un con circular drept cu raza bazei $R=a$ și generatoarea $G=2a$.

a) *Un plan paralel cu baza taie înălțimea conului în două părți egale. Să se calculeze raportul ariilor laterale și raportul volumelor celor două corpuri în care planul desface conul dat.*

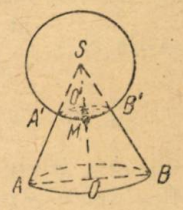
b) *O sferă cu centrul în vîrful conului și avînd raza $r=a$ desparte conul dat în două corpuri. Să se calculeze raportul volumelor acestor două corpuri.*

(La admitere în Institutul Politehnic București, 1963)

Soluție dată de *Trif Maria*, elevă școala medie 2 Sibiu.

a) Planul paralel bazei determină conul $SA'V'$ asemenea conului dat SAB. Raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$ și însemnînd prin A_1, A, A_2, V_1, V, V_2 ariile laterale și volumele conurilor $SA'B'$, SAB respectiv a triunghiului de con $A'ABB'$ avem

$$\frac{A_1}{A}=\frac{1}{4} \text{ și } \frac{V_1}{V}=\frac{1}{8}$$



Aplicînd o proprietate cunoscută acestor proporții obținem

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{3} \text{ și } \frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{7}$$

b) Sfera desparte conul în sectorul sferic $SA'MB'$ și corpul $A'ABB'M$. Notînd cu V' volumul sectorului sferic avem:

$$V'=\frac{2}{3}\pi a^2 O'M, \text{ unde } O'M=SM-SO'=a-\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{2}(2-\sqrt{3}).$$

deci

$$V'=\frac{\pi a^3}{6}(\sqrt{3}-1)^2$$

Volumul V'' al corpului $A'ABB'M$ se obține scăzînd din volumul V al conului SAB volumul V' al sectorului sferic. Obținem

$$V''=\frac{2\pi a^3}{3}(\sqrt{3}-1)$$

Făcînd raportul lor se obține:

$$\frac{V'}{V''}=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1),$$

Problema 6135

Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul drept în A, cateta $AC=b$ și ipotenuza $BC=2b$. Se duce un cerc cu centrul în A și raza $R=AC$, care taie ipotenuza BC în D. Se cere:

a) *Să se calculeze segmentele CD și DB.*

b) *Să se arate că triunghiurile ACD și ADB au aceeași arie și să se determine această arie.*

c) *Să se calculeze raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și ADB.*

d) *Considerînd AB ca axă Ox și AC ca axă Oy să se scrie ecuația cercului cu centrul în B și tangent la dreapta AD.*

(La admiterea în Facultatea de Chimie-Metalurgie din I. P. București, 1963)

Soluție dată de elevul *Simplăceanu Virgil*, școala medie nr. 7 din *Blaj*.

a) În triunghiul dreptunghic ABC, avem $BC = 2AC$. Rezultă că $\sphericalangle ACD = 60°$. Dar $AC = AD$, deci triunghiul ACD este echilateral și avem $AD = CD = DB = b$.

b) Triunghiurile ACD și ABD au bazele BD și CD egale, iar înălțimea corespunzătoare este aceeași; calculînd aria triunghiului echilateral ACD, găsim $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

c) Raza cercului înscris într-un triunghi este dată de: $r = \frac{S}{p'}$, unde S este aria triunghiului, iar p semiperimetrul. Notînd cu r_1 și r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și ADB se obține

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

d) Avem $B(b\sqrt{3}, 0)$; $C(o, b)$; $D\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Raza cercului căutat este dată de distanța punctului B la dreapta (AD) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, deci $R = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ și ecuația cercului este $x^2 + y^2 - 2b\sqrt{3}x + \frac{9b^2}{4} = 0$.

Au mai dat soluții bune elevii: *Coreață Ion*, școala medie nr. 1 Vaslui și *Niculescu Constantin*, școala medie nr. 3 Tîrgoviște.

Problema 6143

Se dă un triunghi oarecare ABC și un punct M în interiorul său. Se duc MP, MN paralele respectiv cu AB, AC. Să se afle locul geometric al punctului M dacă există relația: $AP \cdot AB + AN \cdot AC = constant$.

Brînzănescu V., absolvent Constanța

Soluție dată de *Zamfirescu Cristina*, elevă, București. Se observă că se formează paralelogramul $MPAN$. Deci, $AN = MP$; $MN = AP$ de unde:

$$AP \cdot AB + AN \cdot AC = MN \cdot AB + MP \cdot AC = \text{constant}.$$

Ducem perpendicularele MN' și MP' respectiv pe AB și AC. Triunghiul MNN' este esemenea cu triunghiul MPP', fiind dreptunghice și avînd $\sphericalangle MNN' = \sphericalangle MPP'$ (laturile paralele). Deci putem scrie:

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{MP}{MP'} = a = \text{constant},$$

de unde

$$MN = a \cdot MN' \text{ și } MP = a\,MP'.$$

Rezultă: $MN' \cdot \alpha \cdot AB + MP' \cdot \alpha \cdot AC = \text{constant}$ sau: $MN' \cdot AB + MP' \cdot AC = \text{constant}$. Dar $MN' \cdot AB$ și $MP' \cdot AC$ reprezintă respectiv ariile triunghiurilor MAB și MAC.

Deoarece aria triunghiului ABC rămîne constantă, iar suma ariilor triunghiurilor MAB și MAC rămîne de asemenea constantă, rezultă că și aria triunghiului BMC rămîne constantă.

Dar, latura BC din triunghiul BMC fiind fixă și aria constantă, înălțimea corespunzătoare este și ea constantă; deci, M se află la o distanță constantă de BC, adică pe un segment din interiorul triunghiului și paralel la BC.

Problema 6149

Se dă paralelogramul $ABCD$ în care A', B', C' sînt respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD. Fie M un punct din planul paralelogramului și M_1, M_2, M_3 simetricele lui M față de A', B', C'. Se prelungește BC de o parte și de alta cu $BE = CF$. Să se arate că:

a) *EFM_3M_1 este un trapez;* b) *în ce condiții punctele G, I, M_2 sînt*

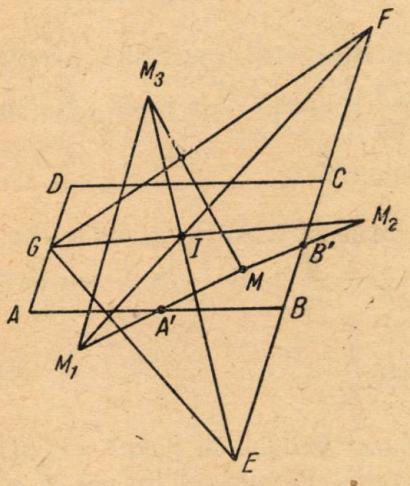


Fig. 1

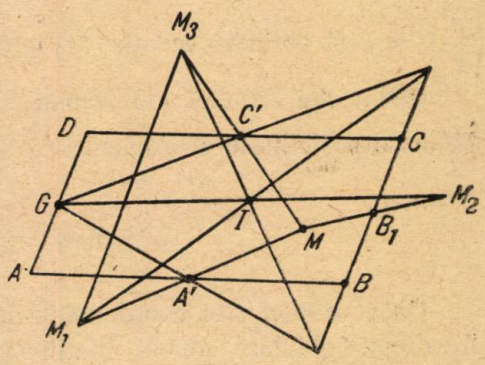


Fig. 2

colineare, G fiind mijlocul laturii AD, iar I intersecția dintre dreptele M_1F și M_3E; c) *cînd patrulaterul EFM_3M_1 devine un paralelogram.*

H. Dăscălescu, Ploiești

Soluție dată de *Arsene N. Ion*, elev București. — a) În triunghiul M_1MM_3, $A'C'$ este linie mijlocie, deci dreptele M_1M_3, $A'C'$ și BC sînt paralele și astfel, în patrulaterul EFM_3M_1 două laturi opuse M_1M_3 și EF sînt paralele (fig. 1).

b) Dacă $BE = CF = \frac{1}{2}BG$, dreptele GE și GF trec respectiv prin A' și C', deoarece patrulaterele $AGBE$ și $DGCF$ devin paralelograme în care diagonalele GE și GF trec prin mijloacele diagonalelor AB și CD respectiv.

În triunghiul GEF dreptele EM_3, FM_1, GM_2 sînt concurente (problema 75 din manualul de geometrie cl. VIII, ed. 1961). Deci, GM_2 trece prin I intersecția dreptelor EM_3 și FM_1 (fig. 2).

c) De asemeni, cînd $BE = CF = \frac{1}{2} BC$ rezultă

$$M_1M_3 = 2A'B' = 2BC = EF$$

și astfel, în patrulaterul M_1EFM_3 laturile opuse EF și M_1M_3 sînt paralele și egale, deci patrulaterul este paralelogram (fig. 2).

Problema 6150

Să se rezolve ecuația $ma^{2x} + nb^{2x} = a^x b^x$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. Împărțind ecuația cu produsul $a^x b^x$ ($a^x, b^x \neq 0$), obținem : $m\left(\frac{a}{b}\right)^x + n\left(\frac{b}{a}\right)^x - 1 = 0$. Notăm $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$ și obținem ecuația (1) $my^2 - y + n = 0$.

Rădăcinile ecuației (1) trebuie să fie reale și pozitive, de unde condițiile de posibilitate a problemei : $1 - 4mn \geqslant 0, \frac{n}{m} > 0, \frac{1}{m} > 0$, sau încă

$$m > 0,\ n > 0,\ mn \leqslant \frac{1}{4} \tag{2}$$

Dacă m și n sînt coordonatele unui punct variabil în planul a două axe dreptunghiulare, atunci relațiile (2) exprimă că punctul trebuie să se găsească în cadranul I ($m > 0$, $n > 0$) între axele de coordonate și ramura iperbolei echilaterale, de ecuație $mn = \frac{1}{4}$, sau pe această ramură.

În aceste condiții se rezolvă ecuația (1), se egalează cu $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ și prin logaritmare se găsesc rădăcinile ecuației propuse

$$x = \frac{\log\left(1 \pm \sqrt{1 - 4mn}\right) - \log 2m}{\log a - \log b},\ a \neq b$$

În cazul particular $mn = \frac{1}{4}$, ecuația are o singură rădăcină

$$x = \frac{-\log 2m}{\log a - \log b}.$$

Problema 6151

Dacă a, b, c satisfac relația $a-b \neq n\pi$ *(n este număr întreg) și pe celelalte analoage, să se arate că:*

$$\sum \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} = 1.$$

E. Onofraș, profesor, Ploiești

Soluție, dată de *Munteanu Mihai*, elev Brașov.
Vom scrie succesiv:

$$\sum \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} = \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} + \frac{\sin c}{\sin (b-a)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin a \cdot \sin (a-c) - \sin b \cdot \sin (b-a)}{\sin (b-c) \cdot \sin (a-c)} = \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin c}{\sin (b-a)} \cdot \frac{\cos (2a-c) - \cos c - \cos (2b-c) + \cos c}{\sin (b-c) \cdot \sin (a-c)} =$$

$$= \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin c}{\sin (b-a)} \cdot \frac{\cos (2a-c) - \cos (2b-c)}{\sin (b-c) \cdot \sin (a-c)} =$$

$$= \frac{\sin a \sin b}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} + \frac{\sin c}{\sin (b-a)} \cdot \frac{\sin (a+b-c) \cdot \sin (a-b)}{\sin (b-c) \cdot \sin (a-c)} =$$

$$= \frac{\sin a \sin b}{\sin (c-a) \sin (c-b)} - \frac{\sin c \sin (a+b-c)}{\sin (c-a) \cdot \sin (c-b)} =$$

$$= \frac{\sin a \sin b - \sin c \sin (a+b-c)}{\sin (c-a) \sin (c-b)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-\cos (a+b) + \cos (a-b) + \cos (a+b) - \cos (a+b-2c)}{\sin (c-a) \sin (c-b)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos (a-b) - \cos (a+b-2c)}{\sin (c-a) \sin (c-b)} = \frac{\sin (c-a) \sin (c-b)}{\sin (c-a) \sin (c-b)} = 1.$$

Problema 6152

Se dă familia de curbe $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}$ *unde* $\alpha > 0$ *și se cere să se arate că: a) punctele de inflexiune se găsesc pe aceeași dreaptă și b) tangentele în punctele de inflexiune formează un fascicul.*

Aristide Leonte, Craiova

Soluție. — dată de *Spircu Tiberiu*, elev Arad.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}}\cdot\frac{\alpha-x+\alpha+x}{(\alpha-x)^2}=\frac{\alpha}{(\alpha-x)^2\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}}=\frac{\alpha}{(\alpha-x)\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

$$f''(x)=-\alpha\cdot\frac{-\sqrt{\alpha^2-x^2}+(\alpha-x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}}{(\alpha-x)^2(\alpha^2-x^2)}=$$

$$=\alpha\cdot\frac{\alpha^2-x^2+\alpha x-x^2}{(\alpha-x)^2(\alpha^2-x^2)^{3/2}}\qquad f''(x)=\alpha\cdot\frac{\alpha^2+\alpha x-2x^2}{(\alpha-x)^2(\alpha^2-x^2)^{3/2}}$$

Zerourile derivatei a doua sînt $\alpha, \frac{\alpha}{2}$. Dar punctul α nu aparține mulțimii de definiție a funcției. Prin urmare, există un singur punct de inflexiune a graficului $\left(-\frac{\alpha}{2}\right), f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$. Ori

$$f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\alpha-\frac{\alpha}{2}}{\alpha+\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{\alpha}{3\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ nu depinde de

parametru, încît punctele de inflexiune se găsesc pe dreapta $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$f'\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}}}=\frac{\alpha}{\frac{3\alpha}{2}\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}}=\frac{4}{3\sqrt{3}\alpha}.$$

Ecuația familiei de tangente este $y-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}\alpha}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$ sau $y=\frac{4}{3\sqrt{3}\alpha}x+\frac{5}{3\sqrt{3}}$. Tangentele taie axa ordonatelor în același punct, $\left(0, \frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$,

Problema 6154

Să se rezolve sistemul :

$$\sqrt{yz}-x=a\ ;\ \sqrt{xz}-y=b\ ;\ \sqrt{xy}-z=c.$$

Martin Mettler, profesor, Vișeul de sus

Soluția autorului — Separînd radicalii și ridicînd la patrat cele trei ecuații, sistemul devine : $yz=(a+x)^2$; $xz=(b+y)^2$; $xy=(c+z)^2$ (1).

Înmulțind membru cu membru cele trei ecuații găsim:

$$\pm xyz = (a+x)(b+y)(c+z).$$

Să studiem cazul pentru semnul +. Împărțind această ecuație pe rînd cu fiecare ecuație a sistemului (1), obținem sistemul:

$$x = \frac{(b+y)(c+z)}{a+x}; \quad y = \frac{(a+x)(c+z)}{b+y}; \quad z = \frac{(a+x)(b+y)}{c+z}. \tag{2}$$

Eliminînd numitorii și efectuînd înmulțirile, rezultă:

$$\begin{aligned} ax + x^2 &= bc + bz + cy + yz \\ by + y^2 &= ac + az + cx + xz \\ cz + z^2 &= ab + ay + by + xy \end{aligned} \tag{3}$$

Înlocuind produsele yz; xz și xy cu valorile lor din relațiile (1), efectuînd operațiile de ridicare la patrat a binoamelor și reducînd termenii asemenea obținem următorul sistem de ecuații lineare:

$$\begin{aligned} ax + cy + bz &= -bc - a^2 \\ cx + by + az &= -ac - b^2 \\ bx + ay + cz &= -ab - c^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Rezolvăm sistemul (4) cu ajutorul determinanților. Determinantul principal este chiar determinantul circulant, dar preferăm să-l dezvoltăm după elementele primei coloane și avem:

$$D = \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix} = a(bc - a^2) - c(c^2 - ab) + b(ac - b^2) =$$

$$= abc - a^3 - c^3 + abc + abc - b^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Avem apoi, dezvoltînd pe D_x tot după elementele primei coloane:

$$D_x = \begin{vmatrix} -bc - a & c & b \\ -ac - b & b & a \\ -ab - c & a & c \end{vmatrix} = -(bc + a^2)(bc - a^2) + (ac + b^2)(c^2 - ab) - (ab + c^2)(ca - b^2) =$$

$$= a^4 - b^2c^2 + ac^3 + b^2c^2 - a^2bc - ab^3 - a^2bc - ac^3 + ab^3 + b^2c^2 =$$

$$= a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc = (a^2 - bc)^2$$

după ce am restrîns patratul perfect. În mod cu totul analog se găsesc $D_y = (b^2 - ac)^2$ și $D_z = (c^2 - ab)^2$. Atunci soluțiile sistemului (4) și deci și ale sistemului (1) care este echivalent cu (4) vor fi:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(a^2 - bc)^2}{3abc - (a^3 + b^3 + c^3)}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{(b^2 - ac)^2}{3abc - (a^3 + b^3 + c^3)};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{(c^2 - ab)^2}{3abc - (a^3 + b^3 + c^3)}.$$

Problema 6156

Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru în care înălțimile sînt concurente. Notăm cu t_1, t_2, t_3, t_4 distanțele de la un punct M din interiorul tetraedrului la cele patru fețe; cu h_1, h_2, h_3, h_4 cele patru înălțimi și fie $h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3 \leqslant h_4$. Să se arate că

$$\frac{t_1}{h_1}+\frac{t_2}{h_2}+\frac{t_3}{h_3}+\frac{t_4}{h_4}=1,$$

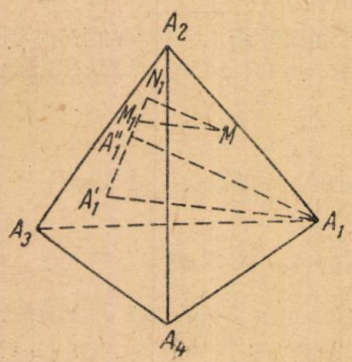
$$h_1 \leqslant t_1+t_2+t_3+t_4 \leqslant h_4$$

M. L. Lupovoc, Lugansk, U.R.S.S.

Soluție și *generalizare* date de *Crișan Victor*, elev Aiud.

Enunțul generalizat este următorul:

Prin vîrfurile tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ ducem patru drepte care taie respectiv fețe opuse în A_1', A_2', A_3', A_4'. Printr-un punct M din interiorul tetraedrului ducem paralele la dreptele A_1A', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' și notăm intersecțiile lor cu fețele $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_3$, cu M_1, M_2, M_3, M_4. Notăm $A_iA_i'=a_i$ și $MM_i=t_i$ și presupunem că $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. Atunci



$$\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{a_i}=1 \text{ și } a_1 \leqslant \sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant a_4$$

Fie A_i'' proiecțiile punctelor A_i pe fețele opuse și N_i proiecțiile lui M pe cele patru fețe Notăm V volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ și cu V_i volumul tetraedrului determinat de punctul M și fiecare din cele patru fețe.

Avem $$\frac{V_1}{V}=\frac{M_1N_1}{A_1A_1''}$$

Din asemănarea triunghiurilor $A_1A_1'A_1''$ și MM_1N_1 rezultă

$$\frac{M_1N_1}{A_1A_1''}=\frac{MM_1}{A_1A_1'}, \quad \text{deci} \quad \frac{V_1}{V}=\frac{MM_1}{A_1A_1'}=\frac{t_1}{a_1}.$$

În general avem $\frac{t_i}{a_i}=\frac{V_i}{V}$ deci $\sum_{i=1}^{4}{}' \frac{t_i}{a_i}=\frac{\sum_{i=1}^{4} V_i}{V}=1$, deoarece

$$V=\sum_{i=1}^{4} V_i.$$

Pentru a demonstra relația a doua, observăm că

$$\frac{t_i}{a_4} \leqslant \frac{t_i}{a_i} \leqslant \frac{t_i}{a_1}$$

deci

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_4} \leqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{t_i}{a_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_1}, \text{ sau } \frac{\sum_{i=1}^{4}{}' t_i}{a_4} \leqslant 1 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{a_1}$$

de unde $a_1 \leqslant \sum_{i=1}^{4} t_i \leqslant a_4$

În cazul cînd $A_i A_i'$ sînt înălțimi, se obține enunțul inițial al problemei.

Observații. 1) În enunțul inițial al problemei, concurența înălțimilor nu este necesară.

2) Prima relație din enunțul generalizat este cunoscută (a se vedea „Generalizarea unei teoreme referitoare la triunghiuri" G.M.F.-B nr. 6/1962).

Problema 6179

Să se determine progresia aritmetică din 6 termeni astfel ca suma pătratelor termenilor t_1, t_2, t_3 și t_4 să fie egală atît cu produsul $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$, cît și cu produsul $t_5 \cdot t_6$.

Romanel Bîrzan, Cluj

Soluție dată de *Lupu Valentin*, elev ș.m. 1, București. — Notăm

$t_1 = (x - 2r)$; $t_2 = x - r$; $t_3 = x$; $t_4 = x + r$; $t_5 = x + 2r$; $t_6 = x + 3r$.

Formăm sistemul:

$$x^2 + (x - 2r)^2 + (x - r)^2 + (x + r)^2 = x(x - r)(x - 2r) =$$
$$= (x + 2r)(x + 3r)$$

din care se obține:

$$x^2 + (x - 2r)^2 + (x - r)^2 + (x + r)^2 = (x + 2x)(x + 3x)$$

$$x^2 + x^2 - 4rx + 4r^2 + x^2 - 2rx + r^2 + x^2 + 2rx + r^2 = x^2 + 5rx +$$
$$+ 6r^2; \; 3x^2 - 9rx = 0; \; 3x(x - 3r) = 0; \; x = 0; \; x = 3r$$

și

$$4x^2 - 4rx + 6r^2 = x(x - r)(x - 2r)$$

$$4x^2 - 4rx + 6r^2 = x^3 - 3rx^2 + 2r^2x$$

Înlocuind pe x prin $3r$ găsim:

$$36r^2 - 12r^2 + 6r^2 = 27r^3 - 27r^3 + 6r^3$$

sau:

$$6r^3 - 30r^2 = 0; \; 6r^2(r - 5) = 0; \; r = 0; \; r = 5; \; x = 15.$$

Problema 6180

Se dă dreapta (D) și punctul fix A pe cercul (O). O dreaptă variabilă ce trece prin A retaie cercul (O) în punctul M, iar dreapta (D) în N. Să se afle ecuația locului geometric al mijlocului segmentului MN.

Șerban Grigorescu, student, București

Soluția autorului. Fie $A(0;0)$ originea, axa Ax paralelă la (D) și Ay perpendiculară pe (D). Cercul (O) este de ecuație $x^2+y^2+2mx+2ny=0$ și de rază r. Dreapta (D) este de ecuație $y=a$. Luăm punctul M de coordonate $x_M=-m+r\cdot\cos\varphi$; $y_M=-n+r\sin\varphi$, unde φ este un parametru. Obținem:

$$(AM)\ y=\frac{r\sin\varphi-n}{r\cos\varphi-m}\cdot x \qquad ; N\begin{cases} x=a\dfrac{r\cos\varphi-m}{r\sin\varphi-n} \\ y=a \end{cases}$$
$$(D)\quad y=a$$

Coordonatele punctului P, mijlocul lui MN sînt:

$$P\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(r\cos\varphi-m+a\dfrac{r\cos\varphi-m}{r\sin\varphi-n}\right) & (1) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(r\sin\varphi-n+a\right) & (2) \end{cases}$$

Din (2) scoatem: $\sin\varphi=\dfrac{2y-a+n}{r}$ (3)

și $r\sin\varphi-n=2y-a$. Relația (1) devine:

$$2x=r\cos\varphi-m+a\frac{r\cos\varphi-m}{2y+a}$$

de unde

$$\cos\varphi=\frac{x(2y-a)+my}{ry} \qquad (4)$$

Din (3) și (4) obținem:

$$\frac{[(2y-a)+n]^2}{r^2}+\frac{[x(2y-a)+my]^2}{r^2y^2}=1$$

care dezvoltat dă:

$$(2y-a)^2(x^2+y^2)+(2y-a)(2ny^2+2mxy)+(m^2+n^2-r^2)y^2=0$$

Dar $m^2+n^2-r^2=0$ și $2y-a\neq 0$; rezultă că locul geometric al lui P este cubica de ecuație:

$$(2y-a)(x^2+y^2)+2ny^2+2mxy=0$$

Problema 6186

Un cerc de rază r se rotește în jurul unei axe din același plan, centrul cercului descriind un cerc de rază $R>r$. Suprafața acestui corp de rotație numit tor, constituie canalul unui lagăr în care sînt așezate n bile una după alta, bilele vecine fiind tangente între ele și tangente canalului. Să se exprime raza unei bile în funcție de R și n. Care este raza ρ a cercului pe care se află punctele de contact dintre bile?

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Blănaru Constantin*, elev S. m. 1 București.

O bilă tangentă la suprafața interioară a torului are punctele de tangență pe un cerc mare al ei. Planul cercului descris de centrul cercului dat, pe care să-l numim plan ecuatorial, taie torul după două cercuri concentrice ecuatoriale, iar bilele după cercuri mari. Să considerăm bilele de centru O_1 și O_2 și fie T punctul lor de tangență. Planul tangent comun acestor bile este tăiat de planul ecuatorial după o tangentă care fiind perpendiculară pe mijlocul laturii O_1O_2 a triunghiului isoscel OO_1O_2 trece și prin vîrful O. Raza unei bile este egală chiar cu raza cercului dat r. Unghiul O_1OO_2 este egal cu $\frac{2\pi}{n}$, iar unghiul $O_1OT = \frac{\pi}{n}$. Din triunghiul dreptunghic OO_1T rezultă:

$$r = O_1T = R \sin (O_1 OT_1) = R \sin \frac{\pi}{n}$$

Raza cercului de contact dintre bile este OT. Din același triunghi dreptunghic OO_1T avem: $\rho = OT = \cos \frac{\pi}{n}$.

Problema E : 2082

Doi pionieri au depus la CEC cîte o sumă de bani. Dacă primul ar mai depune $\frac{3}{4}$ din suma sa, iar al doilea ar mai depune 20% din suma sa, atunci ar avea împreună 260 lei. Dacă însă primul ar mai depune $\frac{1}{4}$ din suma sa, iar celălalt ar rămîne cu aceeași sumă, atunci ei ar avea la CEC sume egale. Ce sume de bani au la CEC fiecare din cei doi pionieri?

(La admiterea în clasa a VIII-a Bacău, 1962).

Soluția I. Fie A primul și B al doilea pionier.

Din a doua presupunere rezultă că suma pe care o are B la CEC este $\frac{5}{4}$ din suma lui A și că 20%, adică $\frac{1}{5}$ din suma lui B este $\frac{1}{4}$ din sumai lui A.

In acest caz din prima presupunere rezultă că A ar depune $\frac{7}{4}$ din suma sa și B ar depune $\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}$ din suma lui A, așa că $\frac{7}{4}+\frac{6}{4}=\frac{13}{4}$ din suma lui A face 260 lei. Rezultă că suma lui A este 80 lei și a lui B este 100 lei.

Soluția II. Presupunem că A are la *CEC*, 16 lei și rezultă că B are $16 + \frac{1}{4} \cdot 16 = 20$ lei, ținînd seama de a doua presupunere. Din prima presupunere rezultă că ei ar depune $\left(16 + \frac{3}{4} \cdot 16\right) + \left(20 + \frac{1}{5} \cdot 20\right) = 52$ lei, sumă care diferă de 260 lei cu 208 lei.

Presupunem că A are la CEC, 24 lei și rezultă că B are $24+\frac{1}{4}\cdot 24=30$ lei. Din prima presupunere rezultă că ei ar depune $\left(24+\frac{3}{4}\cdot 24\right)+\left(30+\right.$ $\left.+\frac{1}{5}\cdot 30\right)=78$ lei, sumă ce diferă de 260 lei cu 182 lei.

Deci mărind suma lui A cu 8 lei, diferența inițială de 208 lei s-a micșorat iu $208-182=26$ lei. Pentru ca această diferență să dispară este necesar să mărim suma lui A cu de $208:26=8$ ori cu cîte 8 lei, deci cu 64 lei. Deci A avea la CEC, $16+64=80$, iar B avea $80+\frac{1}{4}\cdot 80=100$ lei.

Soluția III. Notînd cu x suma pe care o avea A și y suma pe care o avea B, obținem sistemul

$$\left(x+\frac{3}{4}x\right)+\left(y+\frac{1}{5}y\right)=260; \qquad x+\frac{1}{4}x=y$$

Prima ecuație se poate scrie

$$\frac{7}{4}x+\frac{6}{5}y=260$$

iar a doua $y=\frac{5}{4}x$. Înlocuind pe y obținem $\frac{7}{4}x+\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}x=260$ sau $\frac{13}{4}x=260$ de unde $x=80$ lei și $y=100$ lei.

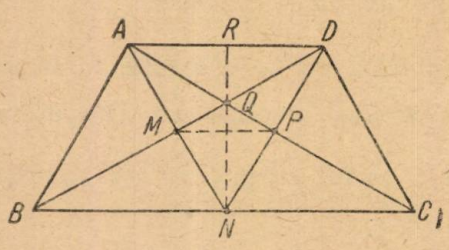
Problema E : 2089

Un trapez este format din jumătatea unui exagon regulat. Intersecțiile bisectoarelor acestui trapez sînt vîrfurile unui patrulater. Să se arate că acest patrulater are diagonalele perpendiculare, că aria lui este de 9 ori mai mică decît a trapezului dat. Să se exprime laturile și diagonalele acestui patrulater știind că baza mică a trapezului este a metri.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Trapezul $ABCD$ fiind jumătatea unui exagon regulat rezultă că $BA=AD=DC$ și că $\sphericalangle A=\sphericalangle D=120°$, iar $\sphericalangle B=\sphericalangle C=60°$.

Ducînd bisectoarea AN a unghiului A, ea este paralelă cu DC, căci $\sphericalangle NAD+\sphericalangle ADC=180°$, deci patrulaterul $ADCN$ este un romb. Bisectoarea din C, fiind o diagonală a rombului $ADCN$, trece prin A. Analog ducînd bisectoarea din D se formează un alt romb, deci N e pe bisectoarele din A și din D și la mijlocul bazei BC. Bisectoarea din B va trece prin D.



Fie $MNPQ$ patrulaterul format, Diagonalele unui romb înjumătă-

ţindu-se, M e mijlocul lui AN şi P e mijlocul lui DN, deci diagonala MP e paralelă cu AD. Diagonalele unui romb fiind perpendiculare rezultă că DM şi AP sînt înălţimi ale triunghiului ADN, aşa că Q se va afla şi pe a treia înălţime a sa, adică NQ e perpendiculară pe AD. În concluzie, diagonalele NQ şi MP sînt perpendiculare.

Prin bisectoarele AN şi DN trapezul a fost împărţit în trei triunghiuri echilaterale ABN; AND şi DCN, egale între ele, avînd $AB = AD = DC$. In triunghiul echilateral AND, înălţimile fiind egale şi fiind şi mediane patrulaterele $MNPQ$; $PQRD$ şi $AMQR$ sînt egale, aşa că aria $MNPQ = \frac{1}{3}$ aria $AND = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\text{ aria } ABCD\right) = \frac{1}{9}$ aria $ABCD$.

Din cele precedente rezultă că:

$$MN = PN = \frac{a}{2};\quad NR = \frac{a\sqrt{3}}{2};\quad MQ = PQ = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

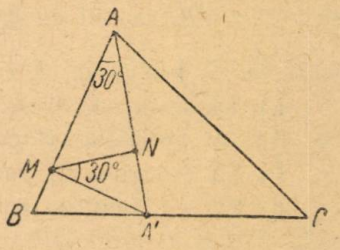
$$MP = \frac{2}{2};\quad NQ = \frac{2}{3}\cdot NR = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Problema E : 2091

In triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' a unghiului A care are $60°$. Din A' se duce perpendiculara $A'M$ pe AB. Din M se duce perpendiculara MN pe AA'.

Să se arate că $3\cdot A'M = AA' + 2\cdot A'N$.

* * *



Soluţie. În triunghiul dreptunghic $AA'M$, avem $\sphericalangle MAA' = 30°$, deci $2\cdot A'M = AA'$.

În triunghiul dreptunghic MNA', avem $\sphericalangle NMA' = 30°$, deci $A'M = 2\cdot A'N$.

Adunînd cele două egalităţi obţinem $3\cdot A'M = AA' + 2\cdot A'N$.

Au dat soluţie asemănătoare elevii *Anton Anton*, cl. VIII, şc. medie 1 Timişoara şi *Şoimu Viorica*, cl. VIII, şc. medie Iaşi.

CHESTIUNI DE EXAMEN*

Probleme date la examenul de admitere în facultatea de matematică şi mecanică din Iaşi, 1964

6666. Se consideră sistemul:

$$x + y = 2m;\quad xy = 1$$

unde m este un parametru real.

---

* Soluţii la aceste probleme se primesc pînă la 30 aprilie 1965.

a) Să se rezolve sistemul și să se discute semnul și natura soluțiilor. b) Dacă $m = \cos \alpha$ să se arate că $x^p + y^p = 2 \cos p\alpha$; c) Să se determine α astfel încît $(1 + i)x^2 + (1 - i)y^2 = 0$, în care $i = \sqrt{-1}$); d) Să se arate că dacă $m \geqslant 1$, atunci $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(m + 1)}$.

6667. Se dă ecuația:

$$x^2 - 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

a) Să se discute natura rădăcinilor x_1 și x_2 cînd α variază între 0 și 2π.

b) Să se arate că dacă ecuația de mai sus are rădăcinile reale și distincte, atunci ecuația

$$x^2 - 2x \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

le are imaginare și reciproc.

c) Să se arate (fără a calcula rădăcinile) că expresia $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ este independentă de arcul α.

d) Să se găsească $\sqrt[3]{1 + i}$.

6668. Într-un cerc de centru O și rază R se consideră un diametru AB și o rază OC, astfel ca $\sphericalangle BOC = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Se duc cercurile prin A, O, C și B, O, C. Fie D și E respectiv centrele lor.

a) Să se demonstreze că dreptele OD și OE sînt perpendiculare una pe alta, iar proiecția ortogonală a segmentului DE pe AB are lungimea R.

b) Să se arate că patrulaterul $OECD$ este inscriptibil.

c) Să se calculeze volumul corpului născut prin rotirea liniei poligonale $ADEB$ în jurul AB.

d) Luîndu-se ca sistem de coordonate diametrul AB și dreapta perpendiculară în O pe acest diametru,

— Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AD și DE cînd punctul C parcurge cercul dat.

6669. Se consideră un sistem de axe ortogonale xOy și o dreaptă care taie pe Ox segmentul $OA = a$, iar pe Oy segmentul $OB = b$, unde $b < a$. Prin mijlocul C al lui AB se duce perpendiculara pe AB care taie Ox în D și pe Oy în F.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $BODC$ este inscriptibil; b) Să se arate că dreptele BD și AF sînt perpendiculare una pe alta; c) Să se calculeze în funcție de a și b volumul corpului generat de linia poligonală $BADF$ ce se rotește în jurul BF; d) Raportîndu-se planul la reperul xOy, să se scrie ecuația dreptei CD și să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BOD, atunci cînd A este fix, iar B parcurge dreapta Oy. Să se indice natura locului.

Subiectele date la admiterea în Institutul de științe economice. Facultatea de economie generală București 1964

6670. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \right)}{\dfrac{(x+y)^2 - xy}{(x-y)^2 + xy} \cdot \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \right)}.$$

6671. Fie dat polinomul:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p.$$

a) Să se determine parametrii m, n, p astfel ca polinomul $P(x)$ să fie divizibil cu $(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$.
b) Să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.

6672. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}$$

Facultatea de credit contabilitate

6673. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{(a+x)^{1/2} + (a-x)^{1/2}}{(a+x)^{1/2} - (a-x)^{1/2}}, \text{ pentru } x = \frac{2ab}{b^2+1}.$$

6674. Fie dată ecuația: $2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$.
a) Să se determine valorile parametrului m, astfel ca diferența rădăcinilor să fie 1.
b) Să se calculeze expresia: $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1}$ în care x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

6675. Să se rezolve:

$$\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

6676. Să se simplifice expresia:

$$E = \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} \right) \cdot \frac{x^4 y^4}{xy + y^2} \cdot \frac{\dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}}{x^3 - 2x^2 y + xy^2}.$$

6677. Fie ecuația: $x^2 - mx + m - 1 = 0$.
a) Pentru ce valori ale lui m, o rădăcină este dubla celeilalte?

b) Pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației satisfac inegalitatea :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 x_2 .$$

6678. Să se rezolve ecuația :

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x .$$

PROBLEME PROPUSE *

6679. Se dă un triunghi oarecare ABC. Fie D piciorul înălțimii din A, E proiecția lui D pe AC, iar F punctul care împarte segmentul ED în raportul egal cu $BD:DC$. Să se arate pe cale elementară, că AF și BB sînt perpendiculare între ele. (Generalizarea problemei 6419).

Petre Liviu, profesor Tîrgoviște

6680. Primul, al doilea și al patrulea termen al unei progresii aritmetice formează o progresie geometrică. Produsul termenului al doilea prin termenul al treilea al progresiei aritmetice este egal cu cubul primului termen. Să se determine ambele progresii.

Romanel Birzan, inginer Cluj

6681. Cu 100 lei se cumpără creioane de 0,50 lei, linii de 1 leu și călimări de cerneală de 5 lei fiecare. Să se determine numărul fiecărui fel de obiect astfel ca suma lor să fie 100. În cîte feluri se poate face cumpărarea ? Să se scrie aceste soluții.

Obreja Petru, absolvent Bacău

6682. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghic cunoscînd că suma catetelor este egală cu 30 cm și înălțimea dusă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este egală cu $4\sqrt{5}$ cm. Construcție grafică.

Traian Ionescu, profesor Brăila

6683. Să se rezolve sistemul :

$$\frac{z}{x} - \frac{yz}{x^2} + \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{zx}{y^2} + \frac{z}{y} = \frac{10}{9}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 29$$

N. Păun, profesor Rm. Vîlcea

*) IX(6679, 6680, 6681, 6682, 6683, 6684, 6685) ; X(6686, 6687, 6688, 6689, 6690, 6691, 6692, 6693, 6694, 6695, 6696, 6697 6698) ; XI(6699, 6700, 6701, 6702, 6703, 6704, 6705, 6706, 6707, 6708, 6709). Soluțiile se primesc pînă la 30 aprilie 1965).

6684. Să se arate că:

$$\sqrt[7]{4\sqrt{7}-6\sqrt{3}}-\sqrt[7]{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}}>\sqrt[3]{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}-\sqrt[5]{5\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$$

Sava Petru, elev Făget

6685. Să se arate că:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}+1=0$$

G. R. Tudor, profesor Brăila

6686. a) Să se arate că:

$A=37^{37^{37}}+37^{37}+1$ se divide cu 15;

b) $B=1964^{1964^{1964}}+1964^{1964}+1$ se divide cu 399.

Popa Eugen, cl. VIII Iași

6687. Să se arate că dacă $a+b+c=d$, există relația: $(a^2+b^2+c^2+d^2)\ (a^4+b^4+c^4+d^4+abcd)=a^6+b^6+c^6+d^6$ unde a, b, c, d sînt numere reale. În acest caz avem egalitate?

Victor Crișan, absolvent Aiud

6688. Se consideră un triunghi ABC și fie I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor înscris și exînscris. Să se arate că avem relațiile:

$$AI\sqrt{1+\sin A}+BI\sqrt{1+\sin B}+CI\sqrt{1+\sin C}=p\sqrt{2}$$

$$II_a\sqrt{1+\sin A}+II_a\sqrt{1+\sin B}+II_c\sqrt{1+\sin C}=$$

$$=2AI_a\sqrt{1+\sin A}+2BI_b\sqrt{1+\sin B}+2CI_c\sqrt{1+\sin C}.$$

Eugen Crăciunescu, profesor Craiova

6689. În triunghiul ABC centrul I al cercului înscris împarte bisectoarele AA', BB', CC' în rapoartele: $\frac{AI}{IA'}=\alpha$; $\frac{BI}{IB'}=\beta$; $\frac{CI}{IC'}=\gamma$. Să se stabilească relațiile: $\alpha\beta\gamma\geqslant 8$; $\alpha+\beta+\gamma\geqslant 6$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geqslant 12$; $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geqslant 48$; $\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3\geqslant 192$.

Georgescu George, elev Craiova

6690. Să se demonstreze inegalitatea:

$$(\sec^{2n}x-1)(\operatorname{cosec}^{2n}x-1)\geqslant(2^n-1)^2.$$

(În legătură cu problema 4981).

Dan Voiculescu, elev București

6691. Să se demonstreze că dacă $1° \leqslant x \leqslant 2°$ și $1° \leqslant y \leqslant 2°$ avem:

$$\cos 45x + \cos 45y - \cos 45(x-y) \leqslant 1{,}5$$

iar dacă $0° \leqslant x \leqslant 1°$ și $0° \leqslant y \leqslant 1°$ avem:

$$\sin 45x + \sin 45y + \cos 45(x+y) \leqslant 1{,}5$$

C. Ionescu-Țiu

6692. Un semicerc de diametru A_0A_n și de rază R este împărțit în n părți egale prin punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Să se arate că: $A_0A_1 + A_0A_2 + \ldots A_0A_{n-1} = 2(OM_1 + OM_2 + OM_3 + \ldots + OM_{n-1})$, unde O este mijlocul lui A_0A_n, iar $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ sînt mijloacele coardelor $A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_{n-1}$.

G. D. Sorescu, profesor Răcari

6693. Să se arate că dacă $a, n_1, n_2, \ldots, n_n$ sînt numere naturale, expresia

$$E = x^{an_1} + x^{an_2+1} + x^{an_3+2} + \ldots + x^{an_n+a-1}$$

se divide cu

$$x^{a-1} + x^{a-2} + \ldots + x^2 + x + 1.$$

(În legătură cu problema 6018).

Pop Gheorghe, elev Turda

6694. a) În planul unui poligon convex regulat $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ nu există un punct M astfel încît $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$; b) În planul unui poligon convex regulat $A_1A_2 \ldots A_{2n+2}$; nu există un punct M astfel încît $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$.

Dan Voiculescu, elev București

6695. Se consideră numărul $E = n^4 + n^2 + 1$, unde n este un întreg pozitiv diferit de zero.

a) Să se descompună E într-un produs de doi factori de gradul doi și să se demonstreze că acești doi factori sînt primi între ei. b) Numărul E poate fi el prim?

(Bacc. math. élem., Franța, octombrie, 1962)

6696. Să se rezolve ecuația:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin 2x.$$

* * *

6697. Să se arate că două numere întregi consecutive sînt prime între ele. Să se arate că dacă a și b sînt două numere întregi prime între

ele, atunci și la perechile de numere a și $(a+b)$; ab și $(a+b)$, numerele sînt prime între ele. Să se arate apoi, că fracția

$$\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$$

este ireductibilă.

Bacalaureat, Franța, 1963

6698. Se consideră un număr N de șase cifre, scris în sistemul zecimal sub forma $N = \overline{abcabc}$, unde c este cifra unităților și miilor, b este cifra zecilor și zecilor de mii, iar a este cifra sutelor și a sutelor de mii.

a) Să se arate că N este produsul numărului întreg abc printr-un număr întreg k. Să se deducă următoarele:

α) N este divizibil prin 7, prin 11 și prin 13 ; β) N nu poate fi patrat perfect ;

b) Să se determine N pentru următoarele două condiții simultane: α) N este divizibil prin 5 ; β) întregul $\overline{bc}$ este dublul lui a. Să se descompună numărul astfel obținut în produs de factori primi.

Bacalaureat, Franța, 1963

6699. Se dă un triunghi oarecare ABC. Fie M un punct mobil pe dreapta BC, iar MN (N pe AB) și MP (P pe AC) două drepte care rămîn paralele cu ele însele. Se cere locul geometric al ortocentrului, al centrului cercului circumscris și al centrului de greutate ale triunghiului ANP.

Petre Liviu, profesor Tîrgoviște

6700. Să se arate că dacă a, b, c sînt numere reale pozitive oarecare iar x, y, z numere reale, avem :

$$\sum [a(1+yz)\sqrt{1+x^2}] \leqslant (a+b+c)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}\,.$$

C. Ionescu-Țiu

6701. Se dau trei puncte a, b, c pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi și se notează α, β, γ intersecțiile dreptelor Bb, Cc ; Cc, Aa ; Aa, Bb. Dacă dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente atunci și Aa, Bb, Cc sînt concurente sau a, b, c sînt colineare.

Adrian Chisăliță, student Cluj

6702. Să se arate că dacă $|a|>1$ avem :

$$1+\frac{3}{a}+\frac{6}{a^2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{a^{n-1}}=\frac{a}{(a-1)^3}$$

* * *

6703. Se consideră un cerc oarecare O și un diametru fix AB al aceluiași cerc. O dreaptă variabilă (Δ) paralelă cu AB, taie cercul în punc-

tele M și N. Fie P proiecția lui N pe AB și Q simetricul lui P față de punctul A. Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului MQ.

C. Săndulache, profesor Negrești Iași

6704. În șirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... în care fiecare termen este egal cu suma celor doi termeni precedenți, să se arate că trei termeni consecutivi sînt totdeauna primi între ei, și există patru termeni consecutivi, astfel că nici unul nu este prim absolut. Generalizare pentru n termeni consecutivi.

C. Ionescu-Țiu

6705. Se dă cercul (O) și pe el un punct mobil M și un punct fix A. Se consideră cercul de diametru OM (de centru O_1). Să se afle ecuația locului geometric al mijlocului segmentului determinat de cercul (O_1) pe polara punctului A față de acest cerc, atunci cînd punctul M parcurge cercul (O). Să se determine axa de simetrie a curbei — loc geometric și să se calculeze lungimea axei de simetrie, limitată de curbă.

Dodu Marin, student București

6706. Să se calculeze: $\lim_{x \to 2} A^a$, unde $A = \sin \frac{\pi x}{4}$ și

$a = \dfrac{-8}{(x - \sqrt[3]{12x - 16})\pi}$ fără a folosi derivata.

Traian Ionescu, profesor Brăila

6707. Să se arate că:

$$(T_0 + T_1 + \ldots + T_{n-1} + T_n) \sin^2 x \cos^2 x = T_1 - T_{n+2}$$

unde $T_n = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$.

Pîrșan Liviu, student matematici București

6708. Printre parabolele (P) de ecuație $y = ax^2 + bx + c$ se consideră cele ce sînt tangente la dreapta (D) de ecuație $x - y + 2 = 0$ în punctul A de abscisă $+1$.

a) Să se demonstreze că ecuația acestor parabole (P) se poate scrie $y = a(x-1)^2 + x + 2$;

b) Să se găsească o relație independentă de a, verificată de coordonatele x_v și y_v ale vîrfului V, al unei parabole (P) și să se precizeze locul geometric al acestor vîrfuri;

c) Pentru care valori ale lui a aceste parabole taie axa xx' în două puncte M' și M''; să se discute în funcție de valorile lui a, semnele abscișelor x' și x'' ale punctelor M' și M'';

d) Să se arate că dacă a variază, M' și M'' rămîn conjugate armonic în raport cu punctele $E(-5, 0)$ și $F(+1, 0)$.

6709. Aplicînd formula creșterilor finite funcției $f(x) = \ln x$ să se demonstreze că

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

unde n este un întreg pozitiv și apoi să se arate că

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

tinde către $+\infty$ cînd n crește nemărginit.

Bacalaureat Pondichéry, iunie, 1963

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *

E : 2248. Un atelier de croitorie a primit 3 baloturi de stofă. În primul balot erau cu 10 m mai puțin decît în al doilea și cu 6 m mai mult decît în al treilea. În total s-au primit 88 m.

Să se afle cîți metri se aflau în fiecare balot.

Nelu Dobre, Buzău

E : 2249. Greutatea totală a trei soluții de acid sulfuric este de $1819\frac{1}{20}$ kg. Soluția a doua conține cu $66\frac{2}{3}$ kg acid sulfuric mai mult decît prima soluție, iar a treia cu $85\frac{5}{7}$ kg mai mult decît a doua soluție. Știind că toate soluțiile au aceiași cantitate de apă, se cere să se afle : a) greutatea fiecărei soluții ; b) concentrația fiecărei soluții ținînd seama că soluția a doua conține de patru ori mai multă apă decît acid sulfuric.

Gh. A. Chiței, Deva

E : 2250. Să se găsească o fracție a/b egală cu 4/7 astfel ca produsul termenilor săi să fie 8092.

* * *

*) V (E : 2248, 2249, 2250, 2251) ; VI (E : 2252, 2253, 2254) ; VII (2255, 2256, 2257, 2258, 2259) ; VIII (2260, 2261, 2262, 2263, 2264). Soluțiile se primesc pînă la 30 aprilie 1965).

E : 2251. Doi motocicliști care au plecat simultan dintr-un oraș pentru a se plimba, se întorc la aceiași oră în oraș, după ce au străbătut distanțe egale. Pe drum s-au oprit să se odihnească, astfel încît : primul a mers de două ori mai mult decît s-a odihnit al doilea, iar al doilea a mers de trei ori decît s-a odihnit primul. Care motociclist a mers cu o viteză mai mare ?

(Wissen und Leben, 12/1963)

E : 2252. Sarcina totală pe care o poate duce motorul autocamionului Bucegi S.R.-113 produs la uzinele Steagul Roșu din Brașov este de 14,6 tf și reprezintă sarcina utilă, greutatea proprie și greutatea unei remorci pline. Să se determine valorile componentelor sarcinii totale, știind că greutatea proprie reprezintă 72% din sarcina utilă, iar remorca plină cîntărește cu 2 ,4 t mai mult decît greutatea proprie.

Gh. I. Căpitan, profesor, Anina

E : 2253. Suma a două numere este 15 390 ; primul număr are o singură cifră, al doilea cinci cifre. Așezînd primul număr în fața celui de-al doilea obținem un număr egal cu cvadruplul numărului pe care-l formăm așezînd al doilea număr în fața primului. Care sînt aceste numere ?

(Wissen und Leben, 4/1963)

E : 2254. La un spectacol se vînd 600 bilete de 4 lei și de 7 lei. Costul biletelor de 4 lei depășește costul biletelor de 7 lei cu 200 lei. Dacă biletele ar fi de o singură categorie, cu ce preț ar trebui să se vîndă pentru a se încasa aceiași sumă.

Grigorescu D. Nicolae, Hîrșova

E : 2255. Trei tractoare de la G.A.S. Buzău au arat într-o săptămînă terenuri diferite. Să se afle norma pe zi a fiecărui tractorist, știind că suprafețele arate de fiecare tractorist într-o săptămînă se raportează între ele ca $7^1/_2 : 8^1/_4 : 9$ și că al treilea tractorist a lucrat pe zi cu $1^1/_2$ ha mai mult decît primul tractorist.

Gh. V. Nistor, Buzău

E : 2256. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Fiecare latură a triunghiului se împarte în cîte trei părți egale. Punctele de diviziune se notează începînd din A ; C_1 și C_2 pe latura AB ; A_1 și A_2 pe latura BC ; B_1 și B_2 pe latura CA. a) Să se arate că laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sînt perpendiculare pe laturile triughiului ABC ; b) Să se calculeze înălțimile triunghiului $A_1B_1C_1$ cunoscînd latura l a triunghiului ABC ; c) Să se arate că înălțimile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ au același punct de concurență.

D. Mihalașcu, profesor Pitești

E : 2257. În cercul de rază $R = 10$ cm se prelungește diametrul AB cu segmentul $BC = R$. Din punctul C se duce tangenta CD care întîlnește în punctul E tangenta la cerc dusă în punctul A. Se cere

a) Unghiul E, b) Aria patrulaterului $AODE$, c) Să se arate că $OD \cdot AC = AE \cdot DC$.

Gh. Nistor, Buzău

E : 2258. Un muncitor, împreună cu soția sa, cîștigau lunar suma de lei 2250. Știind că salariile lor erau în raport de 7/8 și că din iunie 1964 salariile lor vor crește : al soțului cu 8%, iar al soției cu 12%, să se afle noul raport al salariilor lor.

Nelu I. Dobre, Merei, Buzău

E : 2259. Suma a două numere este 185, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 800. Să se afle cele două numere.

* * *

E : 2260. Să se găsească fracția a cărei mărime nu se schimbă cînd scădem 14 din numărător și 16 din numitor, știind că c.m.m.m.c. al termenilor acestei fracții este 1064.

I. Velescu, Pitești

E : 2261. Să se arate că :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$$

C. Dumitriu, Focșani

E : 2262. Se dau două vase A și B ; în vasul A se află o anumită cantitate de apă și în vasul V se află o anumită cantitate de vin. Din vasul A se ia o cantitate C de apă și se toarnă în vasul V și se amestecă. Apoi, se ia o aceiași cantitate C din amestecul din vasul V și se toarnă în vasul A. Să se arate că în vasul A se află atîta vin cîtă apă se află în vasul V.

Petre Simon, Tg. Mureș

E : 2263. Să se arate că :

$$\frac{2a^3 + 2a^2 - 4a}{2a^2 + 2a} - \frac{4a}{2a+2} = a - 2$$

B. Baeră, profesor, Păunești

E : 2264. O gospodărie agricolă colectivă a obținut în anii 1962 și 1963 la un loc, g tone grîu și p tone porumb. În 1962 a obținut de $n/2$ ori mai mult grîu decît porumb, iar în 1963 de $n/4$ ori mai mult porumb decît grîu. Cîte tone de grîu și porumb a obținut în 1962 ?

Cojocaru Ion, student Craiova

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții bune primite pînă la 25 septembrie 1964 (urmare)

BUCUREȘTI. Absolvenții : Anca I. Tănase (6375, 88, 89, 403, 05, 08, 19, 22, 24, 28, 36, 37), Constantin Radu Șerban (6358, 71, 81, 309, 11, 17, 18, 50, 58, 70), Dragu Alin (6308—18, 24, 30, 38, 44, 45, 56—59, 65, 67—71, 88), Pătrășcanu Dumitru (6356—58, 600, 12—14, 19, 24, 28, 29, 32, 39, 504, 06, 07, 10, 12, 14—16).

Medic Florescu Dumitru (6314, 17, 38, 44, 45; E: 2137, 41, 43, 44, 48, 49), Mihail Vasile (6208—10, 12, 13, 15, 17, 19, 29, 36, 42—44, 54, 56).

Studenți : Georgescu George (6208—21, 23—27, 32, 34—43, 46—51, 54, 57—65, 67, 69, 71—77, 81, 82, 85, 87, 89, 90, 99, 301, 05, 08—23, 40, 42, 44, 45, 56—73, 75, 76, 78, 79, 82, 85, 89, 402), Morgenstern Schoel (6309—14, 17—19, 45, 56, 59, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 409, 13, 41).

Șc. 8 ani nr. 26. cl. VII. Popescu T. Eugeniu (E: 2136, 38, 39, 41, 45, 46, 51, 52), Popescu T. Vladimir (E: 2153, 57—59, 61, 63—66).

Șc. 8 ani nr. 50. cl. VII. Viclea Lovin (E: 2136, 38, 46, 57, 58, 64, 71, 73).

Șc. 8 ani nr. 71. cl. VII. Mahalnischi Andrei (E: 2123, 30, 33, 36, 37, 46, 48, 52), Vasiliu Alexandru (E: 2136—38, 46—48, 51, 52).

Șc. 8 ani nr. 95. cl. VIII. Tiner Ernest (E: 2153—68; 6356, 70, 93, 400).

Șc. 8 ani nr. 114. cl. VIII. Mănescu Antoaneta (E: 2123—25, 27, 30, 33, 35, 36, 38, 46).

Șc. 8 ani nr. 116. cl. VIII. Becheru Tatiana (E: 2123, 29, 30, 36, 38, 49, 54).

Șc. 8 ani nr. 146. cl. VII. Atanasiu Traian (E: 2136, 38, 46, 52, 59, 61, 63, 64, 70), Bădescu Smaranda (E: 2156, 57, 62, 63, 65, 66, 68—71, 73).

Șc. 8 ani nr. 166. cl. VI, Cernescu Marina (2146—48, 51, 53, 56—59, 62).

Ș. m. 1. cl. VIII. Culinski Maria (E: 2143, 48, 49, 54, 55, 60; 6356, 57, 70, 89). Cl. X. Munteanu Mariana (6308, 14, 16, 29, 30, 38, 44, 45, 56—60).

Ș. m. 2. cl. X. Dimitriu Sorin (6357, 58, 60, 61, 63, 71—73, 75, 99).

Ș. m. 3. cl. V. Șerbu Alina (E: 2136, 38, 47, 53, 58, 59, 65).

Ș. m. 5. cl. VIII. Manolache Nicolae (E: 2136, 37, 40, 44, 50, 53, 57, 61, 63, 67, 69, 70, 72—75, 77, 79—83; 6310, 28, 33, 37, 38, 45, 56, 58, 59, 62, 67, 68, 70, 71, 74, 75, 89, 93, 400, 18, 20, 24, 29), Marinescu Ruxandra (E: 2123, 25, 26, 29, 30, 36, 38, 43, 46—48, 51, 52).

Ș. m. 6. cl. VII. Weiner Irina (E: 2136—38, 52, 53, 56—59, 64).

Ș. m. 7. cl. VII. Mateescu Alexandru (E: 2136, 38, 46, 47, 51, 53, 58, 59, 61, 63—65, 69, 71, 73, 79, 82, 83, 6310, 28, 37, 45, 56, 57, 62, 68, 70, 71). Nichita Anca (E: 2158, 59, 61, 62, 64, 71, 82, 92, 93, 95), Redlinger Daria (E: 2136, 38, 47, 48, 52, 53, 61, 68).

Ș. m. 8. cl. VII. Cinteza Mircea (E: 2139—41, 46—48, 51—54, 56—59, 61, 62, 64—66, 69—73, 79, 82).

Ș. m. 10. cl. VI. Corici Ion Cezar (E: 2146, 47, 51—53, 56—59, 61—66, 68), Gafița Gabriel (E: 2136, 38, 53, 57, 58, 69, 82). Sl. IX. Cleja Sanda (6314, 16, 30, 38, 45, 56, 59, 60, 70, 88, 93). Cl. XI. *Radu Luminița* 6308, 12, 14, 16, 17, 29, 33, 37, 40, 45, 56, 60, 61, 65—67, 70, 72, 73, 76, 86, 94, 99, 405, 09, 16, 24, 27, 28, 44, 46, 57, 59, 61, 63, 66, 67).

Ș. m. 11. cl. VIII. Pascaru Aurel (E: 2125, 26, 29, 31, 32, 34, 37, 41, 44, 49, 51—55, 60—63, 67; 6308, 10, 12, 14, 44, 56, 70, 89). Cl. IX. Bădescu Constantin (E: 2137, 43, 44, 49, 50, 55, 67; 6308, 14, 30, 44, 56, 68, 70—73, 88, 89, 93, 98). Cl. X. *Tonceanu Dan* (6309, 13, 18, 19, 25, 27—29, 38, 41, 46, 50, 53, 57—61, 68, 74, 77, 79, 81, 83, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 99, 405, 09—12, 26, 28, 31, 34, 41), Vasiliu Șerban (6314, 16, 22, 25, 28, 30, 38, 40, 44, 45, 56, 58, 59, 67, 70, 72, 75, 76, 82, 88, 89, 90, 98, 400). Cl. XI. Bunea Corneliu (6356, 57, 59, 66, 70, 71, 73, 74, 89, 93, 400, 57, 61).

Ș. m. 15. cl. XI. *Flondor Paul* (6389, 403, 05—16, 18, 20—22, 24, 28, 31, 32,

35—40, 42—46, 48, 49, 51—54, 56, 58—67, 70, 74—76, 81, 82, 84, 86, 92, 95).

Ş. m. 16. cl. X. Dimitriu Şerban (6314, 20, 22, 23, 25, 37, 44, 48, 56—58, 65, 67, 68).

Ş. m. 17. cl. IX. Suciu Paul (6308, 10, 14, 16, 25, 33, 38, 44—46, 68, 89). Cl. X. *Botez Dan* (6219, 36, 38, 41, 57—60, 67, 70—75, 77, 80, 89, 92, 94, 308—12, 14, 16—18, 22, 23, 29, 30, 40, 44, 45, 56—62).

Ş. m. 20. cl. X. *Herling Mihail* (6309, 13, 15, 17, 20, 26, 56, 59, 60, 65—68, 70—73, 75, 76, 80, 82, 88—90, 93, 98, 406, 08, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 24, 31). Cl. XI. Grădineanu Radu (6367—69, 450, 510, 15, 19, 22, 23, 26).

Ş. m. 21. cl. IX. *Voiculescu Dan* (6402, 09, 10, 16—20, 24, 26—28, 31, 33, 36, 41, 43, 46, 48, 49, 56, 59, 61, 66—69, 71, 72, 77, 81, 82, 84, 87—89, 92, 93, 97—99).

Ş. m. 22. cl. VIII. Cristoloveanu Sorin (E: 2155, 60—63, 67, 68, 71, 77—81). Cl. IX. Moţoi Marin (6308, 10, 12, 14, 16, 19, 25, 29, 30, 38, 44, 45), Zamfirescu I. Cristina (6308—10, 12, 14, 16, 29, 37, 45). Cl. X. Zainea Eugen (6308, 45, 56—59, 68, 70, 72, 73, 88, 420).

Ş. m. 23. cl. IX. Băluţă Tudor (E: 2137, 43, 54, 60, 67; 6338, 44, 45, 56, 59, 70, 72, 74, 75, 93). Cl. X. Mihai Constantin (6308, 12, 14, 16, 17, 28, 38, 45, 66, 68, 70, 72, 73, 86, 93), Zaharia Dragoş (6308, 14, 56, 59, 60, 66, 68, 71—73). Cl. XI. Atanasescu Gabriela (6308, 10—12, 14, 16, 17, 20, 37, 45, 77, 409, 11), Niculescu Lucian (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 30, 37, 38, 45, 59, 66, 71, 73, 74, 77, 86, 89, 93), *Rădulescu Valentin* (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 27—30, 33, 37, 38, 40, 44, 45, 54, 56—58, 60—62, 65—68, 70—75, 77, 86, 87, 90, 93, 94, 400, 05, 09, 11, 16, 22, 23, 28, 36, 41).

Ş. m. 26. cl. V. Barbu Ştefan (E: 2153, 58, 59, 65, 69, 71, 73, 79, 82, 91).

Ş. m. 28. cl. VII. Năstase Dan (E: 2136, 38, 56, 58, 64, 66, 73, 82), *Văleanu Vladimir* (E: 2136, 38, 39, 43, 46—48, 51—55, 57—73, 79, 81—83; 6314, 57, 57, 70, 71, 74, 89). Cl. VIII. Vineşiu Dan (E: 2154, 55, 61—63, 68; 6389, 70). Cl. XI. Benedict George (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 45, 56, 62, 67, 77).

Ş. m. 32. cl. VI. Popovici Liviu (E: 2123, 25, 30, 33, 36, 38, 46—48, 53, 57, 58, 62, 64).

Ş. m. 36. cl. V. Logofătu C. Maria Anca (E: 2151, 61, 62, 66, 69—73, 82). Cl. VI. Porceanu Cornel (E: 2130, 33, 36, 38, 46—48, 52, 58). Cl. VIII. *Logofătu Bogdan* (6308, 14, 16, 17, 28, 29, 45, 56—60, 62, 67, 68, 70—73, 76, 89; E: 2136—39, 43, 44, 46, 47, 51—56, 59—68).

BUHUŞI. Absolvent Bucur Gheorghe (6320, 30, 44, 48, 57, 65—75, 86, 93).

BUJOR (Galaţi). Ş. m. cl. XI. Modiga Ochiţa (6308, 10, 14, 16, 17, 45, 57, 58, 60, 66, 67, 70—73, 75, 89, 93, 424).

BUZĂU. *Ş. m. 1.* cl. IX. Marinescu Marian (6310, 12, 14, 19, 28, 29, 44, 57, 59, 89, 98, 418, 31). Cl. X. *Filipoiu Alexandru* (6323, 37, 54—62, 65—77, 82, 86—90, 93—95, 98, 99, 405, 16, 20, 21, 24, 25, 27, 28). Rădulescu T. Ovidiu (6308, 10, 12, 16, 17, 20, 40, 44, 56, 67, 68, 70, 72, 73, 86, 93, 416, 20, 24, 28). Cl. XI. Cîrlan D. Florica (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 30, 33, 40, 44, 45, 56, 65—68, 70, 72, 73, 86). Roşoiu Emil (6330, 38, 63, 40, 45, 57, 58, 67, 70, 71, 73, 93).

Ş. m. 2. cl. VII. Constantin Nicolae (E: 2147, 48, 58, 61, 63, 64, 66).

CARACAL. Ş. m. 1 cl. VIII. Marin St. Mihai (E: 2146—48, 51, 58—62; 6308, 89).

CARANSEBEŞ. Ş. m. 1 cl. VIII. Budrugeac P. (E: 2154, 60—63, 67, 68, 74, 79, 83; 6356, 70, 74, 424), Geană Nistor (E: 2143, 46, 54, 55, 58—60, 62, 67, 68, 77, 79, 83), Mura Ion (E: 2136, 52, 55, 57, 59, 61, 67, 68—75, 83, 6322, 44, 45, 56, 59, 67, 68, 70, 77, 82, 98, 424, 28, 36, 29, 31, 41. Spaia Elena (E: 2151, 67, 71, 74, 75, 79, 80, 81, 83; 6356). Cl. XI. *Bena Dorin* (6319, 27, 29, 34, 38, 40, 41, 50, 54, 61, 63, 68, 71, 78, 81, 82, 90, 93—95, 98, 403, 04, 10, 12, 16, 18, 20, 23, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 36, 37, 42), Janea Aurel (6322, 44, 45, 56, 61, 62, 68, 75—77, 82, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 406, 16, 21, 23, 24, 28, 41, 59, 61—63, 65, 67, 86, 89, 92, 93), Man Carol (6330, 42, 77, 405, 09, 20, 24, 28, 41, 49, 59, 61—63, 69, 92).

Ş. m. 2 cl. X. Dugan Doru (6310, 14, 17, 22, 33, 45, 56, 70, 73, 89, 420, 24). Pries Ion (6308, 10, 14, 16, 28, 29, 38, 41, 56, 57). Cl. XI. Fiat Grigore (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 28, 30, 44).

CĂLĂRAŞI. Ş. m. 1 cl. VIII. Vasile Eugen (E: 2126, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 43, 44, 49, 51, 54, 55, 60, 61, 63, 67; 6344, 56—58, 66, 67, 70, 72, 73, 89, 400), Vişan Justinian (E: 2143, 49, 54, 67; 6357, 58, 70, 89). Cl. X. Ştefănescu Ştefan (6256—60, 67, 70, 72, 74—76, 82, 89, 90, 93, 420, 24, 31).

CĂLINEŞTI — Olt. Şc. 8 ani cl. VIII. Rotaru Dan (E: 2143, 61—63, 67, 68; 6271, 358, 70, 72, 74, 89).

CHIŞINEU — Criş. Ş. m. cl. X. Mara Petru (6308, 10, 12, 14, 16, 30, 38, 44, 45, 70, 72, 73).

CIUTUREŞTI — Bacău. Absolvent Obreja Petru (6313, 18, 34, 71, 403, 04, 09—12, 18, 20, 22, 24, 28, 36, 38, 41).

CIMPIA TURZII. Absolvent Nemeş Flori (6356—59, 65—72, 75, 93, 400).

Ş. m. cl. VIII. Cîmpian Gheorghe (E: 2153, 56, 58, 59, 61—66, 68—71, 72, 79, 82).

CIMPINA. Ş. m. 1 cl. VIII. Alexandriu Doru (E: 2171, 74, 75, 77—80, 81, 83; 6357, 66, 68, 92, 400, 18, 20, 21, 24, 28), Stoian Luminiţa (E: 2143, 54, 55, 60—62; 6356, 70), Văcăroiu Ioana (E: 2155, 68, 71, 79, 80, 83; 6345, 89, 70). Cl. XI. Dedu Gh. Marcel (6308, 10, 12, 16, 17, 45, 56, 70, 89, 93, 21, 24), Petre Aristide (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 37, 45, 57, 59, 67, 70, 72, 75).

CIMPULUNG MOLDOVENESC. Ş. m. cl. VIII. Schärf Solomon (E: 2123—25, 29, 30, 33, 34, 36, 38, 39).

Liceul militar cl. X. Mototolea A. Fănică (6356, 59, 60, 67, 68, 70—73, 88, 89, 93). Cl. XI. Mascan Marius (6308—12, 14, 16, 17, 20, 23, 28, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 44, 45, 57, 59, 65, 67, 68, 70, 72—75, 77, 86, 89, 90, 93, 420, 28).

CLUJ. Absolvenţi: *Călugăreanu D. Grigore* (6263, 69, 85, 91, 92, 319, 20, 22, 23, 43, 54, 56—59, 62, 63, 65, 67—73, 75—78, 81, 83, 86, 88, 89, 93—95, 98, 400, 04, 05, 09—12, 40), Ferencz Janos (6308—11, 14, 16—18, 30, 36, 42, 45, 95, 400).

Ş. m. N. Bălcescu cl. VIII. Damian Dorin (E: 2147, 48, 51, 54, 55, 60—63, 67, 68; 6325, 56, 70), Ionescu Marian (E: 2154, 61—63, 79, 81, 83), Lazăr Aurel (E: 2154, 55, 60—63, 67, 68; 6356, 58), Rusu Radu (E: 2163, 64, 71, 79, 82, 85, 92), Stoian Daniela (E: 2171, 75, 79—81, 83; 6358), Teuşan Ovidiu (E: 2161, 63, 65, 68, 69, 71, 79, 82), Tudoran Tudor (E: 2136, 38, 48, 53, 59, 69, 79, 82). Cl. X. Palade Constantin (6308, 10, 14, 17, 56, 57, 70—74), Trif Damian (6356, 58—60, 67, 68, 70—73, 75, 88, 89, 92, 99). Cl. XI. Perl Toma (6356—62, 65—68, 70—77, 86, 89, 90, 92, 98, 400, 05, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 41, 44, 45, 48, 49, 54—56, 58—63, 67, 75, 82, 92, 97).

Ş. m. Emil Racoviţă cl. VIII. Lascu Gheorghe (E: 2153, 56, 58, 59, 61, 62, 64—66, 69—71, 73, 76, 79, 82). Cl. XI. Mild Cornel (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20—23, 26, 30, 31, 33, 38, 40, 42, 44, 45, 58, 59, 61, 62, 65, 68, 70, 73, 75, 89).

Ş. m. Gh. Bariţiu cl. VII. Bărbuceanu Lucia (E: 2136, 38, 39, 48, 53, 57, 63, 64), Bicsikovzki Elisabeta (E: 2136, 38, 39, 48, 53, 57, 63, 64). Cl. VIII. Gatt Marieta (E: 2161—63, 68, 71, 75, 79, 80, 83; 6328), Sasu Ioan (E: 2143, 48, 51, 54, 60—63, 67, 68). Cl. IX. Grigore Corneliu (6357, 58, 66, 68, 70—75, 89; E: 2154, 55, 60, 67).

Ş. m. de muzică cl. IX. *Farkaş Petru* (6308, 15, 19, 20, 22, 23, 28, 30, 38, 40, 44, 45, 55—60, 62, 65—68, 70—77, 82, 86, 88—90, 93, 98, 400).

COMĂNEŞTI — Bacău. Absolvent Pătraşcu Nicolae (6310, 11, 14, 17, 18, 30, 32, 34, 45, 54, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 86, 89, 93, 94, 409—12).

CONSTANŢA. Absolvent Luca N. Ion (6308—12, 14—18, 23, 25, 29, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 44, 45, 57, 59, 60, 65—73, 75—77, 81, 86, 88—90, 93, 98). Şc. 8 ani cl. VIII. Perşoi Radu (E: 2136, 42, 47, 51, 69, 70, 71, 82). Ş. m. 1 cl. VIII. Chiriac Călin (E: 2137, 41, 44, 48—51, 61; 6328). Cl. X. Prunişoară Dan (6308, 10—12, 14, 17, 45, 56, 58, 67—70, 72, 73, 86, 89), Văetuş Anca (6308, 09, 11, 12, 16, 17, 23, 25, 29, 30, 37, 40, 42, 46 57, 66, 81, 414, 16, 18—20, 22, 24, 26, 28, 36). Cl. XI. Neagu Viorel (6356—60, 66—68, 70, 72, 73, 77, 86, 89, 424, 31).

Ş. m. 2 cl. VIII. Căruntu George (E: 2154, 61—63, 68, 71, 79, 83), Fetica Doina (E: 2136—41, 44).

CORABIA. Ş. m. 1 cl. VIII. Florescu Veronica (E: 2141, 46, 48, 64, 71, 79, 83), Preda Tatiana (E: 2136, 38, 52, 54, 58, 59, 60, 63, 64). Cl. IX. Filip Nicolae (E: 2143, 74, 83; 6357, 66, 70, 72, 73, 80, 93, 424).

COSTEŞTI — Argeş. Ş. m. 1 cl. VIII. Dragomir Aurel (E: 2184, 87, 91, 93, 97, 99, 201; 6459—61), Răducu Adrian (E: 2136, 38, 46, 48, 52, 58, 59, 63). Cl. IX. Negurescu N. (6308, 10, 12, 14, 16, 37, 56, 66, 68, 70, 72, 75, 89, 93). Cl. X. *Depărăţeanu Dan* (6308—12, 14, 16—18, 20, 23, 28, 30, 37, 38, 40, 42, 44, 45, 50, 56—60, 62, 65—76, 82, 86).

COVNIC (Maramureş). Ş. m. cl. VIII. Moldovan Ana (E: 2125, 26, 29, 34, 43, 44, 49, 50).

CRAIOVA. Ş. m. 1 cl. VIII. Nica Radu (E: 2169—71, 73, 75, 79, 82), *Pătra Cristian* (E: 2136, 38, 43, 46—49, 51—55, 57—64, 67—71, 73—75, 79, 82; 6356, 70, 72, 320, 24), Sandu Viorel (E: 2154, 55, 60—64, 74, 83; 6356, 70). Cl. IX. Hamzescu Doina (6316, 30, 45, 56, 59, 67, 70—72, 74, 88, 424), Zamfir Nicolae (E: 2154, 55, 83; 6356—58, 70, 75, 89, 420). Cl. X. Popescu Felicia (6309, 11, 18, 19, 40, 42, 43, 46, 56—59, 61, 62, 65—75, 77, 81, 88, 89, 93, 98, 400). Cl. XI. Popescu Virgil (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 56, 57, 63, 400), Sandu Darius (6309, 18, 28, 30, 38).

Ş. m. 2 cl. VIII. Andrei V. Aurel (E: 2141, 44, 63, 71, 79; 6356, 67, 70, 75,

420), Croitoru Adrian (E: 2149, 54, 55, 60, 61, 63, 71, 79, 83, 89), Grosu Elena (E: 2154, 55, 58—61, 63, 65—68), Stănciulescu Ioan (E: 2130, 36, 38, 47, 51, 52, 54, 58—64, 68—73, 79, 6356, 57). Cl. IX. Daniliuc Maria (6356—60, 67, 70, 72, 75, 82, 89, 98—400), Popa Magdalena (6356, 57, 60, 66—68, 70—73, 89, 90, 93). Cl. X. Babarada Ion (6308, 10, 12, 14, 17, 45, 56—58, 70, 72, 73), Hotăranu Ion (6308, 12, 14, 16, 17, 44, 56, 70, 72, 73, 89, 420, 24), Petrescu Ion (6309, 22, 28, 30, 33, 40, 57, 58, 62, 67, 75, 90, 93, 400), Stănescu Constantin Titel (6320, 25—30, 33, 37, 38, 40, 42—47, 50, 53, 57—62, 65—79, 81, 82, 86, 88—90, 93—95, 99, 400). Cl. XI. *Cojocaru Mariana* (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 38, 40, 42, 44, 45, 56—58, 60, 62, 65—68, 70—75, 77, 86, 89, 93, 98, 405, 11, 16, 20, 24, 28, 31, 36, 41), Radu Aurelian (6357, 58, 60, 62, 65—67, 70, 72, 73, 89, 99, 421, 24, 31, 34), Staiculescu Elena (6308, 10, 12, 14, 17, 38, 44, 58, 62, 75, 77, 86).

Ş. m. 3 cl. VIII. Muscalagiu Nicolae (E: 2154, 55, 60, 64, 69, 70, 74, 75, 79, 83), Popescu Mădălina (E: 2161—63, 68, 71, 79, 83), Tănase Cezar (E: 2154, 55, 60—64, 74, 75, 79, 80, 83). Cl. XI. Ciuciu Doru (6308, 14, 16, 17, 58, 59, 65—67, 68, 70—73, 86, 93). Cl. XI. Ghiţuleasa I. Dan (6310, 11, 24, 56, 67, 68, 70—73, 75, 86, 93). Cl. XI. Giurcă Octavian (6308, 14, 19, 29, 56, 68, 70, 71, 73, 75, 89), Panduru Gh. Ioan (6308, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 30, 33, 38, 44, 45, 65—73, 75, 86, 89, 93, 94, 400).

Ş. m. 4 cl. XI. Iordăchescu Anca (6308—12, 16—18, 38, 45).

Şc. pedagogică cl. VI. Ciulin Luminiţa (E: 2136, 38, 53, 59, 63, 69, 71, 73).

UGIR. Ş. m. cl. VIII. Buibaş Corina (E: 2129, 31, 32, 34, 37, 44—46, 50, 51; 6257, 58, 91, 328, 44).

CUMPĂNA (Dobrogea). Şc. 8 ani cl. VIII. Pruiu Anastase (E: 2123, 29, 30, 32, 34, 36—38; 6272).

CURTEA DE ARGEŞ. Ş. m. cl. VIII. Popescu C. Anca Iolanda (E: 2136, 38, 46, 51, 52, 58, 59, 61—63). Cl. X. Popa D. Valentin (6308, 16, 44, 45, 56, 57, 59, 60, 67, 70, 72, 89, 93). Cl. XI. Florescu Nicolae (6310, 12, 14, 16, 17, 28, 38, 45, 67, 70, 73, 86, 93).

CURTICI (Banat). Ş. m. cl. XI. Tonceanu Florica (6308, 14, 17, 38, 45, 56, 70, 72, 73, 86).

DĂBULENI (Oltenia). Ş. m. cl. XI. Popa Gh. Marin (6308, 12, 16, 17, 45, 56, 65, 67, 71, 75, 424, 28).

DEJ. Ş. m. 1 cl. X. Vasile Alexandru (6308, 12, 14, 16, 17, 30, 37, 38, 44, 45).

DRĂGĂNEŞTI — OLT. Ş. m. cl. VII. Dumitra Viorica-Angela (E: 2136—39, 48, 51, 71). Cl. IX. Durigu C. Mircea (E: 2143, 48, 51, 71, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 83; 6328, 38, 45, 418, 20, 24). Cl. XI. Niculcea D. Marin (6308, 14, 20, 30, 42, 56, 59, 66, 70, 72, 73, 75, 81, 86, 89, 90, 93, 400, 05, 20, 24).

DRĂGĂŞANI. Ş. m. cl. VIII. Popescu Mircea (E: 2124, 26, 29—34), Spînu Gheorghe (E: 2136, 38, 58, 59, 61, 64, 69, 71, 82).

DUMBRĂVENI. Ş. m. cl. X. Noveanu Nicodim (6316, 30, 45, 59, 67, 70—73, 93).

FĂRĂOANI (Bacău). Moldoveanu Leonida (6308—12, 14, 16—18, 23, 28, 30, 37, 38, 40, 44, 45).

FĂGĂRAŞ. Ş. m. 1 cl. X. Ortocol Gheorghe (6424, 31, 57—62, 82, 507, 10, 16, 19). Cl. XI. Grama Gheorghe (6308, 10—12, 16, 17, 45, 56, 58, 59, 62, 65, 67, 70—73, 93), Mare Octavian (6308, 14, 29, 57, 68, 70—74, 89).

FĂGET (Banat). Ş. m. cl. X. Petrescu Marius (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 44, 45, 56—59, 68, 70).

FELDRU (Cluj). Şc. 8 ani cl. VII. Marinescu Oltea (E: 2136, 38, 47, 56—59, 61, 63, 64, 68, 73, 79, 82).

FETEŞTI— Gară. Ş. m. cl. XI. Văcălău Ion (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 38, 45, 56, 67, 70—73, 75, 86, 93).

FILIAŞI (Oltenia). Ş. m. cl. VIII. Băluţă Constantin (E: 2154, 55, 60—63, 67, 68; 6356—60, 62, 67, 68, 70—76, 89, 400).

FOCŞANI. Ş. m. Alexandru Ion Cuza cl. VIII. Valet Florin (E: 2137, 48, 56, 57, 59, 68, 69, 82). Cl. XI. Scorţeanu Rodica (6356, 69, 66, 70, 71, 75, 86, 420, 24, 57, 59—62, 92).

GALAŢI. Şc. 8 ani nr. 7 cl. V. Iordan Magdalena (E: 2136, 38, 46, 48, 53, 58, 59).

Şc. 8 ani nr. 10 cl. VIII. Scăueru Lenuţa (E: 2153, 57, 61, 63, 70, 73, 79).

Şc. 8 ani nr. 23 cl. VII. Onu Costică (E: 2136, 38, 47, 69, 71, 73, 79, 82).

Şc. 8 ani nr. 24 cl. VI. Costiniuc Florin (E: 2146, 47, 52, 53, 58, 59, 69).

Şc. 8 ani nr. 26 cl. VII. Ionescu Fulger Mihai (E: 2124, 25, 44, 48—50, 52).

Ş. m. 1 cl. VIII. Rosenzweig Niky (E: 2143, 51, 54, 55, 60—62, 67), Cl. X. Andrei Viorel (6318, 22, 37, 56—62, 65—78, 81, 89, 90, 93, 405, 09—11, 13, 14, 16, 19—22, 24, 28, 31, 33, 41).

Ş. m. cl. IX. Eisenberg Ludwig (6356, 58, 67, 70, 72, 89, 424; E: 2154, 55, 60,

67, 74, 75, 83). Cl. X. Miron Sora (6308, 14, 16, 56, 58, 59, 67, 70, 73, 89). Cl. XI. Codreanu Rodica (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 26, 34, 40, 44, 45).

Ş. m. cl. VI. Anton Petrică (E: 2153, 57, 58, 64, 68, 69, 71, 82). Cl. XI. Ariton Constantin (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 45, 56, 58, 67, 70, 72, 89, 93).

Ş. m. 5 cl. VIII. Bejan Ortansa (E: 2143, 48, 51, 54, 55, 60—63, 67, 68, 79, 83; 6356, 70).

GĂIEŞTI (Argeş). Ş. m. cl. IX. Prodan Ion (6338, 45, 56, 57, 59, 60, 70, 72, 89, 93).

GĂTAIA (Banat). Ş. m. cl. XI. Petruţ Emilia (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 42, 59, 65, 70, 73).

GHERLA (Cluj). Ş. m. cl. IX. Irimescu Dorin (6308, 14, 16, 29, 37, 45, 56—60). Cl. XI. Roman Cornel (6310—12, 14, 16, 17, 20, 23, 30, 33, 37, 38, 42, 44, 45, 50, 56, 57, 60, 62, 67, 74).

GIURGIU. Şc. 8 ani cl. VII. Păun Rodica (E: 2136, 38, 47, 53, 59, 61, 63, 64, 66, 68, 69, 71, 82).

Ş. m. m. 1 cl. VIII. Soava C. Iuliana (E: 2136, 38, 54, 69, 70, 73; 6356), Ştirbu Rodica (E: 2154, 60, 75, 78, 80—84; 6420). Cl. IX. Burcea Claudia (E: 2136, 38, 43, 46, 48, 51—54, 56, 58—60; 6356, 70). Cl. X. Nicolae Ilie (6316, 20, 23, 37, 38, 42, 44, 56—58, 60—62, 65—68, 71, 72, 74, 75, 77, 81, 82, 86, 88, 93, 98, 99), Rada C. Mircea (6310—12, 19, 23, 28, 33, 37, 38, 46, 55, 57, 59—62, 66, 68, 69, 75, 76, 78, 82, 87—89, 93, 99 400, 03, 05, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 24, 28, 31). Cl. XI. Ivanov Ilie (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 30, 33, 38, 45, 56, 58, 60—62, 65—68, 70, 72, 86, 88, 89, 93, 400, 24, 31, 36), Măcăneaţă Miron (6312, 17, 30, 34, 56, 70, 86, 93, 94, 420), Oprea D. Ştefan (6308, 10—12, 14, 16, 17, 22, 23, 38, 45).

GURA HUMORULUI. Ş. m. cl. X. Adamiţă Constantin (6308, 10—12, 14, 16, 17, 28, 30, 38, 42, 45, 56—58, 66, 67, 70, 72, 88, 89, 93). Cl. XI. Prelici Carol (6308, 12, 14, 16, 17, 33, 38, 67, 68, 70, 71, 73—75, 93.

HALEŞ (Buzău). Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Dogaru Vasilica (E: 2153, 55, 59, 57, 61—64, 67, 69). Cl. VIII. Marinescu Maria (E: 2153—55, 59—65, 67, 69).

HAŢEG. Ş. m. cl. VIII. Berghean Ion (E: 2123—26, 29, 39, 32—34, 36—38, 43, 44, 46—49, 51—54, 57—64, 66, 67; 6257, 58, 67, 71, 72, 73, 75, 77, 308, 14, 16, 17, 45, 56, 58, 67, 68, 70, 72), Maftei Nicolae (E: 2136, 38, 46, 47, 48, 51—73, 79, 82; 6308, 14, 45, 56, 57, 70, 75). Cl. XI. Napcea Liviu (6338, 42, 45, 76, 77, 86, 88, 89, 93, 418, 20, 31).

HOREZU (Oltenia). Ş. m. cl. VIII. Munteanu I. Ion (E: 2153, 54—56, 59, 61; 6354, 56, 70). Cl. X. Buşe Marcu (6356, 57, 59, 60, 66—68, 70, 73—75, 89, 93).

HUNEDOARA. Ş. m. 1 cl. VIII. Drăghici George (E: 2147, 60, 67, 79, 80, 81, 83), Oprişa Doru (E: 2143, 59, 64, 69, 70, 72, 73, 82, 83; 6316, 89). Cl. X. Căpăţînă Octavian (6308, 09, 11, 14, 16, 17, 18, 44, 56—58, 65, 68—70, 72—74, 89, 424), Fazakas Iosif (6316, 38, 56, 57, 62, 68, 70—73, 75, 86).

HUŞI. Absolvent Chiriţoiu Neculai (6308, 10—12, 16—18, 30, 45, 54, 67, 69, 73, 93).

Ş. m. cl. X. Darie Viorel (6308, 14, 16, 45, 60, 67, 72—75, 93, 98).

IANCA (Galaţi). Ş. m. cl. VIII. Pătraşcu Lidia (E: 2092, 96, 98, 104, 09, 13, 18), Vlad Cristian (E: 2143, 48, 51, 54, 60, 61, 67, 68, 70). Cl. X. Tăbîrcă Virgil (6731, 39, 42, 44, 46, 83, 93, 209, 42, 43).

IAŞI. Şc. 8 ani nr. 7 cl. VII. Caufman Claudia (E: 2136, 38, 47, 48, 51, 58, 59, 61, 64, 68).

Şc. 8 ani nr. 12 cl. VI. Badragan Irina (E: 2136, 38, 47, 53, 57, 63, 64, 69).

Şc. medie 1, cl. VI. Mîrzanca Magda (E: 2156, 59, 61, 63—65), Mistreanu Gabriela (E: 2138, 46, 52, 56, 58, 61, 68, 69, 79, 82), Nistor Silviu (E: 2136, 38, 47, 53, 57, 61, 64), Pancu Costel (E: 2136, 38, 47, 53, 56, 69, 73, 82). Cl. VII. Amălinei Neculai (E: 2136, 38, 41, 43, 44, 46—48, 51), Mîrtz Puiu (E: 2153, 57, 59, 69—71, 76). Cl. X. Chiriac Iulian (6308, 14, 30, 38, 56, 57, 67, 70, 72—74, 88, 89, 93).

Ş.m. 2, cl. VII. Ocneanu Mihaela (E: 2136, 38, 39, 53, 61, 64). Cl. VIII. Mihailovici Manuela (E: 2139, 53, 54, 57—59, 62, 64, 69; 6389). Cl. XI. Alexandru Dimitrie (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 23, 30, 38, 42, 44, 45, 57—59, 65—68, 70—75, 86, 89, 94), Anghelescu Ioana (6264, 97, 301, 08, 09, 12, 13, 15, 17, 38, 42, 43), Segal Ghizi (6308, 10, 12, 16, 17, 20, 30, 44, 45, 67, 72, 73, 86).

Ş.m. 3, cl. V. Burlacu Călin (E: 2136, 38, 47, 53, 58, 59, 65, 69). Cl. IX. Aizicovici Sergiu (6310, 14, 16, 28, 30, 38, 44, 45, 56—58, 60, 70, 72—75, 82, 88—90, 93, 98, 400), Goraş Liviu (6314, 16, 28, 45, 56—59, 70, 72, 73, 89, 93), Popa I. Eugen (6393—95, 98, 400, 02—06, 08—14, 16, 18—22, 24—28, 34—37, 39——42).

Ş.m. 4, G. Ibrăileanu, cl. VIII. Benchea Nicolae (E: 2153, 57—59, 61—66, 68—

71, 73, 76, 79, 82), Sălceanu Angelica (E: 2168, 74, 75, 78, 80, 81, 83; 6393). Cl. X. Rucsăndescu Mioara (6308, 45, 68, 70, 71, 73—75, 93, 424). Cl. XI. Georgescu V. Marietta (6309—13, 16—18, 30—38, 42—45, 56, 58, 59, 65—67, 69—72, 88).

Ş.m. 7, Al. I. Cuza, cl. VIII. **Burduja Gheorghe** (E: 2136—38, 40, 43, 44, 46—49, 51—71, 73, 74, 79, 82, 83; 6314, 56——58, 66, 68, 70, 72—74, 420). Cl. IX. Burduja Mihai (6308, 14, 16, 38, 44, 45, 56, 57, 58, 60, 66—68, 70—75, 89, 420, 24), Lovinescu Cătălina (6310, 14, 16, 45, 56, 59, 60, 67, 70, 72, 75, 88, 89, 93). Cl. X. **Tobeanu Teodor** (6356—62, 65—67, 70—72, 75—78, 81, 82, 86, 88—90, 93—95, 98, 402, 03, 05, 09, 11, 16, 20—22, 24, 25, 27, 28, 31, 33, 34, 36, 41). Cl. XI. Florescu Liviu (6320, 21, 30, 33, 40, 41, 56—58, 60—62, 65, 67, 70).

INEU. Ş.m. cl. XI. Brîncovean Valeriu (6314, 20, 28, 38, 42, 44, 56, 62, 65, 67, 70, 73, 92, 424).

LATINU (Brăila). Şc. 8 ani cl. VII. Androne Aurora (E: 2080, 81, 84, 90, 96, 104, 20), Bujor Didina (E: 2136, 38, 46, 47, 51, 82, 83), Dima Ştefan (E: 2080, 81, 84, 90, 166, 04, 20, 36, 38, 46, 47, 51, 52, 69—71, 73, 79, 81—83).

LĂCRIŢA (Oltenia). Şc. 8 ani cl. VII. Andronescu Gabriela (E: 2136, 38, 56, 58, 64, 69, 73, 82).

LIPĂNEŞTI (Ploieşti). Ş.m. cl. VIII. Heroiu Gr. Vasile (E: 2092, 96, 97, 103, 13, 21, 29, 30).

LUGOJ. Ş.m. 1, cl. VII. Marcu S. Flavia (E: 2121, 23, 36, 58, 59, 69, 71). Cl. VIII. Daba Valerian (E: 2136—38, 43, 52, 54, 59, 60, 63, 67; 6370), Gerhard Wingert (E: 2123, 24, 29, 30, 36, 38, 46, 47, 51, 52, 54, 57—63, 67, 68), Lobodă Ana (E: 2129, 30, 34, 51, 54, 61, 67, 69, 70, 83), Neu Tiberiu (E: 2125, 29, 34, 36—38, 43, 44, 46, 51, 54, 59—63, 67, 69, 71, 83; 6370), Orbulov Petru (E: 2137, 49, 50, 55, 60, 62, 63, 67, 68, 71, 83; 6424). Cl. IX. Băcilă Dan (6356, 57, 59, 67, 70, 72, 88, 89, 93, 400, 20, 21, 24, 27, 57, 59, 60, 61, 82), Hărăguş Ştefan (6356—60, 62, 65—73, 75, 78, 79, 81, 86, 89, 93, 98, 400, 10, 14—16, 18, 22, 26, 28, 29, 34, 41, 57, 61, 63, 66, 92). Cl. X. Ambruş Mircea (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 23, 25, 28, 29, 30, 33, 37, 38, 42, 44, 45, 56—62, 65—68, 70, 72—76, 78, 81, 82, 86—90, 93—95, 97, 400). **Brânda Rodica** (6308—14, 16—18, 20, 25, 28, 38, 45, 56—59, 62, 65—75, 77, 84, 86, 88, 89, 93, 94, 404, 10—15, 19, 20, 28, 31, 38, 41, 42), Iacobescu Constantin (6356, 65, 70, 73, 410, 16, 20, 22, 24, 28, 41), **Jurcă Ion** (6309, 18—22, 25, 26, 28, 29, 34, 37, 38, 60, 65, 76, 77, 78, 81, 82, 87, 90, 94, 95, 405, 09—15, 18—20, 22, 24, 34, 41), Silaschi Ioan (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 23, 25, 32, 33, 37, 44, 45, 56—60, 67, 70, 72, 73, 75). Cl. XI. Iovănescu Ioan (6308, 10—12, 14, 16—18, 20, 22, 28, 30, 33, 34, 38, 42, 44, 45, 65, 69, 70, 72, 73, 75, 93).

LUPENI. Ş.m. cl. XI Popescu Dumitru (6308—11, 13, 16—19, 45).

MĂRĂŞEŞTI (Galaţi). Ş.m. cl. VIII. Apostol Ovidiu (E: 2125, 28, 29, 31, 43, 51, 52, 58, 71), Cazacu Mihail (E: 2141, 60, 71, 79, 6345, 56, 58, 70).

MIHAI BRAVUL (Galaţi). Absolvent Alexe D. Gheorghe (6314—17, 34, 38, 40, 42, 59, 67, 72—74, 86).

MOINEŞTI (Bacău). Ş.m. cl. VII. Vrînceanu Gabriela (E: 2123, 25, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 38, 46, 47, 51, 52). Cl. VIII. Ciocan Nicuşor (E: 2136, 38, 46—48, 51, 52).

MORENI (Ploieşti). Ş.m. cl. VI. Sabău Dan (E: 2136, 38, 46, 53, 56—58, 64, 66, 69—71, 73, 79). Cl. IX. Matei Ion (6308, 09, 11, 12, 14, 16, 17, 30, 37, 44, 45, 56—58, 66, 67, 70, 72, 73, 86, 89, 93, 400). Cl. XI. Matei C. Gheorghe (6308—12, 14, 16, 17, 30, 44, 45, 56, 58, 67).

NADRAG. Ş.m. cl XI. Petrescu Zorei (6330, 34, 37, 38, 40, 42, 44, 45, 56, 58, 67, 70, 72, 73, 90).

NĂSĂUD (Cluj). Absolvent Afrim Gheorghe (6308—12, 14, 16, 17, 38, 45, 67, 70, 73—75, 89), Marţian Ieronim (6309—11, 15, 18, 33, 44, 45, 59, 67, 69, 73, 93).

Ş.m. cl. VIII. Ceuca George (E: 2144, 54, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 79, 81, 83; 6316, 28, 45, 56—59, 67, 68, 70—73, 75, 89, 400, 28), Scurtu Vasile (E: 2154, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 78—81, 83; 6356—58, 70, 80, 93, 420), Văleanu Emil (E: 2143, 45, 51, 54, 60—63, 68; 6370, 72). Cl. XI. Pleş D. Gheorghe (6308—24, 27, 28, 30, 33, 38, 42—45, 56—59, 61—76, 81, 86, 88—90, 93, 97—400).

ORAŞUL Dr. PETRU GROZA (Crişana). Ş.m. cl. XI. Potlog Ion (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 44, 45, 56, 57, 66, 68, 70, 71, 73, 75).

ONEŞTI. Ş.m. 1, cl. XI. Şerban Nicolae (6328, 30, 34, 38, 44, 57, 62, 65, 72, 93, 94, 424).

ORADEA. Ş.m. 1, cl. X. **Memetea Ovidiu** (6308, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 23, 26, 30, 37, 42, 44, 56—62, 65, 67,

PREMIILE GAZETEI MATEMATICE SERIA B PE ANUL 1964

Pentru activitatea deosebită depusă de către evidențiații publicați în volumul al XV-lea (1964) al Gazetei matematce — seria B, se acordă următoarele premii și mențiuni.

PREMII

1. *Voiculescu Dan* (cl. VIII ș.m. 21 București)
2. *Popa I. Eugen* (cl. VIII ș.m. 3 Iași)
3. *Bena I. Dorin* (cl. X ș.m. 1 Caransebeș)
4. *Popovici Cornel* (cl. X ș.m. 1 Lugoj)
5. *Bîscă Octavian* (cl. X ș.m. 1 Craiova)
6. *Georgescu George* (cl. XI ș.m. 1 Craiova)
7. *Dăncilă Ioan* (cl. X ș.m. 3 Sibiu)
8. *Popescu Eleodor* (cl. X ș.m. 1 Tr. Severin)
9. *Crișan Victor* (cl. XI ș.m. 1 Aiud)
10. *Otopeanu Alexandra* (cl. VIII ș.m. 13 București)
11. *Lungulescu Bogdan* (cl. VIII ș.m. 13 București)
12. *Călugăreanu Grigore* (cl. X ș.m. 5 Cluj)
13. *Logofătu Bogdan* (cl. VIII ș.m. 36 București)
14. *Geleriu Dan* (cl. X ș.m. 3 Sibiu)
15. *Dragotă Georgel* (cl. X ș.m. 2 Craiova)
16. *Turculeț Demostene* (cl. X ș.m. Trușești)
17. *Ioniță Georgeta* (cl. VIII ș.m. 39 București)
18. *Spătaru Aurel* (cl. XI ș.m. Pucioasa)
19. *Luca Ion* (cl. XI ș.m. 4 Constanța)
20. *Brinda Rodica* (cl. X ș.m. 1 Lugoj)
21. *Filipoiu Alexandru* (cl. X ș.m. 1 Buzău)
22. *Mignea Arminius* (cl. VIII ș.m. 2 Ploiești)
23. *Manolache Nicolae* (cl. VIII ș.m. 5 București)
24. *Almer Dan* (cl. IX ș.m. 17 București)
25. *Chițescu Ion* (cl. X ș.m. 10 București)
26. *Boicescu Vlad* (cl. XI ș.m. 4 Craiova)
27. *Cristelecan Mihai* (cl. XI ș.m. 4 Tg. Mureș)
28. *Simplăceanu Virgil* (cl. X ș.m. Blaj)
29. *Orășanu Laurențiu* (cl. VIII ș.m. 2 Ploiești)
30. *Ursulescu Octavian* (cl. X ș.m. 11 București)
31. *Șerb Ioan* (cl. IX ș.m. 1 Lugoj)
32. *Covalciuc Valentin* (cl. X ș.m. 4 Ploiești)
33. *Coșuleț Dan* (cl. X ș.m. 3 Brașov)
34. *Sachelarie Dan* (cl. VIII ș.m. 4 Ploiești)
35. *Weinsten Jack* (cl. X ș.m. 2 Rădăuți)
36. *Spircu Tiberiu* (cl. IX ș.m. 4 Arad)
37. *Petru Emil* (cl. X ș.m. Hațeg)

MENȚIUNI

38. *Tănase Anca* (absolventă București)
39. *Penciu Mihai* (cl. X ș.m. Vaslui)
40. *Munteanu Mihai* (cl. X ș.m. 5 Brașov)

41. *Dumitrescu Marin* (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești)
42. *Ignea Silviu* (cl. X ș.m. 22 București)
43. *Radu Mircea* (cl. X ș.m. Giurgiu)
44. *Botez Dan* (cl. IX ș.m. 17 București)
45. *Stan Emil* (cl. IX ș.m. 2 Ploiești)
46. *Zăgan Dumitru* (cl. IX ș.m. 3 Sibiu)
47. *Trif Maria* (cl. XI ș.m. 2 Sibiu)
48. *Flondor Paul* (c. XI ș.m. 13 București)
49. *Gheorghiu* Doina (cl. IX ș.m. 1 Timișoara)
50. *Simion Gh.* (cl. IX ș.m. 1 Ploiești)
51. *Manolache Nicolae* (cl. VIII ș.m. 5 București)
52. *Enache Gheorghe* (cl. VII Tîrgoviște)
53. *Stănescu Dan* (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești)
54. *Ghițescu Mircea* (cl. XI liceul militar Breaza)
55. *Obreja Petru* (absolvent Secueni Bacău)
56. *Heilpern Andrei* (cl. X ș.m. 3 Cluj)
57. *Orlov Zinaida* (cl. X Petroșani)
58. *Maftei Eugen* (cl. X ș.m. Vaslui)
59. *Manasiu Dan* (cl. X ș.m. 25 București)
60. *Pavel C. Dumitru* (cl. XI ș.m. Pătîrlagele Ploiești)
61. *Ralescu Dan* (cl. VIII ș.m. 15 București)
62. *Tebeanu Teodor* (cl. X ș.m. 7 Iași)
63. *Martiniș Radu Ștefan* (cl. X ș.m. 3 Sibiu)
64. *Memetea Ovidiu* (cl. X ș.m. 1 Oradea)
65. *Mîrza Mihai* (cl. X Trușești)
66. *Arsene N. Ion* (cl. XI ș.m. 1 București)
67. *Niculescu Constantin* (cl. X ș.m. Tîrgoviște)
68. *Tonceanu Dan* (cl. X ș.m. 11 București)
69. *Andrei Viorel* (cl. X ș.m. 1 Galați)

Evidențiații de mai sus, premiați sau menționați ca rezolvitori de probleme în anul 1964, care nu ne-au trimis adresa lor exactă, sînt rugați să ne comunice pe o carte poștală adresa lor actuală, indicînd și numărul de ordine din prezenta listă a premiilor, pentru a li se trimite pachetul cu cărți sau reviste acordate ca premii.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Ploiești urmare)

Ș.m. 2, cl. VII. Stătescu Vivian (E: 2148, 58, 59, 61, 64, 68, 69, 71, 79, 82). Cl. VIII. Cojocaru Luminița (E: 2156, 57, 61—63, 66, 68—71, 73, 79, 83), Dumitrache Ion (E: 2136, 38, 45, 46, 48, 57—59, 63, 69, 79, 80, 83), Dumitru Andrei (6309, 14, 16, 45, 66; E: 2155, 60—62, 67, 68, 75, 83), Lupașcu Lavinia (E: 2156, 57, 61—63, 66, 68—71, 73, 79, 83), Mignea Armenius (6308, 10, 12, 14, 16, 22, 25, 29, 30, 33—35, 37, 38, 46, 56—58, 60, 62, 67, 68, 70—73, 75, 76, 82, 89, 90, 93, 98—400; E: 2137, 40, 41, 43, 44, 48—50, 52, 54, 55, 60—63, 67, 68), Spiridon Maria (6420, 24; E: 2154, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 75, 79, 83). Cl. IX. Dîmboviceanu Marinella (6314, 16, 20, 30, 44, 45, 56—60, 68, 72—74, 88, 89, 93, 98, 420, 24, 27; E: 2137, 43, 44, 49, 50, 55, 67, 74, 75, 77, 78, 81, 83), Georgescu Emma (6308, 14, 16, 56, 59, 60, 70, 93; E: 2143, 54, 55, 60, 67, 73, 83), Stan Emil (6313, 33, 37, 42, 44, 49, 50, 52—54, 56—60, 400, 02, 08, 09, 30, 32), Tănăsescu Cristina (6356, 58, 70, 72, 73, 75; E: 2143, 48, 49, 54, 60, 61). Cl. X. Georgescu Marius (6308—10, 14, 28—30, 38, 44, 45, 56—59, 66—68, 70—

74, 93, 99, 400; E: 2143, 44, 49, 54, 50, 67), Mazepa Lidia (6308, 14, 16, 30, 38, 44, 45, 56—59; E: 2137, 43, 44, 49), Spiridon Dănuț (6310, 17, 56, 57, 60, 66, 67, 70, 72, 75, 89, 424). Cl. XI. Radu Vasile (6363, 64, 82, 85, 91, 95—97, 99, 403, 04, 06, 07, 12—15, 18, 20, 22, 23, 25—27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 42).

Ș.m. 3, cl. VIII. Marinescu Cornel (6333, 44, 58, 400; E: 2153—55, 57, 59, 60, 64, 67).

Ș.m. 4, cl. VIII. Ionescu Elena (6308, 10, 14, 28, 45, 70, 73; E: 2137, 43—47, 51, 52, 54, 55, 61—63, 67), Teodor Elena (6310, 14, 16; E: 2137, 43, 44, 51, 54, 55, 60). Cl. IX. Pandele Mihaela (6356, 70, 72, 73, 75, 424; E: 2154, 55, 60, 67, 74, 75, 83), Sachelarie Dan (6310, 25, 41, 56—60, 66, 68, 71, 73, 76, 88, 89, 93, 400, 02, 16, 20, 21, 24, 28, 29, 31, 34; E: 2153, 56—66, 68—75, 78, 79, 81—83).

Ș.m. 5, cl. IX. Lungu Valeria (6311, 12, 16, 56—60, 67, 70, 72, 73, 76, 88, 90, 93; E: 2155). Cl. XI. Cremenescu Gheorghe (6356—59, 65—68, 70—73, 77, 89, 93, 405, 16, 20, 24, 28, 31, 36).

Ș.m. 6, cl. VIII. Plăiașu Ștefan (E: 2136, 38, 47, 51, 61, 68, 69, 71, 82).

POIANA ROVINARI (Oltenia). Ș.m. cl. VIII. Pupăzan Vasile (6370, 92; E: 2143, 54, 55, 67, 75, 81, 83).

PREDEAL. Ș.m. cl. XI. Ioniță Maria (6338, 40, 57, 65, 66, 68, 73, 74, 77, 86, 88, 89, 93, 416, 20, 24, 28, 41).

PRUNDUL BÎRGĂULUI. Șc. 8 ani cl. VIII. Vrînceanu Andrei (6258, 59; E: 2108, 09, 13, 21, 22, 29).

PUCHENI MOȘNENI (Ploiești). Șc. 8 ani cl. VII. Stan Stelian (E: 2136—39, 42, 46—48, 51, 53, 56—59, 61, 63, 64, 66, 68, 69, 71, 73, 79, 82).

PUCIOASA. Ș.m. cl. X. Vasilescu Nicolae (6356—60, 67—77, 86, 88—90, 93, 99, 400, 08, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 29, 31, 32, 34, 36, 39, 55, 57, 59—63, 68, 82, 87). Cl. XI. Vasilescu Ana (6309—11, 13, 16, 29, 56—60, 67—75, 77, 86, 88—90, 93, 99, 400, 08, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 29, 31, 34, 36, 39).

RĂCARI. Ș.m. cl. VIII. Sîrbu Maria (6357, 58, 71, 72, 357, 89; E: 2147, 54, 51—63).

RĂDĂUȚI. Ș.m. 2, cl. XI. Weinstein Jack (6309—12, 14—21, 23, 26, 28, 30, 33, 37, 38, 40, 42—45, 56—59, 65—73, 75, 82, 87—90, 92, 95, 98—400, 10, 11, 14—16, 20, 21, 24, 28, 31, 40).

RECAȘ. Ș.m. cl. XI. Pașca Teodor (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 38, 68, 70, 72, 73, 75).

REȘIȚA. Ș.m. 1, cl. XI. Buță Viorel (6325, 26, 40, 41, 50, 65—68, 70—72, 74, 76, 77, 81, 89, 90, 94, 98, 99), Samide Mariana (6308, 10, 12, 14, 17, 45, 56, 57, 59, 62, 66, 68, 70—73, 75, 86, 93, 411, 20, 21).

RÎMNICUL SĂRAT. Ș.m. cl. VIII. Tegilă Vasile (6370; E: 2154, 60—63, 67, 68). Cl. XI. Diamandescu Emil (6308, 10, 44, 45, 56, 68, 70, 72, 73, 86, 93).

RÎMNICUL VILCEA. Ș.m. Nicolae Bălcescu, cl. X. Popescu Constantin (6258, 71, 72, 74, 308, 14, 16, 45, 57, 59, 60, 68, 70—72), Sogorescu Vasile (6308, 10, 12, 14, 16, 28—30, 45—59, 66—68, 70, 72—75, 86, 89). Cl. XI. Bîtcă Ilie (6224, 43, 308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 45, 46, 49), Dumitrașcu Liviu (6357—59, 66—68, 70, 72, 73, 75, 86, 89, 93, 98), Tigmeanu Ion (6356—58, 62, 67, 68, 70—73, 77, 78, 89, 400).

Ș.m. Vasile Roaită, cl. IX. Sireţchi Roman (6308, 16, 45, 59, 70, 72, 73, 89, 93, 95, 96).

ROMAN. Absolvent Dolteanu Temistocle (6402—16, 19, 20, 22, 24, 27, 28, 31, 36—42). Ș.m. cl. IX. Rugină Andrei (6338, 44, 70, 71, 73, 74, 418, 20, 24, 31).

ROȘIORII DE VEDE. Ș.m. cl. VIII. Nagea Ștefan (6308, 29, 70, 72, 73, 89; E: 2136, 38, 39, 40, 43, 48, 49, 52—55, 57—64, 67—74, 78—80, 82, 83). Cl. X. Săndulescu Ion (6308, 14, 16, 22, 25, 29, 37, 38, 40, 44, 45, 56—60, 66—68, 70—76, 82, 88, 89, 98, 400, 18, 20, 24, 27, 31).

SATU MARE. Ș.m. 1, cl. VIII. Mițaro Alexandru (6316, 28, 44, 56—58, 68, 70—74, 89, 418, 20, 24; E: 2137, 43, 44, 47—49, 51, 54, 55, 60—63, 67, 71, 74, 75, 78—81, 83), Sichet Margareta (6314, 56—58, 71; E: 2155, 67, 83).

SĂVENI. Ș.m. cl. VIII. Tînafte Marcel (E: 2136, 38, 58, 69—72, 81—83). Cl. X. Esere Lenke (6310, 12, 14, 16, 30, 33, 45, 59, 60, 67, 72, 82, 88, 93).

SEBEȘ. Ș.m. cl. X. Constantin Silvia (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 23, 28, 37, 44, 45, 57—61, 65—68, 70—73, 76, 78, 86, 89, 93), Lupu Ion (6262, 67, 71, 99. 301, 10, 12, 16, 17, 45, 67, 70).

SIBIU. Ș.m. 1, cl. VIII. Grosu Adriana (6356, 57, 58, 89; E: 2160—62, 67, 68), Vintilă Maria (E: 2143, 48, 54, 60, 63, 78, 80, 81, 83). Cl. IX. Albescu Ion (6314, 16, 25, 28—30, 38, 44, 45, 49, 56, 57), Mitran Nicolae (6356, 58, 70, 71; E: 2143, 49, 51, 54, 60—63, 67, 68, 77), Moldovan Gheorghe (6314, 25, 28, 30, 38, 44, 45, 56, 67, 88, 89), Cl. X. Lupu Mihai (6276, 97, 309, 26, 30, 38, 44, 46, 56—62, 65—77, 82, 89, 93). Ș.m. 2, cl. VIII. Hodor Liviu (6314,

MISKOLCI EGYETEM KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

56, 57, 66—68, 70—73, 89; E: 2137, 44, 54, 55, 60—63, 67, 68). Ş.m. 3, cl. VIII. Olaru Yeronim (6420, 24; E: 2154, 55, 60, 63, 74, 83). Cl. X. Baltebin Virgil (6305, 08, 10—12, 14, 16, 17, 20, 37, 38, 42, 44, 45, 56, 60—62, 65, 66, 68, 71, 74, 76—78, 88, 98, 405), Bancen Liviu (6308, 09, 28, 29, 48, 56—58, 68, 71, 73, 76—78, 82, 89, 90, 400, 19, 21, 24, 29, 75), Bucur Liliana (6323, 62, 70, 73, 75, 82, 86, 89, 90, 94, 400, 05, 09, 10, 27, 28), Bucurenciu Ion (6323, 33, 54, 58, 62, 65, 69, 70, 74, 75, 86, 88, 93, 98, 405, 09, 27, 28), Daneş Emil (6323, 29, 33, 54, 58, 69, 70, 75, 78, 82, 86, 88, 93, 98, 405, 09, 10, 27, 28), **Dăncilă Ion** (6266, 74, 88, 91, 95, 96, 300, 09, 13, 15, 18, 19, 25, 33, 41, 46, 66—69, 73—75, 79, 80, 83, 87—89, 95, 97, 99, 402, 04—07, 09, 10, 13—15, 18, 19, 22, 25, 27, 31, 34, 36, 37, 43, 72), **Helju Doina** (6257—60, 62, 63, 67, 71—76, 80, 89, 97, 99, 301, 05, 10, 12, 13, 17, 20—22, 33, 44, 45, 68, 69, 73, 74, 77, 86, 90, 97, 400), **Moldovan Rodica** (6308, 18, 20, 23, 25, 28, 44, 45, 57—60, 62, 65, 67, 73—75, 77—79, 83, 86, 88, 400, 05, 10, 20, 22, 24, 25), Ostap Ion (6261—63, 71, 99, 317, 29, 54, 77, 400, 34, 40, 41), Popescu Adriana (6320—23, 26, 28, 40, 62, 73, 90, 400, 05, 16, 20, 24, 28, 34, 36, 41). Cl. XI. Dobrotă Marilena (6308, 20, 23, 44, 45, 57—59, 62, 65, 67, 70, 71, 74, 75, 77, 86, 400, 24, 28), Gîlea Octavian (6274, 318, 79, 89, 409, 10, 14, 19, 24, 25, 28), **Mihai Virginia** (6271, 85, 301, 03, 22, 23, 30, 33, 37, 65, 66, 70—73, 75, 76, 87—89, 93, 99, 402, 05, 07, 09, 11, 16, 18—20, 22—27, 29, 34, 41), **Năstoiu Aneta** (6271, 85, 301, 03, 22, 23, 30, 33, 37, 65, 66, 70—73, 75, 76, 86, 89, 93, 99, 402, 05, 07, 09, 11, 16, 18—20, 22, 23—27, 29, 34, 41), Soina Liliana (6308, 18, 20, 25, 28, 45, 62, 65—67, 73, 75, 77—79, 83, 88, 89, 405, 09, 10, 14, 22, 24, 25, 27, 28). Ş.m. 4, cl. X. Oprişor Simion (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 30, 33, 38, 40, 44, 45). Şc. de 8 ani nr. 15, cl. VII. Vintilă Doina (E: 2108, 09, 14, 22, 30, 33, 36, 48).

SIGHIŞOARA. Şc. de 8 ani nr. 2, cl. VI. Moraru Cristian (E: 2123, 24, 27, 30, 33, 35, 36, 38, 42, 46, 52, 53, 56—59, 61, 64—66).

SIMERIA. Ş.m. cl. VIII. Igna Ion (6344, 45, 72, 420, 24; E: 2137, 43, 74, 75, 79, 83). Cl. XI. Roşu Titus (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 66, 70, 73, 75).

SIRET. Ş.m. cl. X. Luchian Dumitru (6316, 45, 59, 67, 70, 83, 93; E: 2143, 54, 55, 60, 67, 81, 83).

SLATINA. Ş.m. 1, cl. X. Buicescu Rada (6308, 10—12, 14, 16, 17, 19, 38, 45, 56—60, 66, 67, 89, 70, 72, 418, 20, 24). Ş.m. 2, cl. XI. Ilie Titus (6308, 10, 14, 45, 56, 68, 70—75, 89, 93, 420).

STREHAIA. Ş.m. cl. X. Grecu Alexandru (6314, 16, 44, 56, 57, 67, 70—73, 86, 88, 89, 93), Mărtiniş Ştefan (6274, 309, 18, 41, 69, 78, 79, 88, 89, 404, 05, 07, 09—11, 14, 15, 19, 20, 24, 25, 27).

SUCEAVA. Ş.m. 1, cl. XI. Botezatu Silviu (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 45, 59, 66, 67, 70).

Şc. de 8 ani nr. 5, cl. VII. Erhan Ion (E: 2136, 38, 51, 63, 64, 68, 71, 82).

ŞERCAIA (Făgăraş). Ş.m. cl. VIII. Gereb Olga (E: 2154, 55, 60—63, 67, 68, 71, 79, 83, 89).

ŞIMLEUL SILVANIEI (Crişana). Ş.m. cl. IX. Atodiroaie Mihai (6344, 45, 60, 67, 70, 72, 82, 89, 93, 420, 24, 31; E: 2141, 43, 49, 55, 60, 67, 74, 78, 83).

SOMCUŢA MARE (Maramureş). Ş.m. cl. XI. David Vasile (6356, 57, 62, 66, 67, 70—73, 75, 87, 89, 90, 93).

TIMIŞOARA. Student **Bejancu Aurel** (6257—76, 80—82, 85, 89, 91, 96—99, 300, 01, 04—26, 30—39, 41—48, 51—53, 56—78, 81, 85—95, 97, 99, 400, 01). Ş.m. 1, cl. XI. Diaconescu Ana (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 38, 45, 56, 57, 60—62, 66—68, 70, 72—75, 88—90, 93, 96, 98, 400, 05, 09, 11, 20, 24, 28, 36).

TIRGOVIŞTE. Ş.m. 2, cl. X. Erlik Octavian (6310, 12, 14, 16, 17, 28, 30, 38, 44, 45, 56, 67, 70, 72, 93, 420, 24). Ş.m. 3, cl. X. Niculescu Constantin (6302, 19—23, 29, 33, 37, 54, 56—60, 62, 65, 67—70, 72, 73, 75—78, 82, 85, 88—90, 93, 94, 97, 400).

TIRGU JIU. Ş.m. 1, cl. IX. Mariotti Răzvan (6308, 14, 16, 45, 56, 57, 59, 60, 66, 67, 70—75, 89), Vişan Ion (E: 2154, 55, 60, 67; 6316, 30, 38, 45, 56, 59, 67, 70, 72, 73, 75, 88, 89, 93). Cl. X. Pestroiu Daniel (6328, 37, 56, 59, 60, 67, 70, 72, 75, 88, 89, 93, 98, 420, 24). Cl. XI. Isac Horaţiu (6356, 57, 66, 72, 77, 86, 89, 90, 414, 20—22, 24, 25, 34).

TRUSEŞTI. Ş.m. cl. VIII. **Corduneanu Dumitru** (E: 2139, 47, 54, 55, 58—64, 66—69, 71, 73—75, 78—83; 6344, 45, 56—58, 68, 70, 72—75, 89, 400, 20, 24, 29). Cl. IX. Aionesei Ion (E: 2154, 60, 67; 6308, 10, 12, 14, 16, 33, 38, 45, 57, 59, 68, 70—72, 74, 93), Sâu Gheorghe (6308, 10—12, 17, 22, 28, 38, 40, 56—60, 62, 65, 68, 70—76, 88—90, 93, 98, 400, 14, 16, 20, 24, 27, 28, 31).

TURDA. Ş.m. 1, cl. X. **Pop Gheorghe** (6308, 10—12, 14, 16, 17, 20, 28, 30,

33, 34, 38, 44, 45, 56—60, 65—68, 70—73, 75, 76, 78, 86, 88, 89, 93, 409, 20, 21, 24, 31, 34, 41).

TURNU SEVERIN. Student Chiloru Sever (6259, 69, 71—73, 81, 99, 301, 08—11, 14, 16—18, 45, 66, 68—71, 75, 84, 93).

Ş.m. 1, cl. VIII. Gărgălie Silvestru (E: 2165, 68—71, 73, 74, 78—83). Cl. X. Popescu Eleodor (6208, 09, 11—13, 15, 17, 19, 20, 23, 24, 26—30, 32, 36—38, 40—44, 47, 50, 54, 56—64, 67—77, 79, 80, 82, 83, 85—87, 89—95, 97, 99, 300, 02—08, 10—14, 16, 17, 19, 23, 25, 27—30, 33, 34, 37—51, 53—62, 65—86, 89—94, 97, 98, 400).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1965.

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective. *Solicităm probleme interesante legate de practică.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată pentru anul 1965 (12 numere). Prețul este de 2 lei exemplarul (24 lei anual).

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Grafica Nouă" II — c. 11857

INDEX 41601

Lei 2

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) martie 1965

3

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI (II), nr. 3 — martie 1965

SUMARUL

1. Cu prilejul împlinirii a 15 ani de apariţie a Gazetei Matematice, seria B de C. Ionescu-Bujor 97
2. A VI-a olimpiadă internaţională de matematică de Tiberiu Roman 100
3. Soluţii la problemele propuse la a VI-a O.I.M. lucrarea I de T. Roman 103
4. Rezultatul întrecerii între şcolile medii de cultură generală din ţară, privind activitatea extraşcolară la matematică în anul 1964 112
5. Note matematice de Cornel Popescu, Dan Voiculescu . 113
6. Probleme rezolvate (6164, 6165, 6178, 6184, 6199, 6295, 6301, 6302, 6307, 6321, 6322; E: 2132, 2139, 2140, 2149) . 115
7. Chestiuni de examen (6750—6764) 127
8. Probleme propuse (6765—6794) 129
9. Exerciţii şi probleme propuse pentru cl. V—VIII (E: 2281—2292) 133
10. Rubrica rezolvitorilor de probleme 136

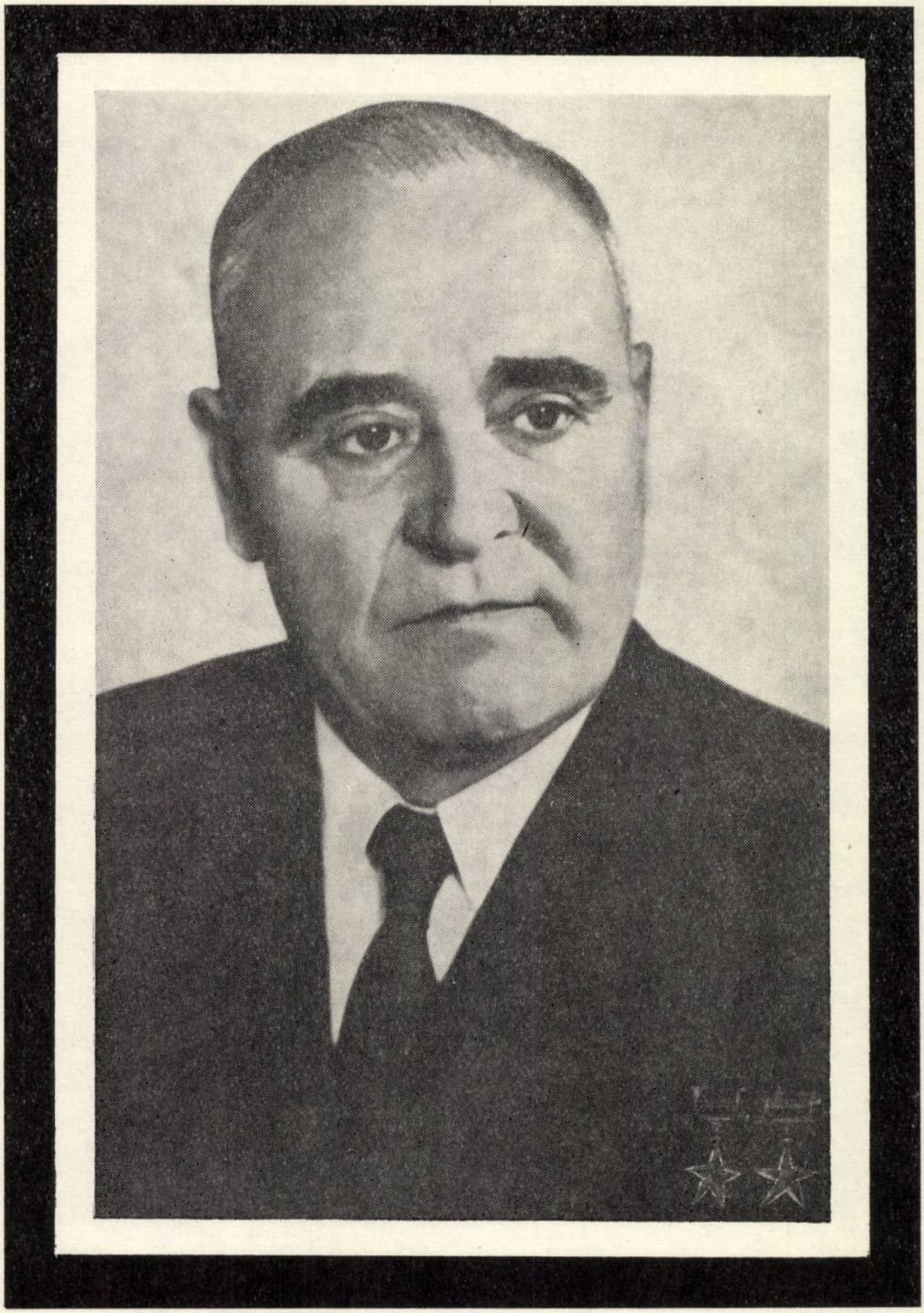
ANUL XVI, 3 MARTIE

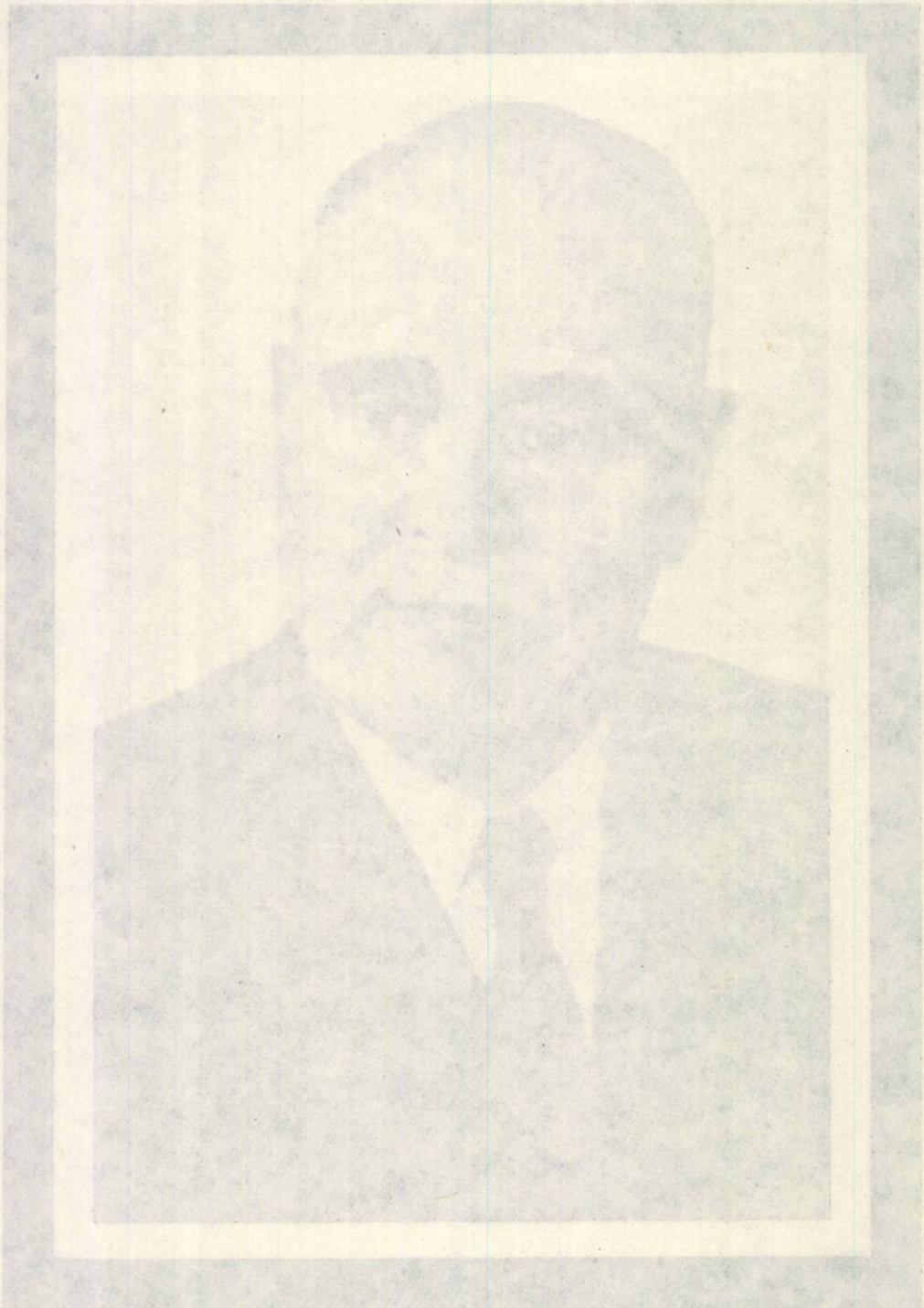
COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.* prof.; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.* profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.





HOTĂRÎREA

COMITETULUI CENTRAL AL PARTIDULUI MUNCITORESC ROMÎN, A CONSILIULUI DE STAT ŞI A CONSILIULUI DE MINIŞTRI ALE REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Pentru eternizarea memoriei tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej, Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Consiliul de Stat şi Consiliul de Miniştri ale Republicii Populare Romîne,

HOTĂRĂSC:

1. Se vor edita lucrările tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

2. Se va edita biografia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

3. Statuia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi ridicată în oraşele Bucureşti şi Cluj.

4. Bustul tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi aşezat la Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Marea Adunare Naţională a Republicii Populare Romîne, clubul C.F.R. „Grivița Roşie" din oraşul Bucureşti şi la Casa de cultură din oraşul Galaţi.

5. Pe clădirile legate de activitatea tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej în perioada ilegalităţii vor fi aşezate plăci comemorative.

6. La Muzeul de Istorie a Partidului din oraşul Bucureşti se va organiza o sală memorială, consacrată vieţii şi activităţii tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

7. Se va institui bursa republicană „Gheorghe Gheorghiu-Dej", care va fi acordată celor mai merituoşi studenţi.

8. Se va atribui numele „Gheorghe Gheorghiu-Dej" :

a) Oraşului Oneşti

b) Combinatului siderurgic Galaţi

c) Hidrocentralei „16 Februarie" de pe Argeş

d) Combinatului chimico-metalurgic din Baia Mare

e) Institutului Politehnic din Bucureşti

f) Casei de cultură a studenţilor din Cluj

g) Unei şcoli medii de cultură generală din oraşul Bîrlad

h) Unui bulevard şi unei pieţe din oraşul Bucureşti, precum şi unor pieţe şi străzi din alte oraşe importante din ţară.

9. Se va emite un timbru memorial cu efigia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

COMITETUL CENTRAL
AL
PARTIDULUI MUNCITORESC
ROMÎN

CONSILIUL DE STAT
AL
REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

CONSILIUL DE MINIŞTRI
AL
REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

NOTĂRÎREA

COMITETULUI CENTRAL AL PARTIDULUI MUNCITORESC ROMÎN, A CONSILIULUI DE STAT ŞI A CONSILIULUI DE MINIŞTRI ALE REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Pentru eternizarea memoriei tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej, Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Consiliul de Stat şi Consiliul de Miniştri ale Republicii Populare Romîne

HOTĂRĂSC:

1. Se vor edita lucrările tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

2. Se va edita biografia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

3. Statuia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi ridicată în oraşele Bucureşti şi Cîmpia Turzii.

4. Bustul tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi aşezat la Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Marea Adunare Naţională a Republicii Populare Romîne, clubul C.F.R. „Griviţa Roşie" din oraşul Bucureşti şi la Casa de cultură din oraşul Caracal.

5. Pe clădirile legate de activitatea tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej în perioada ilegalităţii vor fi aşezate plăci comemorative.

COMITETUL CENTRAL
AL
PARTIDULUI MUNCITORESC
ROMÎN

CONSILIUL DE STAT
AL
REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 3 martie 1965

CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 15 ANI DE APARIȚIE A GAZETEI MATEMATICE SERIA B

Prof. univ. emerit CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

Tradiția de stimulare a interesului pentru studiul matematicii, în rîndul elevilor a fost formată de publicația lunară „Gazeta matematică", înființată la 15 septembrie 1895 și susținută cu perseverență de redacția acestei reviste timp de aproape 54 de ani.

Este meritul unui colectiv de profesori și ingineri, sudat de devotamentul pentru școală și de autoritatea științifică a unor personalități ca profesorul Gheorghe Țițeica, de la Universitatea din București și profesorul inginer Ion Ionescu, de la Școala Națională de Poduri și Șosele (mai tîrziu, Politehnica) din București, de a fi depus, timp ce depășește jumătatea de veac, muncă entuziastă și mijloacele materiale necesare pentru ca „Gazeta matematică" să aducă importante servicii școlii și formării a numeroși matematicieni și ingineri, cu toate greutățile acelor vremi și fără vreun sprijin din partea guvernelor burghezo-moșierești.

În anii puterii populare, învățămîntul de toate gradele din patria noastră a cunoscut o continuă dezvoltare și îmbunătățire. În această perioadă, studiul științelor naturii a primit conținutul și amploarea corespunzătoare importanței lor în viața contemporană și exigențelor construirii socialismului. În acest cadru, pregătirea cît mai bună la matematică și fizică a elevilor a devenit o sarcină importantă a școlii și un element de mobilizare a profesorilor de specialitate.

Pentru a-și concentra și coordona eforturile în această direcție, pentru perfecționarea metodelor de lucru, profesorii de matematică și acei de fizică au format „Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R.".

Printre numeroasele forme de activitate pe care Societatea le-a desfășurat pentru a contribui la ridicarea continuă a nivelului pregătirii elevilor din școlile de cultură generală, tehnice, profesionale, se numără și publicațiile periodice destinate școlii. În acest sens, Societatea de științe matematice de fizice și-a asumat în anul 1949, răspunderea continuării publicării „Gazetei matematice" și a punerii de acord a acestei publicații cu cerințele mult sporite ale școlii din R.P.R. În vederea creșterii eficienței vechii reviste, conținutul ei a fost extins și la domeniul fizicii și a fost îndreptat cu precădere, în direcția formării științifice a cadrelor didactice

din școli și a dezbaterii problemelor metodice legate de predarea matematicii și fizicii.

Astfel apare în iunie 1949, revista „Gazeta matematică și fizică". În același timp, fructificînd experiența pozitivă acumulată la vechea „Gazetă Matematică" și adăugînd numeroase elemente înnoitoare cerute de noua viață a școlii, „Societatea" publică paralel, o a doua revistă, destinată elevilor „Revista matematică și fizică". Primul ei număr apare în martie 1950.

Subvenționate de stat și sprijinite în mod constant de Ministerul Învățămîntului, cele două reviste și-au organizat conținutul și activitatea pe linia măreților țeluri ale construirii socialismului în patria noastră, în spiritul nou, legat temeinic de viață, al școlii.

Destinată elevilor din școlile de cultură generală, tehnice și profesionale, celor din clasele V—VIII ale școlilor generale de 8 ani. „Revista de matematică și fizică" s-a străduit, în conformitate cu programul pe care și l-a propus, să dezvolte pregătirea de specialitate a elevilor acestor școli. Bazîndu-se pe programele școlare, revista trebuia să lărgească orizontul cunoștințelor elevilor fundîndu-le pe concepția materialist-dialectică despre natură și societate și să-i inițieze totodată, în unele domenii moderne ale matematicii și fizicii. De asemenea, revista trebuia să ajute la aprofundarea materiei predate în clasă și la perfecționarea deprinderii de a aplica materialul învățat.

Revista și-a conjugat eforturile cu acelea ale școlii, al cărei ajutor a căutat să fie. Ea a urmărit să participe activ, la educarea acestui tineret în spiritul muncii și al dragostei de patrie. Totodată, revista a urmărit și țelul de a contribui la pregătirea specialiștilor necesari construcției socialismului, atît prin extinderea continuă a cîmpului de cunoștințe ale tineretului școlar și prin aprofundarea acestora, cît și prin dezvoltarea capacității sale de muncă creatoare.

Obiectivul final fiind unic, era firesc ca ambele publicații de matematică și fizică, destinate școlilor, să-și împletească activitatea. De aceea și pentru a marca mai bine legătura dintre ele, „Revista matematică și fizică" își schimbă titlul în martie 1954, numindu-se „Gazeta matematică și fizică, seria B".

În anii regimului democrat-popular, îndrumat de partid, învățămîntul s-a dezvoltat cu multă vigoare, urmînd linia continuu ascendentă a economiei, a culturii și a tuturor sectoarelor vieții sociale.

Durata învățămîntului general a fost majorată de la patru ani la șapte și apoi, la opt ani, iar aceea a școlii de cultură generală de la zece la unsprezece și apoi la doisprezece ani. Întregul învățămînt din țara noastră este gratuit, iar pentru elevii din clasele I—VIII ale școlilor generale de opt ani se acordă gratuit și manuale.

Din anul școlar 1948—1949, pînă în anul școlar 1963—1964 numărul anual al elevilor din școlile de cultură generală a crescut de la 1 846 200 la 3 058 340; iar numărul cadrelor didactice care predau în aceste școli, a sporit de la 65 040 la 125 350. Numărul elevilor din școlile profesionale s-a triplat.

Această puternică dezvoltare cantitativă a învățămîntului unită cu ascensiunea lui calitativă a dus la o creștere a activității Societății de științe matematice și fizice. Era necesar ca în sfera acestei activități să fie cuprinsă

și chimia, atît pentru că industria chimică a luat un imens avînt în R.P.R., cît și pentru importanța pe care și-a cucerit-o această știință în ansamblul științelor naturii. De aceea, în anul trecut, Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. s-a scindat, constituindu-se o „societate" pentru științele matematice și alta pentru fizică și chimie. La fel s-au scindat cele două publicații de matematică și fizică consacrate școlilor.

Astfel, începînd cu al 15-lea an de apariție, revista noastră a luat titlul de „Gazeta matematică", seria B". Cu acest număr, ea intră în al 16-lea an de apariție. Momentul obligă la o privire retrospectivă și la un nou elan spre viitor, fondat pe experiența acumulată.

Bilanțul activității revistei, în cei 15 ani de activitate poate fi reprezentat prin următorii indici cantitativi principali.

Au fost publicate 180 de numere ale revistei, în care au apărut 513 articole de matematică sau de fizică, 6665 probleme propuse de matematică sau de fizică pentru școlile medii, 2247 probleme pentru clasele V—VIII ale școlilor generale de șapte și de opt ani.

Dacă în 1958 tirajul unui număr al revistei era de 16 000 exemplare, în 1964 s-a atins tirajul maxim de 33 000 exemplare.

Aceste cifre dovedesc nu numai un bogat conținut al „Gazetei matematice seria B", în cursul acestor 15 ani, dar și o pătrundere tot mai întinsă a ei în școli, în masa elevilor.

Cercurile de matematici din școli au găsit în articolele, notele și problemele publicate în revistă, un bogat material documentar pentru tematicile lor. În paginile revistei, elevii au avut pentru studiul individual, o informare variată și de cele mai multe ori, interesantă. Rezolvarea problemelor propuse și studierea celor rezolvate au constituit în fiecare an un exercițiu util pentru mii de elevi, menit să le crească interesul pentru matematică și fizică, să le dezvolte gîndirea. În revistă au fost publicate și probleme date la examenele de maturitate, la concursurile de admitere în facultăți, la olimpiadele de matematică și fizică. Acest material a servit elevilor care se pregăteau pentru aceste probe.

Un stimulent însemnat pentru antrenarea elevilor la munca de rezolvare a problemelor și de formare a unui stil adecvat de exprimare a gîndirii științifice a fost sistemul de primire la redacție a soluțiilor date de elevi problemelor propuse și de înscriere a numelui lor în rubrica rezolvărilor de probleme.

Lectura acestei rubrici ne arată că elevii care au activat la „Gazeta matematică, seria B" locuiesc pe întregul teritoriu al țării și studiază la școli medii sau elementare, la școli centenare sau create în anii regimului democrat popular, la școli din orașe sau din sate.

Acest tablou, care cuprinde școli din nordul țării, de la Suceava, Siret, Trușești, Ștefănești, Vișeu pînă în sud la Turnu Severin, Turnu Măgurele, Slalcia, Roșiorii de Vede și din vestul țării, de la Sebeș, Sîntana și Simleu (Crișana), Lugoj, Timișoara, pînă în est la Constanța, Vlahi și Adamclisi (Dobrogea), Brăila, Bîrlad, Iași, ne arată nu numai amploarea acțiunii „Gazetei Matematice seria B", dar și treapta ridicată pe care a urcat învățămîntul din școlile de cultură generală de pe întreg cuprinsul țării, întrucît numeroase școli tinere din localități altă dată obscure și neînsemnate, utilizează azi în mod activ, în munca lor cu elevii, mijloace auxiliare

care depășesc cadrul obișnuit al materialului bibliografic școlar, mijloace cum sînt revistele speciale pentru elevi.

Această constatare privitoare la nivelul învățămîntului din R.P.R. ne umple inima de mîndrie.

Prin realizările revistei, colaboratorii ei au participat la eforturile viguroase și rodnice depuse de oamenii muncii din patria noastră, sub conducerea Partidului Muncitoresc Romîn pentru construirea socialismului, pentru o Romînie înfloritoare, pentru viața fericită a întregului popor.

Și este o mare cinste pentru colaboratorii actuali ai revistei, mai vîrstnici și tineri, profesori și elevi, să participe cu o eficiență sporită în anii ce vor urma, la măreața operă de desăvîrșire a construcției socialismului.

În acest scop, va trebui să ne străduim necontenit să perfecționăm conținutul revistei și acțiunea ei în școli, să legăm și mai strîns revista de viață, de școală, de avîntul clocotitor al energiilor care, îndrumate de Partid, ridică mai sus, tot mai sus, patria noastră socialistă.

A VI-a OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

de TIBERIU ROMAN

Cea de-a șasea întrecere prietenească de matematică a avut loc în iulie 1964 la Moscova, între 72 elevi din 9 țări : R. P. Bulgaria, R.S. Cehoslovacă, R.D. Germană, R.S.F. Jugoslavia, R.P. Mongolă, R.P. Polonă, R. P. Romînă, R.P. Ungară și U.R.S.S.

În zilele de 1—3 iulie, juriul internațional format din cîte un profesor reprezentant al fiecărei țări participante a definitivat textul problemelor (publicate în nr. 8/1964 al G.M. — B), le-a tradus în limbile școlilor din care proveneau elevii și le-a multiplicat.

În ziua de 3 iulie, ora 17 a avut loc deschiderea oficială a Olimpiadei internaționale de matematică (O.I.M.) la Universitatea Lomonosov din Moscova (unde s-au desfășurat toate lucrările și în căminul căreia — situat în aceiași curte — au fost cazați toți participanții). Atît în cuvîntul prof. univ. A.I. Markușevici *), președintele juriului internațional, din partea organizatorilor celei de-a VI-a O.I.M., cît și al prof. M. Czyzykowsi, din partea celorlalte delegații, ca reprezentant al țării organizatoare a celei de-a V-a O.I.M., s-a arătat importanța acestei întîlniri a elevilor din țările socialiste și s-a subliniat că inițiativa aparține țării noastre.

Lucrările scrise au durat cîte 4 ore și au avut loc în diminețile zilelor de 4 și 5 iulie.

În zilele de 4—7 iulie s-au corectat problemele de cei doi profesori din fiecare delegație, s-au comparat rezolvările din diferite țări, s-a definitivat punctajul acordat fiecărei lucrări scrise în plenul comisiei internaționale (în care au intrat cei doi profesori din delegațiile țărilor participante) și s-au fixat premiile.

---

*) cunoscut cititorilor pentru cărțile „Șiruri recurente" și „Arii și logaritmi" apărute în Biblioteca SSMF și „Serii" apărută la Editura Tehnică.

În seara zilei de 8 iulie a avut loc o masă tovărășească la care au toastat prof. A. Markușevici pentru matematică, pentru succesele tinerei generații și în sănătatea tuturor participanților la O.I.M., iar prof. R. Zelinka (Praga) pentru noi victorii ale poporului sovietic prieten și în sănătatea organizatorilor celei de-a VI-a O.I.M. Delegația noastră a distribuit tuturor participanților albume de artă, cărți și obiecte de artizanat, ca amintire.

Adunarea de închidere a Olimpiadei a avut loc la 9 iulie în aula festivă a Universității. Au luat cuvîntul prof. A. I. Markușevici (despre căile de dezvoltare a matematicii actuale și realizările tinerilor matematicieni), E. I. Afanasenko, ministrul învățămîntului al R.S.F.S. și totodată președinte al Asociației de prietenie sovieto-romînă (despre sarcinile multiple ale matematicii școlare, despre pregătirea elevilor pentru viață, despre importanța colaborării tineretului din toate țările, în cît mai multe domenii, pentru a se cunoaște și a se aprecia reciproc), prof. W. Engeel din Rostok-R.D.G. (despre a VII-a O.I.M.) și elevul L. Gerensér (Budapesta) — în numele elevilor premiați.

Elevilor premiați *) li s-au distribuit diplome și premii; celorlalți li s-au acordat diplome de participant și amintiri.

Programul conex a permis cunoașterea orașului Moscova și a împrejurimilor, vizitare de expoziții, muzee, monumente istorice și instituții culturale, vizionarea unor spectacole.

În același timp s-au stabilit contacte și prietenii între elevi și profesori. Majoritatea acestora lucrează de mulți ani în cadrul juriului, unii au luat parte chiar la primele O.I.M. din țara noastră.

Din țările în care școala de cultură generală durează 12 ani ca și din celelalte (în afara a cîte 1—2 elevi eventual) au participat absolvenți. Echipa țării noastre a fost formată din 5 absolvenți ai clasei a X-a și numai 3 absolvenți ai clasei a XI-a, așa că a fost echipa cea mai tînără.

Rezultatele obținute pot fi considerate bune (fără a fi foarte bune): 2 premii II și 3 premii III. Trebuie remarcat că comisia internațională a fost mai exigentă decît în anii precedenți, astfel că s-au acordat premii (7—I, 9—II, 19—III) numai la 48,61% din participanți, față de 55,35% în 1962 și 54,72% în 1963, pe de o parte, iar pe de alta, punctajul minim pentru evidențiere a reprezentat 64,29% din punctajul posibil față de 63,05% în 1962 și 52,50% în 1963.

Felul în care s-au rezolvat problemele date este expus în articolul următor, unde se fac referiri la realizările și lipsurile elevilor noștri.

Olimpiada internațională de matematică a fost inițiată și a continuat să fie o întrecere între elevi, nu între echipe. Se fac însă clasificări neoficiale, care apar în reviste din R.S.C., R.D.G., R.P.U. După punctajul total obținut de elevii participanți, rezultă că echipa noastră și-a păstrat locul al treilea dar punctajul ei în 1964 reprezintă 79,18% din cel realizat de prima clasată, față de 70,48% în 1963.

Desigur că asemenea progrese nu sînt suficiente, căci în 1963 elevii noștri au obținut un premiu I, un premiu II și 3 premii III.

Trebuie amintit faptul că la etapa finală a olimpiadei interne niciun elev de clasa a XI-a nu a obținut premiul I și că lucrările scrise ale olim-

*) Lista premianților s-a publicat în G.M.-B nr. 10/1964

piadei interne, ale celei internaţionale şi cele de selecţionare au dovedit că unii dintre elevi au comportări inegale, o atenţie insuficient de susţinută, o cultură matematică incompletă şi deprinderi de calcul nedesăvîrşite.

În condiţiile existente, se pot lua unele măsuri care să contribuie la mai buna pregătire a elevilor noştri, participanţi la viitoarea O.I.M.

Delegaţia romînă la cea de-a VI-a olimpiadă internaţională de matematică, pe aerodromul Băneasa, la înapoierea de la Moscova.

Această pregătire nu se poate limita la parcurgerea materiei cerute majorităţii elevilor unei clase; este necesar ca profesorii să stimuleze şi să îndrume studiul individual al elevilor fruntaşi, creindu-le condiţii corespunzătoare în clasă, la cercurile de elevi, la consultaţii etc. Ca în orice domeniu (arte plastice, muzică, sport, şah etc.), nici în matematică nu se pot obţine rezultate valoroase în întrecerile pe plan intern sau internaţional fără un efort susţinut, bine călăuzit. Trebuie studiate complet manualele şi rezolvate problemele din culegerile de uz şcolar, cele propuse la olimpiade în perioada 1959 — 1965 ca şi problemele interesante ce apar în G.M. — B.

Se va acorda atenţie problemelor de discuţie, de perspicacitate, care impun o analiză multilaterală. Nu se vor neglija desigur, problemele care impun cunoştinţe solide : formule, relaţii între elementele unui triunghi, identităţi şi inegalităţi uzuale (cu demonstraţiile lor, în toate cazurile).

Dezvoltarea reprezentării spaţiale la elevi rămîne un obiectiv important atît pentru studiul ulterior al matematicii dar — mai ales — al tehnicii.

Este necesar să se formeze elevilor deprinderi de nezdruncinat cu privire la metodele de lucru în stabilirea unor identităţi sau inegalităţi, în rezolvarea problemelor de locuri sau construcţii geometrice (chiar dacă la O.I.M. în 1964 nu s-au propus asemenea probleme).

În fine, trebuie să fim foarte exigenţi în a-i determina pe elevi să urmărească cu toată atenţia atît enunţul problemei şi ansamblul rezolvării ei, cît şi fiecare detaliu de demonstraţie, de calcul.

Deoarece şi la ultima O.I.M. s-a verificat că folosirea judicioasă a timpului de lucru ca şi păstrarea calmului, a încrederii în forţa de luptă

și posibilitățile personale sînt condiții importante ale succesului, este foarte important să formăm la toți „olimpicii" noștri asemenea trăsături morale și metode de lucru încît, la viitoarele olimpiade de matematică, să obțină rezultate din ce în ce mai bune.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA A VI-a O.I.M. — 1964

PRIMA LUCRARE SCRISĂ

Problema I. a) *Să se determine numerele naturale n pentru care numărul* $2^n - 1$ *este divizibil cu 7.*

b) *Să se demonstreze că numărul* $2^n + 1$ *nu-i divizibil cu 7.*

(*propusă de RS.C.*).

Soluția I-a (redactată după *O. Bîscă* și *T. Spircu*)

Se demonstrează întîi afirmația:

$(a + b)^n = \mathfrak{M}\, a + b^n$ pentru n natural.

În adevăr, dezvoltînd binomul din membrul întîi se obține

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n = \mathfrak{M}\, a + b^n.$$

a) Numerele naturale n se pot scrie sub una din formele

$$3k,\ 3k + 1,\ 3k + 2,$$

k fiind un număr natural sau nul.

Pentru $n = 3k$, numărul $2^n - 1$ se scrie

$$2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 1 - 1 = \mathfrak{M}\, 7.$$

Pentru $n = 3k + 1$, se obține

$$2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 2(7 + 1)^k - 1 = 2\,\mathfrak{M}\, 7 + 2 - 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 1$$

iar pentru n = 3k + 2,

$$2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 8^k - 1 = 4(7 + 1)^k - 1 = 4\,\mathfrak{M}\, 7 + 4 - 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 3.$$

Rezultă că $2^n - 1$ este divizibil cu 7 atunci și numai atunci cînd n este multiplu de 3.

b) Procedeul este analog celui de la punctul precedent.

Pentru $n = 3k$, numărul $2^n + 1$ se scrie

$$2^{3k} + 1 = 8^k + 1 = (7 + 1)^k + 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 2.$$

Pentru $n = 3k + 1$, se obține

$$2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 8^k + 1 = 2(\mathfrak{M}\, 7 + 1) + 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 3,$$

iar pentru $n = 3k + 2$

$$2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 8^k + 1 = 4(\mathfrak{M}\, 7 + 1) + 1 = \mathfrak{M}\, 7 + 5.$$

Aşa dar, numărul 2^{n+1} nu-i divizibil cu 7.

Soluţia II-a (redactată după *M. Cherciu*)

a) Fie k un număr natural care satisface condiţia problemei : $2^k - 1 = \mathfrak{M}\, 7$. Se poate arăta că şi $k+3$ satisface ; într-adevăr :

$$2^{k+3} - 1 = 8 \cdot 2^k - 8 + 8 - 1 = 8(2^k - 1) + 7 = 8\,\mathfrak{M}\, 7 + 7 = \mathfrak{M}\, 7.$$

Pe de altă parte, $k+1$ şi $k+2$ nu satisfac, deoarece

$$2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^k + 2^k - 1 = 2^k + \mathfrak{M}\, 7,$$

$$2^{k+2} - 1 = 4 \cdot 2^k - 1 = 3 \cdot 2^k + 2^k - 1 = 3 \cdot 2^k + \mathfrak{M}\, 7 ;$$

iar 2^k şi 3 nu sînt multiplu ai lui 7.

Dar primul număr natural k este 3, întrucît

$$2^1 - 1 = 1 \neq \mathfrak{M}\, 7,\ 2^2 - 1 = 3 \neq \mathfrak{M}\, 7,\ 2^3 - 1 = 7.$$

Rezultă că $2^n - 1$ este divizibil cu 7 atunci şi numai atunci cînd n este de forma : 3, 3+3 ; 6+3 ; 9+3 ; ..., adică un multiplu de 3.

b) Se presupune că $2^n + 1$ este divizibil cu 7

$$2^n + 1 = \mathfrak{M}\, 7.$$

Rezultă

$$8 \cdot 2^{n-3} + 1 = \mathfrak{M}\, 7$$

sau

$$7 \cdot 2^{n-3} + 2^{n-3} + 1 = \mathfrak{M}\, 7$$

deci

$$2^{n-3} + 1 = \mathfrak{M}\, 7.$$

Continuînd astfel, se arată că

$$2^{n-3k} + 1 = \mathfrak{M}\, 7$$

cu k natural şi $n \geqslant 3k$.

Pentru $n = 3k$, această relaţie devine

$$2^0 + 1 = \mathfrak{M}\, 7, \text{ ceea ce-i fals.}$$

Pentru $n = 3k+1$, relaţia devine

$2 + 1 = \mathfrak{M}\, 7$, care-i de asemenea falsă, iar pentru $n = 3k+2$, relaţia devine

$2^2 + 1 = \mathfrak{M}\, 7$, care-i evident inexactă.

Aşa dar $2^n + 1$ nu-i divizibil cu 7.

Soluţia III-a (a autorului)

Presupunînd că numerele $2^n \pm 1$ sînt divizibile cu 7, rezultă că există un număr natural a astfel încît are loc relaţia

$$2^n = 7a \mp 1. \qquad (1)$$

Se deduce că a este un număr impar, adică

$$a = 2b + 1 \qquad (2)$$

b fiind un număr natural sau zero.

a) Ţinînd seama de (2) relaţia (1) corespunzătoare punctului a, devine

$$2^n = 14\,b + 8 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-1} = 7b + 4. \qquad (3a)$$

Rezultă că b este un număr natural par sau zero, adică $b = 2c$. Relaţia (3a) devine

$$2^{n-1} = 14c + 4 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-2} = 7\,c + 2 \qquad (4a)$$

deci c este de asemenea un număr natural par sau zero, adică $c = 2d$, iar relaţia (4a) devine

$$2^{n-2} = 14d + 2 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-3} = 7\,d + 1. \qquad (5a)$$

Astfel s-a dovedit afirmaţia: numerele $2^n - 1$ şi $2^{n-3} - 1$ sînt simultan multipli de 7 ($n > 3$).

b) Ţinînd seama de (2), relaţia (1) corespunzătoare punctului b) devine:

$$2^n = 14b + 6 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-1} = 7b + 3. \qquad (3b)$$

Deci $b = 2c + 1$ şi (3b) devine

$$2^{n-1} = 14c + 10 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-2} = 7c + 5. \qquad (4b)$$

Deci $c = 2d - 1$ şi (4b) devine

$$2^{n-2} = 14d - 2 \qquad \text{sau} \qquad 2^{n-3} = 7d - 1. \qquad (5b)$$

Astfel s-a dovedit afirmaţia: numerele $2^n + 1$ şi $2^{n-3} + 1$ sînt simultan multipli de 7 ($n > 3$).

Pentru a rezolva problema, este suficient să se considere puterile 2^0, 2^1 şi 2^2. Dintre acestea, doar 2^0 satisface relaţia (1) corespunzătoare cazului a). Prin urmare numărul $2^n - 1$ este divizibil cu 7 dacă n este multiplu de 3, numărul $2^n + 1$ nu-i divizibil cu 7.

Observaţii. 1°. S-au dat unele variante la soluţia I-a, punctul b) din care citãm următoarele:

1a) (redactată după *I. Birză*):
Se consideră expresia

$$E = \frac{2^n + 1}{7}$$

şi trebuie dovedit că E nu-i număr natural.

Pentru $n = 3k$, se obţine:

$$E = \frac{2^{3k} - 1}{7} + \frac{2}{7};$$

S-a dovedit la punctul a) că prima fracţie este un număr natural deci E nu este un astfel de număr.

Pentru $n = 3k + 1$, rezultă :

$$E = \frac{2^{3k+1} + 1}{7} = \frac{2(2^{3k} - 1)}{7} + \frac{3}{7}.$$

Prima fracție fiind un număr natural, rezultă că E nu este un astfel de număr.
Pentru $n = 3k + 2$, se poate scrie

$$E = \frac{2^{3k+2} + 1}{7} = \frac{4(2^{3k} - 1)}{7} + \frac{5}{7}$$

și se trage aceiași concluzie ca mai sus.

1 b) (redactată după *I. Dăncilă*).
Numărul dat se poate scrie

$$2^n + 1 = 2^n + 2^3 - 7 = 2^3(2^{n-3} + 1) - 7$$

Paranteza avînd aceeași formă cu numărul dat se va putea transforma în mod analog. Rezultă că numărul dat se poate scrie

$$2^n + 1 = 2^3(2^3 \ldots . (2^{n-3k} + 1) - 7) \ldots .) - 7) - 7,$$

în total fiind k paranteze, k natural, $3k < n$. Așa dar, numărul dat este divizibil cu 7 dacă $2^{n-3k} + 1$ are această proprietate. Însă $n - 3k$ poate fi făcut egal cu 0, 1, 2, iar $2^0 + 1$, $2^2 + 1$ și $2^3 + 1$ nu sînt divizibili cu 7.

1c) Resturile diviziunii prin 7 a numerelor de forma 2^n sînt 1, 2 și 4. Afirmația este verificată pentru $n = 0, 1, 2$; pentru $n = 3k$, $2^n = (7 + 1)^k = \mathcal{M}\, 7 + 1$; pentru $n = 3\ k+1$, $2^n = 2(7 + 1)^k = \mathcal{M}\, 7 + 2$; pentru $n = 3k + 2$, $2^n = 4\ (7 + 1)^k = \mathcal{M}\, 7 + 4$.

Așa dar, $2^n - 1$ dă resturile 0, 1, 3 la diviziunea prin 7, iar $2^n + 1$ dă resturile 2, 3, 5, de unde se deduc rezultatele cerute.

2°. Unii dintre participanți la olimpiadă au dat generalizări acestei probleme. Deoarece elevilor nu li s-a comunicat că se acordă puncte suplimentare celor care prezintă generalizări, s-a ajuns la concluzia să nu se acorde niciunuia.

Citățm generalizările date de elevii romîni :

2a). Numărul $a^n - 1$ este divizibil prin $a^m - 1$ atunci și numai atunci cînd $n = \mathcal{M}\, m$.

2b) Numărul $a^n + 1$ nu este divizibil prin $a^3 - 1$, căci după cum $n = 3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ dă ca resturi 2, $a + 1$, $a^2 + 1$. Niciunul dintre aceste resturi nu este divizibil cu $a^3 - 1$, deoarece, pentru $a = 2$ se obține punctul b) al problemei iar pentru $a > 2$ au loc inegalitățile

$$2 < a + 1 < a^2 + 1 < a^3 - 1.$$

3°. Dintre elevii noștri, 6 au obținut maximul de 7 puncte. Ceilalți au comis următoarele greșeli :

3a) Unul a crezut că problema este rezolvată dacă a dovedit că $2^n - 1$ este divizibil cu 7 pentru $n = 3k$, neluînd în considerație cazurile $n = 3k + 1$ și $n = 3k + 2$. În continuare, a crezut că poate aplica rezultatul obținut și unei expresii de forma $2(2^{n-1} + 1) - 1$, declarînd că ea este un multiplu de 7 dacă $(2^{n-1} + 1)$ este de forma 2^m.

3b) Un alt elev, complicînd problema. își propune să arate că $2^{p-1} - 1$ este un multiplu al numărului p și ajunge la concluzia că $2^n - 1$ este multiplu de 7, dacă $n = 7\ (2m + 1) - 1$.

De fapt, tot el constată că rezultatul obținut nu-i general, deoarece pentru $n = 3$ (care nu se obține din relația de mai sus) problema este rezolvată. Putea de altfel observa că pentru $m = 1$ se obține $n = 20$ care nu verifică.

4°. Problema a fost rezolvată complet de 45 elevi. Considerîndu-i și pe cei care au obținut cîte 6 sau 5 puncte, rezultă că peste 3/4 dintre candidați au rezolvat-o bine.

Problema II. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se arate că are loc relația :

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

(Propusă de R.P.U.)

Soluția I-a (redactată după *O. Bîscă*)

Se stabilește întîi direct identitatea

$$2(a^3+b^3+c^3-3abc)=2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$=(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

Înmulțind cu -2 inegalitatea de stabilit, ea se poate transforma succesiv, în relații echivalente, astfel:

$$2a^3+2b^3+2c^3+6abc-2a^2b-2ab^2-2b^2c-2bc^2-2a^2c-2ac^2\geqslant 0$$

$$2a^3+2b^3+2c^3-6abc-2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-6abc)\geqslant 0$$

$$(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]-$$
$$-2[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2]\geqslant 0.$$

$$(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(a+c-b)\geqslant 0. \quad (1)$$

Așa dar, se pleacă de la inegalitățile

$$a-b+c>0,\ b+c-a>0,\ a+b-c>0$$

valabile în condițiile problemei și de la relațiile evidente:

$$(a-b)^2\geqslant 0,\ (b-c)^2\geqslant 0,\ (c-a)^2\geqslant 0.$$

Înmulțind în mod corespunzător aceste inegalități și adunîndu-le, se obține inegalitatea (1) care se transformă apoi în inegalități echivalente, pînă la forma dată.

Semnul egal în inegalitatea dată este valabil pentru cazul triunghiului echilateral $a=b=c$.

Observație: nu-i suficientă afirmația că relația (1) fiind evidentă, inegalitatea dată este demonstrată; ci, plecînd de la relații cunoscute sau date și prin transformări echivalente trebuie stabilită inegalitatea dată. Partea inițială a soluției de mai sus, care conduce la relația (1), sugerează care sînt relațiile cunoscute ce se vor lua ca punct de plecare.

Soluția a II-a (redactată după *A. Vinea*).

Inegalitatea de stabilit se poate transforma succesiv în inegalități echivalente astfel:

$$a^2(b+c-a)-abc+b^2(a+c-b)-abc+c^2(a+b-c)-abc\leqslant 0$$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geqslant 0 \quad (2)$$

$$a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0. \quad (3)$$

Presupunînd că laturile triunghiului satisfac relația

$$a\geqslant b\geqslant c>0$$

rezultă

$$a(a-b)(a-c)\geqslant 0.$$

Adunînd-o cu relația evidentă

$$(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0,$$

se obține inegalitatea (3) care se poate transforma apoi în inegalități echivalente pînă se obține forma dată. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$.

Soluția III. (redactată după *M. Cherciu*).

Înmulțind cu -1 inegalitatea de stabilit ea se poate aduce la forma

$$a(a^2 - b^2 - c^2 + bc) + b(b^2 - a^2 - c^2 + ac) + c(c^2 - a^2 - b^2 + ab) \geqslant 0 \tag{4}$$

care sugerează folosirea teoremei generalizate a lui Pitagora,

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

și a altor două relații analoge.

Inegalitatea (4) devine

$$abc\,[3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)] \geqslant 0.$$

Se obține imediat:

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2},\quad \cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}$$

și

$$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) = 4\sin^2\frac{A}{2} - 4\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + 1$$

Deoarece are loc relația

$$4\cos^2\frac{B-C}{2} - 4 \leqslant 0$$

trinomul de gradul doi în $\sin\frac{A}{2}$ de mai sus este nenegativ; înmulțindu-l cu $abc > 0$ și folosind teorema generalizată a lui Pitagora se obține relația (4) și apoi inegalitatea dată.

Soluția IV-a (redactată după *E. Popescu* și *T. Spircu*).

Se cunoaște relația lui Euler

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

unde O și I sînt centrele cercurilor înscris și circumscris unui triunghi iar r și R razele lor.

Rezultă

$$R \geqslant 2r;$$

de unde, pe baza relației $S = rp$ se obține

$$4RS \geqslant \frac{8S^2}{p},$$

Ţinînd seama de relaţiile

$$4RS = abc \text{ şi } S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

inegalitatea devine

$$abc \geqslant (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$$

şi prin transformări identice se obţine inegalitatea dată în enunţ.

Observaţii. 1°. În lucrările lor scrise, unii participanţi la O.I.M. au dovedit că inegalitatea dată are loc şi în condiţii mai largi decît cele din enunţ, de pildă dacă a, b, c, sînt numere pozitive oarecare.

În adevăr, din ipoteza $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ rezultă

$$c(c-a)(c-b) \geqslant 0, \tag{5}$$

iar $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] \geqslant 0$ (6)

deoarece din $a \geqslant b$ şi $a-c \geqslant b-c$ rezultă $a(a-c) \geqslant b(b-c)$.

Adunînd inegalităţile (5) şi (6) se obţine inegalitatea (2) din soluţia II-a şi apoi inegalitatea dată.

2°. Unele încercări de soluţie au conţinut greşeli de raţionament ca:

a) considerînd $a > b > c > 0$, s-a dedus greşit

$a(c-a) > b(c-a)$

neobservînd că factorul $(c-a)$ este negativ;

b) din inegalităţi de forma $x < u$ şi $y < v$ s-a dedus $x - y < u - v$ ceea ce nu-i valabil în toate cazurile;

c) s-a considerat valabilă inegalitatea dată şi din ea, cu ajutorul unor inegalităţi juste s-a ajuns la inegalitatea cunoscută. Operaţia în sens invres nu se putea face însă.

d) s-a considerat că, pentru ca o inegalitate de forma

$$x + y < a + b$$

să fie adevărată este necesar ca să aibe loc inegalităţile

$$x < a,\ y < b;$$

e) se afirmă despre unele inegalităţi că sînt adevărate, pentru ca din ele să se deducă inegalitatea dată; uneori aceste afirmaţii sînt false (ca în cazul $a(b+c-a) \leqslant bc$, $b(a+c-b) \leqslant ac$, $c(a+b-c) \leqslant ab$, cum se constată luînd de exemplu $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$), alteori demonstrarea lor este mai complicată decît a enunţului şi nu este nici măcar schiţată.

3°. Problema a fost rezolvată complet de 40 concurenţi, care au obţinut cîte 7 puncte: alţi 27 nu au obţinut niciun punct sau doar unul. Deşi o problemă mai şcolărească şi cu multe soluţii, totuşi „rezolvarea" ei a dovedit lipsuri mai numeroase în pregătire decît prima problemă.

Problema III. În triunghiul ABC ale cărui laturi au lungimile a, b, c se înscrie un cerc. Tangentele duse la acest cerc, paralele la laturile triunghiului se limitează de aceste laturi, determinînd trei triunghiuri noi. Se înscrie apoi cîte un cerc în fiecare din aceste triunghiuri. Să se determine suma ariilor acestor patru cercuri.

(*propusă de R.S.F.J.*)

Soluţia I-a (redactată după *T. Spircu* şi *A. Vinea*).

Pentru ca figura să fie simplă s-a desenat numai segmentul $B'C'$ de tangentă la cercul înscris (de rază r), paralelă cu BC şi cercul înscris în triunghiul $AB'C'$ (de rază r_a).

Se notează cu h_a și i_a înălțimile din A ale triunghiurilor ABC respectiv $AB'C'$. Din asemănarea acestor două triunghiuri rezultă

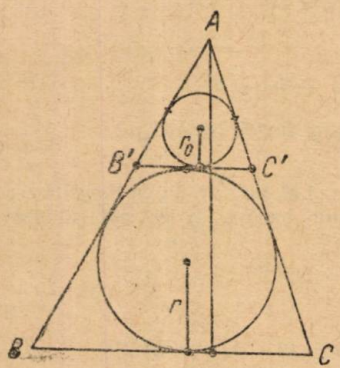


Fig. 1.

$$\frac{r_a}{r} = \frac{i_a}{h_a} = \frac{h_a - 2r}{h_a}$$

și deci $r_a = r - \frac{2r^2}{h_a}$.

Analog se obține

$$r_b = r - \frac{2r^2}{h_b}$$

și

$$r_c = r - \frac{2r^2}{h_c}.$$

Suma ariilor celor patru cercuri este

$$S = \pi(r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) = 4\pi\left[r^2 - r^3\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \right.$$

$$\left. + r^4\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right)\right].$$

Dar

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

(unde s-a notat cu s aria triunghiului ABC),

iar

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2 r^2},$$

așa că suma cerută devine

$$S = 4\pi r^2\left[1 - r \cdot \frac{1}{r} + r^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2 r^2}\right] = \frac{4\pi r^2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} =$$

$$= \frac{4\pi(p-a)(p-b)(p-c)(a^2+b^2+c^2)}{p(a+b+c)^2} =$$

$$= \frac{\pi(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

Soluția II (redactată după *Anca Vătuș*, sc. m. 1, Constanța). În figura precedentă, se consideră cercul de rază r ca exînscris triunghiului $AB'C'$ așa că se poate scrie

$$r = p_a \operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

unde p_a este semiperimetrul triunghiului $AB'C'$.

Din asemănarea triunghiurilor ABC și $AB'C'$ se deduce

$$\frac{p_a}{p} = \frac{r_a}{r}$$

și deci

$$r_a = \frac{r^2}{p \operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

Analog se obține

$$r_b = \frac{r^2}{p \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \text{ și } r_c = \frac{r^2}{p \operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$$

Suma ariilor celor patru cercuri devine

$$S = \pi r^2 \left[1 + \frac{r^2}{p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} + \frac{r^2}{p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} + \frac{r^2}{p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} \right].$$

Deoarece

$$\frac{r^2}{p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \cdot \frac{p(p-a)}{p^2(p-b)(p-c)} = \frac{(p-a)^2}{p^2}$$

și încă două relații analoge, rezultă că suma cerută este

$$S = \pi r^2 \left[1 + \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{p^2} \right]$$

care se aduce ușor la forma dată în soluția precedentă.

Observații. 1°. Se pot cita variante ale soluției I-a

a) (după redactarea lui *O. Bișcă*):

Razele r_a, r_b, r_c se pot pune sub forma

$$r_a = r\left(1 - \frac{2r}{h_a}\right) = r\left(1 - \frac{\frac{2s}{p}}{\frac{2s}{a}}\right) = r\left(1 - \frac{a}{p}\right) = \frac{b+c-a}{b+c+a} r$$

$$r_b = \frac{a-b+c}{a+b+c} r, \qquad r_c = \frac{a+b-c}{a+b+c} r.$$

Făcînd calculele se obține același S.

b) (după redactarea lui *I. Chițescu*, șc. m. 10, Buc.).

Calculele se simplifică dacă razele se scriu sub forma

$$r_a = \frac{p-a}{p} r, \qquad r_b = \frac{p-b}{p} r, \qquad r_c = \frac{p-c}{p} r.$$

2°. Problema a fost rezolvată complet de cinci dintre elevii noștri, care au obținut cîte 6 puncte. Unuia i s-a scăzut un punct, deoarece a scris incorect (din grabă, desigur) $s = ah_a$ iar altuia i s-au scăzut două puncte deoarece a exprimat aria cerută în funcție de r, h_a, h_b, h_c, neducînd calculele la bun sfîrșit. Elevului care a scris doar că triunghiurile sînt asemenea nu i s-a acordat decît un punct.

3°. Această problemă s-a dovedit cea mai apropiată de cele studiate în școală și a fost rezolvată în bune condițiuni de cei mai mulți dintre participanți la O.I.M.: 57 au obținut cîte 6 puncte, iar 6 cîte 5 puncte, doar 5 lucrări au fost notate cu 0 puncte și 2 cu cîte un punct.

(Continuare în numărul următor)

REZULTATUL ÎNTRECERII ÎNTRE ȘCOLILE MEDII DIN ȚARĂ PRIVIND ACTIVITATEA EXTRAȘCOLARĂ LA MATEMATICĂ ÎN ANUL 1964

La întrecerea din anul 1964 s-au primit fișele cu punctajul obținut, conform regulamentului întrecerii, de la 52 școli medii din țară.

I. Pentru activitatea extrașcolară raportată la numărul de clase medii din școala se premiază *următoarele școli*:

1. Școala medie nr. 2 Sibiu, cu 6 clase medii; 2. Școala medie nr. 3 din Sibiu, cu 16 clase medii; 3. Școala medie nr. 1 din Ploiești, cu 26 clase medii; 4. Școala medie nr. 2 din Ploiești, cu 32 clase medii; 5. Școala medie din Tîrgu Lăpuș (Maramureș), cu 9 clase medii; 6. Școala medie din Trușești (Suceava), cu 13 clase medii; 7. Școala medie nr. 1 din Caransebeș, cu 8 clase medii; 8. Școala medie nr. 1 din Pucioasa (Ploiești), cu 12 clase medii; 9. Școala medie nr. 2 din Lugoj, cu 15 clase medii; 10. Școala medie nr. 1 din București, cu 19 clase medii; 11. Școala medie nr. 1 din Sibiu, cu 17 clase medii; 12. Școala medie nr. 10 din București, cu 10 clase medii; 13. Școala medie din Năsăud, cu 9 clase medii; 14. Școala medie nr. 3 din Iași, cu 13 clase medii; 15. Școala medie nr. 1 din Tîrgu Jiu, cu 25 clase medii; 16. Școala medie nr. 2 din Craiova, cu 26 clase medii; 17. Școala medie nr. 1 din Borșa (Maramureș), cu 7 clase medii; 18. Liceul militar „Dimitrie Cantemir" din Breaza, cu 22 clase medii; 19. Școala medie nr. 1 din Petroșani (Hunedoara), cu 11 clase medii; 20. Școala medie nr. 1 din Craiova, cu 27 clase medii. 21. Școala medie nr. 13 din București cu 30 clase medii.

II. Se menționează *următoarele școli medii*:

1. Școala medie nr. 8 „N. Bălcescu" din Cluj, cu 14 clase; 2. Școala medie nr. 11 „D. Cantemir" din București, cu 22 clase medii; 3. Școala medie nr. 1 din Arad, cu 9 clase medii; 4. Școala medie nr. 1 din Botoșani, cu 17 clase medii; 5. Școala medie nr. 1 din Buzău, cu 21 clase medii; 6. Școala medie nr. 2 din Bîrlad, cu 6 clase medii; 7. Școala medie din Simeria (Hunedoara), cu 9 clase medii; 8. Școala medie nr. 2 din Botoșani, cu 13 clase medii; 9. Școala medie din Mehadia, cu 3 clase medii; 10. Liceul militar din Cîmpulung Moldovenesc, cu 22 clase medii; 11. Școala medie nr. 2 din Caransebeș, cu 8 clase medii; 12. Școala medie din Anina (Banat), cu 7 clase medii) 13. Școala medie nr. 2 „N. Bălcescu" din Brăila, cu 17 clase medii; 14. Școala medie „Petru Rareș" din Piatra Neamț, cu 15 clase medii; 15. Școala medie din Slănic (Ploiești) cu 7 clase medii; 16. Școala medie din Orșova (Banat), cu 8 clase medii; 17. Școala medie nr. 1 din Focșani, cu 15 clase medii; 18. Școala medie nr. 1 din Satu Mare, cu 31 clase medii; 19. Școala medie nr. 39 din București cu 15 clase medii.

Regulamentul întrecerii pe anul 1965

Se consideră înscris la întrecere, școlile medii din țară care trimit redacției „Gazetei matematice" seria B, fișa cu totalizarea punctelor obținute, specificînd și numărul de clase medii (IX, X reală și XI reală), care funcționează în anul școlar 1964—1965.

Regulamentul întrecerii are următorul punctaj:

a) Cîte un punct de fiecare problemă rezolvată și anunțată la rubrica rezolvitorilor în cele 12 numere ale G.M.—B. pe 1965,

b) cîte 10 puncte de fiecare evidențiere a elevilor școlii pe 1965,

c) cîte un punct de fiecare elev al școlii participant la etapa locală a olimpiadei de matematică din 1965,

d) cîte 10 puncte de fiecare elev al școlii participant la etapa regională a O.M. în 1965,

e) cîte 30 de puncte de fiecare elev al școlii participant la etapa finală a O.M. în 1965,

f) cîte 50 puncte de fiecare elev al școlii reușit la etapa finală,

g) cîte un punct de fiecare elev abonat la G.M.—B pe 1965,

h) cîte 5 puncte de fiecare ședință de cerc de matematică. Fișa cu punctajul obținut de școala medie respectivă va avea viza direcției și ștampila școlii, va fi semnată de profesorii de matematică care au condus cercurile de elevi și se va trimite apoi, redacției G.M.—B, în prima săptămînă după apariția numărului 12/1965 al G.M.—B.

La clasificarea școlilor se va ține seama de numărul de clase medii pe care le-a avut școala în anul 1964—65.

În legătură cu ecuația trigonometrică $a \sin x + b \cos x = c$ și o problemă de maxim și minim

1. O metodă de rezolvare a ecuației asinx + b cosx = c este următoarea: Notăm $\sin x = X$ și $\cos x = Y$ și obținem sistemul

(1) $aX + bY = c$, o dreaptă și (2) $X^2 + Y^2 = 1$, cerc de rază 1.

Condiția de compatibilitate a ecuației liniare în $\sin x$ și $\cos x$ este echivalentă cu condiția ca dreapta (1) să taie cercul (2) în cel puțin un punct real, adică distanța de la origine la dreapta (1) să fie mai mică, cel mult egală cu 1, de unde:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1 \text{ sau condiția echivalentă } c^2 \leqslant a^2 + b^2$$

În această ipoteză împărțim ambii membri ai ecuației: asin $x + b \cos c = c$ cu numărul diferit de zero: $\sqrt{a^2 + b^2}$ și obținem:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ Putem nota:}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$$

și obținem $\cos (x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Să găsim extremele funcțiilor $M = a \sin x + b \cos x$ și $N = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$. Avem evident:

$\frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x$ și cu notațiile de mai sus, obținem

$\frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos (x - \varphi)$ adică minimul lui M este: $-\sqrt{a^2 + b^2}$ și maximul este $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Pentru $N = a \sin^2 x + b \sin x \cos x = c \cos^2 x$, avem:

$$N = \frac{1}{2} a (1 - \cos^2 x) + \frac{1}{2} b \sin 2x + \frac{1}{2} c (1 + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2} [b \sin 2x + (c - a) \cos 2x + (a + c)]$$

Lăsînd deoparte constanta $(a + c)$ și notînd $2N - (a + c) = P$, avem: $P = b \sin 2x + (c - a) \cos 2x$: Minimul lui P este $-\sqrt{b^2 + (c - a)^2}$ iar maximul este $+\sqrt{b^2 + (c - a)^2}$.

Corneliu N. Popescu, profesor București

În legătură cu problemele 5908, 6018 și 6237

În problemele 5908, 6018 și 6237 se demonstrează divizibilitatea unor expresii algebrice prin polinoame de forma $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ De exemplu, în problema 6018 se cere să se arate că $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{2p}$ se divide cu $X^2 + X + 1$.

Pentru a studia acest fel de probleme vom introduce în prealabil unele notații.

Fie un polinom $P(X)$, prin S_{kn} înțelegem suma coeficienților termenilor în X^k, X^{k+n}, X^{k+2n} ... din expresia lui $P(X)$. Zicem că $P(X)$ are proprietatea α sau pe scurt, că este un polinom α, dacă $S_{0n} = S_{1n} = \ldots S_{(n-1)n}$.

Să vedem cîteva proprietăți ale polinoamelor α

1. Polinomul $X^{p+n-1} + X^{p+n-2} + \ldots + X^{p+1} + X^p$ este un polinom α deoarece fiecare termen din expresia sa aparține unei alte progresii geometrice X^k, X^{k+n}, X^{k+2n} ... și avem n termeni. Este o consecință a faptului că n numere consecutive cum sînt p, $p+1$, ... $p+n-2$, $p+n-1$ dau resturi diferite două cîte două la împărțirea prin n.

2. Polinomul care este produsul unui monom aX^p cu $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ este un polinom α. (Se deduce din 1).

3. Suma mai multor polinoame α este un polinom α.

Cu ajutorul acestor propoziții demonstrăm teorema:

Un polinom $P(X)$ care se divide prin $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ este un polinom α.

Identitatea împărțirii fără rest ne dă:

$$P(x) \equiv (a_0 X^p + a_1 X^{p-1} + \ldots + a_{p-1} X + a_p) \cdot (X^{n-1} + X^{n+2} + \ldots + X + 1).$$

Aplicînd distributivitatea înmulțirii în raport cu suma din prima paranteză obținem pe $P(X)$ sub forma unei sume de polinoame α.

Reciproc: orice polinom α se divide cu $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$.

Rădăcinile $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ ale ecuației $X^{n-1} + X^{n+2} + \ldots + X + 1 = 0$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității cu excepția unității însăși. Vom arăta că:

$P(z_i) = 0$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$. Avem : $z_i^k = z_i^{k+n} = z^{k+2n} = \ldots$ de unde deducem $P(z_i) = S(z_i^{n-1} + z_i^{n-2} + \ldots + z_i + 1)$ unde S este valoarea comună a sumelor S_{0n}, $S_{1n} \ldots S_{(n-1)n}$. z_i fiind o rădăcină a ecuației $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots X + 1 = 0$, paranteza din expresia lui $P(z_i)$ este nulă.

Deducem $P(z_i) = 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

În problema nr. 6237 se demonstrează că pentru $k \neq \mathfrak{M}n$, polinomul $x^{k(n-1)} + x^{k(n-2)} + \ldots + x^k + 1$ este polinom α. Dacă $P(x)$ este un polinom α atunci $P(x^k)$ se divide cu $x^{k(n-1)} + x^{k(n-2)} + \ldots x^k + 1$. Deducem pe baza problemei 6237 că $P(x)$ fiind un polinom α atunci pentru $k \neq \mathfrak{M}n$ și $P(x^k)$ este polinom α deoarece se divide cu $x^{k(n-1)} + x^{k(n-2)} \ldots + x^k + 1$ care se divid e cu $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

Exemple.

a) Fie polinomul

$$P(x) = 9x^{11} + 5x^7 - x^3 + 3x^2 + 1, \text{ se cere } S_{..}.$$

Pentru aceasta va trebui să adunăm coeficienții termenilor aparținînd progresiei geometrice infinite $x^2, x^{2+3}, x^{2+2.3} \ldots$, în cazul de față coeficienții lui x^2 și x^{11}. Avem : $S_{23} = 3 + 9 = 12$.

b. Pentru $n = 3$ să se arate că :

$$P(x) = mX^9 + (m+2)X^8 + X^5 - 2X^2 + (m+1)z + 1$$

este un polinom α.

Calculînd sumele S_{03}, S_{13}, S_{23} vedem că au aceeași valoare $S = m + 1$. Deducem că $P(x)$ se divide prin $X^2 + X + 1$.

c. Să arătăm că $X^{8888} - X^{7777} + 1$ se divide cu $X^2 - X + 1$ (probl. 4707). Observăm că $X^2 - X + 1 = (-X)^2 + (-X) + 1$. Punînd $y = -X$, apoi arătăm, pentru $n = 3$, că $y^{8888} + y^{7777} + 1$ este un polinom α.

Dan Voiculescu, elev, București ș. m. 21.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6164.

Fiind dat triunghiul oarecare ABC, fie B', C', picioarele înălțimilor duse din B și C iar B_1 și C_1 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta $B'C'$; dacă B_a și C_a sînt proiecțiile punctelor B' și C' pe latura BC a triunghiului să se arate că : a) B_1C_a este paralelă cu AC și C_1B_a este paralelă cu AB; b) C_aC_1 este paralelă cu BB' și B_aB_1 este paralelă cu CC'; c) Punctele B_a, C_a sînt pe cercul al cărui centru este la mijlocul segmentului C_1B_1 și trece prin B_1 și C_1.

(La admiterea în Facultatea de matematică-mecanică, București, 1963)

Soluție dată de *Weinberg Liuba*, profesoară București.

a) Din patrulaterul inscriptibil $C'B_1BC_a$, $\sphericalangle C'B_1B = \sphericalangle BC_aC' = 90°$, rezultă $\sphericalangle C'B_1C_a = \sphericalangle C'BC_a$.

Din patrulaterul inscriptibil $C'BCB'$, $\sphericalangle BB'C = \sphericalangle CC'B = 90°$ rezultă $\sphericalangle C'BC + \sphericalangle C'B'C = 180°$, dar și $\sphericalangle C_1B'C + \sphericalangle C'B'C = 180°$ deci $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle C_1B'C$. Rezultă $\sphericalangle C'B_1C_a = \sphericalangle C_1B'C$, deci B_1C_a și $B'C$ sînt paralele.

Analog avem : $\sphericalangle B'C_1B_a = \sphericalangle B'CB_a$ din patrulaterul inscriptibil $B'B_aCC_1$; $\sphericalangle B'CB = \sphericalangle B_1C'B$, avînd același suplement, de unde $\sphericalangle B'C_1B_a = \sphericalangle B_1C'B$, deci C_1B_a și AB sînt paralele.

b) $\sphericalangle C'C_1C = \sphericalangle C'CC_a$; $\sphericalangle C'CB = \sphericalangle C'B'B$, de unde $\sphericalangle C'C_1C_a = \sphericalangle C'B'B$, deci C_aC_1 și BB' sînt paralele.

Analog $\sphericalangle B'B_1B_a = \sphericalangle C'BB_a$ și $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle B'C'C$, de unde $\sphericalangle B'B_1B_a = \sphericalangle B'C'C$, deci B_aB_1 și CC' sînt paralele.

Deoarece BB' și AC sînt perpendiculare, rezultă că B_1C_a și C_aC_1 sînt perpendiculare.

Analog se mai arată că B_1B_a și B_aC_1 sînt perpendiculare și prin urmare punctele C_a și B_a se află pe cercul cu diametrul B_1C_1.

Problema 6165

În raport cu un sistem de coordonate carteziene rectangulare în plan, se consideră dreapta D definită de ecuația

$$(D)\ 2x\sin^2\frac{a}{2} + 2y\cos^2\frac{a}{2} + \cos a - 1 = 0$$

unde a este un parametru care variază.

a) Să se arate că oricare ar fi valoarea parametrului a dreapa D trece printr-un punct fix A ale cărui coordonate se cer.

b) Să se scrie ecuația parabolei care are focarul în punctul A și directoarea reprezentată de ecuația $y + 2 = 0$ și apoi să se traseze graficul acestei parabole.

(La admiterea în Facultatea de metematică—mecanică, București, 1963).

Soluție dată de *Brener S*, profesor București.

a) Ținînd seama de $1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$,

ecuația $2x\sin^2\frac{a}{2} + 2y\cos^2\frac{a}{2} + \cos a - 1 = 0$ se mai poate scrie:

$$(D)\ x\sin^2\frac{a}{2} + y\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = 0.$$

Notînd $\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} = \frac{\lambda}{\mu}$, ecuația devine $\lambda x + \mu y - \lambda = 0$ sau

$$\lambda(x - 1) + \mu y = 0$$

adică un fascicul de drepte, care trec prin punctul fix A (1,0)

b) A (1,0) fiind focarul și $(\Delta)\ y + 2 = 0$ ecuația directoarei unei parabole, dacă notăm cu $M(x, y)$ un punct curent de pe parabolă, atunci, prin definiție $MN = MA$, unde $N(x, -2)$ este proiecția punctului M pe (Δ). Scriind analitic relația $MN = MA$ obținem ecuația parabolei:

$$(y + 2)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \text{ sau } y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3).$$

Problema 6178

Se dă într-un plan trei puncte A, B, M și se notează cu O mijlocul lui AB.

Să se demonstreze că produsul scalar $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ este egal cu $OM^2 - OA^2$.

Punctele A și B fiind fixe și notînd $AB = 2a$, să se afle locul geometric al punctelor M din plan astfel ca produsul scalar al vectorilor $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ să fie egal cu $3a^2$.

(Bacalaureat, seria modern, Laos, 1962)

Soluție dată de *Weinberg Liuba*, profesoară București

Fie $\sphericalangle AMB = \alpha$. 1) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA \cdot MB \cos \alpha$. Din teorema cosinusului rezultă $\cos \alpha = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2MA \cdot MB}$

Înlocuind în (1) obținem $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2) - \frac{1}{2} AB^2$ (2)

Adunăm și scădem $\frac{1}{4} AB^2$ și aplicăm teorema medianei

$$OM^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2) - \frac{1}{4} AB^2,$$

rezultă

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - \frac{1}{4} AB^2 = OM^2 - OA^2$$

Notînd $AB = 2a$, avem $OA = a$. Punînd condiția $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3a^2$, obținem: $OM^2 - a^2 = 3a^2$ sau $OM^2 = 4a^2$ deci $OM = 2a$

Locul geometric al lui M este cercul cu centrul în O și de rază $2a$.

Observație. Relația $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - OA^2$ rămîne adevărată și în cazul cînd M se află pe dreapta AB.

Problema 6184

Să se afle limita expresiei

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

cînd n tinde către infinit, numărul radicalilor fiind n.

Benone Săvulescu, Buzău

Soluție dată de *Weinberg Liuba*, profesoară București

Șirul se poate scrie:

$$2^2(\sqrt{2 - \sqrt{3}}); \; 2^3(\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}); \; 2^4 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}; \ldots;$$

$$2^n(\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Dar avem $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$;

$$\sin \frac{\pi}{48} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2},$$

deci şirul se poate scrie astfel:

$$2^3 \sin \frac{\pi}{12};\ 2^4 \sin \frac{\pi}{24};\ 2^5 \sin \frac{\pi}{48};\ \ldots;\ 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3.2^n};\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^n}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Deci limita expresiei date este $\frac{2\pi}{3}$

Problema 6199

Să se arate că:

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{1}{2} tg\,(A - B);\quad \frac{\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin A + \sin B} = \frac{1}{2} tg \frac{A - B}{2},$$

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 2A + \sin 2B}{\cos (A - B)} \leqslant 2;\quad 0 \geqslant \frac{\cos A - \cos B}{\sin \frac{A - B}{2}} \geqslant -2$$

unde A şi B sînt două unghiuri ale unui triunghi ascuţitunghi.

C. Ionescu-Ţiu.

Soluţie dată de *V. Voinea*, S. m. 3 Bucureşti

a) Prima fracţie se mai poate scrie:

$$\frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} = \frac{4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2}}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} =$$

$$= \frac{\sin 2 \frac{A + B}{2} \sin 2 \frac{A - B}{2}}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\,(A - B).$$

b) A doua fracţie se mai poate scrie:

$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin A + \sin B} = \frac{\frac{1 - \cos A}{2} - \frac{1 - \cos B}{2}}{2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + B}{2}} = \frac{1 - \cos A - 1 + \cos B}{4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}} =$$

$$= \frac{\cos B - \cos A}{4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}}{4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}}.$$

c) $0 \leqslant \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos (A - B)} \leqslant 2$

$$\frac{2 \sin (A + B) \cos (A - B)}{\cos (A - B)} = 2 \sin (A + B),$$

dar

$$0 \leqslant A + B \leqslant 180° \text{ şi deci } 0 \leqslant \sin (A + B) \leqslant 1,$$

de unde

$$0 \leqslant 2 \sin (A + B) \leqslant 2.$$

d) Avem :

$$\frac{\cos A - \cos B}{\sin \frac{A - B}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}}{\sin \frac{A - B}{2}} = -2 \sin \frac{A + B}{2}$$

de unde rezultă

$$0 \geqslant -2 \sin \frac{A + B}{2} \geqslant -2.$$

Problema 6295

Să se arate că :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2(r + R)} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r};$$

$$6r \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant 3R$$

$$\sqrt{3}(a + b + c) \leqslant 2(4R + r)$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

(Elemente der Mathematik, Basel, 1963)

Soluţie dată de *Dan Voiculescu*, elev Bucureşti

a) Într-un triunghi există relaţiile :

$$a + b + c \leqslant 3R\sqrt{3} \text{ şi } Rr = \frac{abc}{2(a+b+c)}.$$

Între numere pozitive avem inegalitatea :

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

Utilizînd aceste formule obţinem :

$$(r + R)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(r + \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{\frac{R^2 r}{4abc}} = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{R}{a + b + c}} \geqslant \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{R}{3R\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

adică

$$\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Pe baza inegalității $\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ce există într-un triunghi și a inegalității algebrice $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc)$ avem:

$$h_a+b_b+h_c = 2R\sum \sin A \sin B \leqslant \frac{2}{3} R(\sin A+\sin B+\sin C)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} R.(\sin A+\sin B+\sin C) = \sqrt{3}R(\sin A+\sin B+\sin C)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

Împărțind de ambele părți cu $2S$, rezultatul precedent devine:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{h_a+h_b+h_c}{2S} \leqslant \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{4S}=\frac{\sqrt{3}}{2r}$$

adică ceea ce era de demonstrat.

b) O cunoscută inegalitate algebrică și al doilea rezultat de la punctul a) ne dau

$$9 \leqslant (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leqslant (a+b+c)\frac{\sqrt{3}}{2r}$$

adică

$$a+b+c \geqslant 6\sqrt{3}r.$$

Se știe însă că

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2 \geqslant 36.3.r^2$$

adică

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 36\,r^2$$

sau

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geqslant 6r$$

Pentru $A+B+C=180°$ avem:

$$\sum \sin^2 A = \sum(1-\cos^2 A) = 3-\sum \cos^2 A =$$

$$= 3-1+2\cos A\cos B\cos C = 2+2\cos A\cos B\cos C$$

Dar $\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}$

deci

$$\sum \sin^2 A \leqslant \frac{9}{4}$$

sau

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2,$$

adică

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant 3R.$$

c) Notăm $x = \frac{-a+b+c}{2}$; $y = \frac{a-b+c}{2}$; $z = \frac{a+b-c}{2}$ și cu S aria triunghiului ABC. Avem relațiile:

$$xr_A = yr_B = zr_C = \sqrt{xyz(x+y+z)} = S.$$

Dacă în inegalitatea algebrică

$(m_1+m_2+m_3)^2 \geqslant 3(m_1m_2+m_2m_3+m_1m_3)$ punem $m_1 = xy$;

$$m_2 = xz;\ m_3 = yz$$

obținem prin extragerea rădăcinei patrate:

$$xy+yz+zx \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)} = S\sqrt{3}.$$

Dar

$$xyz(r_A+r_B+r_C) = xr_A \cdot yz + yr_B \cdot xz + zr_C \cdot xy = S(xy+yz+xz) \geqslant$$

$$\geqslant S^2\sqrt{3} = xyz(x+y+z)\sqrt{3},$$

adică

$$r_A+r_B+r_C \geqslant (x+y+z)\sqrt{3}.$$

Dar

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2} \text{ și } r_A+r_B+r_C = 4R+r.$$

așa încît

$$2(4R+r) \geqslant (a+b+c)\sqrt{3}.$$

Problema 6301

Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{\sin 7x+\sin 3x}{\cos 9x-\cos x} = 0; \qquad \frac{\cos 9x-\cos x}{\sin 7x+\sin 3x} = 0;$$

$$\sin x+\sin 5x+\sin 13x = \sin 7x.$$

C. Ionescu – Țiu

Soluție dată de *Călugăreanu Grigore*, elev Cluj și *Chițescu Ion*, elev *București*. — Avem:

$$E. = \frac{\sin 7x+\sin 3x}{\cos 9x-\cos x} = \frac{2\sin 5x\cos 2x}{-2\sin 5x\sin 4x} = -\frac{\cos 2x}{2\sin 2x\cos 2x} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin 2x} = 0$$

ecuație care nu are rădăcini.

Apoi,

$$E_2 = \frac{\cos 9x - \cos x}{\sin 7x + \sin 3x} = -2 \sin 2x = 0$$

care are rădăcinile $x = 90°k$.

Ecuația:

$$\sin 13x + \sin x = \sin 7x - \sin 5x$$

se mai scrie:

$$2 \sin 7x \cos 6x = 2 \sin x \cos 6x$$

de unde $\cos 6x = 0$; $x = 30°k + 15°$ și

$$\sin 7x - \sin x = 2 \sin 3x \cos 4x = 0$$

pentru $\sin 3x = 0$; $x = 60°k$; pentru $\cos 4x = 0$, $x = 45°k + 22°30'$.

Problema 6302

Care poate fi cea mai mare arie a unui triunghi de laturi a, b, c care verifică inegaitățile: $0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$.

(*Matematikai lapok, Budapesta 1963*)

Soluția dată de *Voiculescu Dan* și *Chițescu Ion*, elevi București.

Aria triunghiului este dată de relația $S = \frac{ab \sin C}{2}$. Pentru ca S să fie maximă este suficient ca fiecare din factorii numărătorului să fie maxim, adică vom avea: $a = 1$, $b = 2$, $C = 90°$, ($\sin C = 1$).

În acest caz, $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$; $c = \sqrt{5}$; $2 < \sqrt{5} < 3$, ceeă ce corespunde. Aria maximă este

$$S = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Problema 6307

Să se rezolve ecuația:

$$(\sin x + \cos x)^{2n+1} + (\sin x - \cos x)^{2n+1} =$$

$$= 2^n \sqrt{2} \left[\cos^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Elena Flondor, București

Soluție dată de *Dăncilă Ion* elev, Sibiu. Avem :

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ iar } \sin x - \cos x =$$

$$= \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos\frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Substituind în ecuația dată, obținem :

$$2^n \sqrt{2} \left[\cos^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^n \sqrt{2} \left[\cos^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

care poate fi scrisă și astfel

$$\cos^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] =$$

$$= \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[-\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right],$$

sau :

$$\cos^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

adică :

$$\operatorname{tg}^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \text{ cu soluția reală } x = k\pi.$$

Problema 6321

Să se arate că dacă $x + y = a$, *atunci* $2^{n-1}(x^n + y^n) \geqslant a^n$ *unde* n *este număr natural,* x *și* y *fiind pozitivi.*

Matematika v skole, Moskova, *1963*

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. Demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 1$ avem : $x + y \geqslant a$ evident. Pentru n, cînd inegalitatea e adevărată pentru $n - 1$, avem :

$$a^n \leqslant (x^{n-1} + y^{n-1})(x + y) \cdot 2^{n-2} = (x^n + y^n + x^{n-1}y + xy^{n-1}) \cdot 2^{n-2}.$$

Vom arăta că :

$x^n + y^n + x^{n-1}y + xy^{n-1} \leqslant 2(x^n + y^n)$, adică $x^{n-1}y + xy^{n-1} \leqslant x^n + y^n$, sau :

$x^{n-1}(x - y) \geqslant y^{n-1}(x - y)$ sau încă, $(x^{n-1} - y^{n-1})(x - y) \geqslant 0$.

Dar,

$$x^{n-1} - y^{n-1} = (x - y)(x^{n-2} + x^{n-3}y + \ldots + y^{n-2}).$$

Evident, $E = x^{n-3} + x^{n-3}y + \ldots + y^{n-2} \geqslant 0$, deoarece este o sumă de termeni pozitivi. Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$(x - y)^2 \cdot E \geqslant 0$$

ceea ce este evident. Avem deci:

$$a^n \leqslant 2^{n-2}(x^{n-1} + y^{n-1})(x + y) \leqslant 2^{n-2} \cdot 2(x^n + y^n) = 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Problema 6322

Să se arate că dacă a, b, c sînt numere pozitive, atunci avem:

$$(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leqslant abc$$

The Mathematical Gazette, Londra, 1963)

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev S. m. 21, București.

Notăm cu x, y, z valorile celor trei paranteze și observăm că a, b, c, fiind pozitivi numerele $x + y$, $x + z$, $y + z$ sînt și ele pozitive. de unde deducem că cel mult unul din numerele x, y, z este negativ. Dacă unul din numerele x, y, z este negativ, atunci $xyz < 0$ și deoarece $abc \geqslant 0$ rezultă evident, $abc > xyz$. Eliminînd acest caz numerele x, y, z sînt pozitive, iar inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$xyz \leqslant \frac{1}{8}(x + y)(y + z)(x + z)$$

rezultat ce se obține imediat, aplicînd în paranteze inegalitatea $u + v \geqslant 2\sqrt{uv}$.

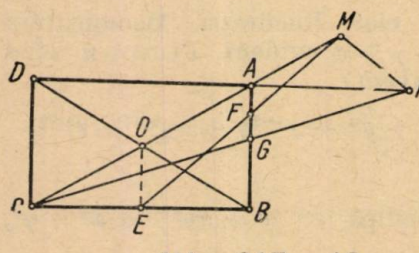
Problema E: 2132

În dreptunghiul ABCD se notează cu E mijlocul laturii BC, iar cu F și G două puncte pe AB astfel ca AF = FG. Dreapta EF întîlnește pe AC în M iar dreapta CG întîlnește pe AD în N. Să se arate că AM = MN.

Strătescu Ion, student

Soluție dată de *Ralescu Andrei*, cl VIII, Ș. m. 12 București.

Notăm cu O intersecția diagonalelor dreptunghiului $ABCD$.



Punctul E fiind mijlocul lui CB înseamnă că OE este paralelă cu AB. Din asemănarea triunghiurilor AMF și MOE putem scrie: $\frac{MA}{MO} = \frac{AF}{OE}$, dar $OE = \frac{1}{2}CD$,

astfel că $\frac{MA}{MO} = \frac{2AF}{CD} = \frac{AG}{CD}$ (1); căci $AF = FG$ din enunțul problemei.

Din asemănarea triunghiurilor ANG și DNC scriem :

$$\frac{NA}{ND} = \frac{AG}{DC}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă : $\frac{MA}{MO} = \frac{NA}{ND}$, astfel că MN este paralel cu DO și prin urmare triunghiurile DOA și AMN sînt asemenea. Figura $ABCD$ fiind un dreptunghi rezultă că triunghiul DOA este isoscel și deci și triunghiul asemenea cu el este isoscel. De aici avem : $AM = MN$.

Problema E : 2139

Știind că

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{și} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

se cere să se găsească condițiile ca $a + a'$, $b + b'$ *și* $c + c'$, $d + d'$ *să formeze de asemenea o proporție.*

Gh. Buicliu

Soluție. Din proporțiile date se scoate :

$$d = \frac{bc}{a} \quad \text{și} \quad d' = \frac{b'c'}{a'}.$$

Înlocuind aceste valori în

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{c + c'}{d + d'}, \qquad (1)$$

efectuînd calculele și reducînd termenii asemenea se ajunge la

$$a^2 b' c' + a'^2 bc = aa' b' c + aa' b c'.$$

Din ultima egalitate se scoate

$$ab' (ac' - ca') = ba' (ac' - ca') \text{ sau } (ab' - ba') (ac' - ca') = 0,$$

care nu poate avea loc decît dacă :

$$ab' - ba' = 0, \text{ deci } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} ; \text{ sau}$$

$$ac' - ca' = 0, \text{ deci } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Se găsesc rapoarte analoage dacă se scot valorile altor doi termeni decît d și d'.

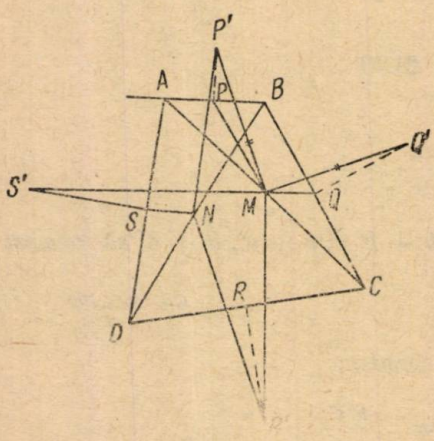
Deci proporția (1) are loc cînd raportul a doi termeni ai uneia din proporțiile date este egal cu raportul termenilor corespunzători ai celeilalte.

Problema E : 2140

Fie P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale patrulaterului $ABCD$ și P', Q', R', S' centrele patratelor construite în exterior pe aceleași laturi. Să se arate că dacă M și N sînt mijloacele diagonalelor AC, BD atunci $MP' = MQ'$, $MR' = MS'$, $NP' = NS'$, $NR' = NQ'$.

Să se exprime aria $PQRS$ în funcție de aria $ABCD$.

Gh. Buicliu



Soluție. Figura $MPBQ$ fiind prin construcție paralelogram, avem $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MQB$, și cum $MP = BQ = QQ'$, iar $MQ = PB = PP'$, rezultă că triunghiurile MPP', MQQ' sînt egale căci avem și

$$\sphericalangle MPP' = \sphericalangle MPB + \frac{\pi}{2} \text{ și } \sphericalangle MQQ' = \sphericalangle MQB + \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare $MP' = MQ'$.

La fel și pentru celelalte egalități.

Aria $ABCD = 2 \cdot$ aria $PQRS$.

Problema E : 2149

Dacă $xy+yz+zx \geqslant 0$ să se arate că :

$$(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) \geqslant x^4+y^4+z^4.$$

Tomescu I. Ion, student București

Soluție dată de *Ralescu Andrei*, elev București.

Inegalitatea de demonstrat se mai scrie :

$$x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + xz^3 + x^2yz + yx^3 + yz^3 + xy^2z + zx^3 + zy^3 + xyz^2 \geqslant x^4+y^4+z^4$$

$$xy^3 + xz^3 + yz^3 + yx^3 + zx^3 + zy^3 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 \geqslant 0$$

Ca să folosim ipoteza, punem în evidență factorul $xy + yz + zx$:

$$xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 = (xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Deoarece $xy + yz + zx \geqslant 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0$ rezultă că :

$$xy^3 + xz^3 + x^3y + yz^3 + x^3z + y^3z + x^2yz + zy^2z + xyz^2 \geqslant 0 \text{ sau}$$

$$(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) \geqslant x^4 + y^4 + z^4.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date la examenul de admitere în institutul Politehnic Galaţi, Facultatea tehn. prod. alimentare şi tehn. pescuitului, 1964

6750. Se dă triunghiul ABC şi înălţimea sa AD. În punctele B şi C se duc perpendicularele BE şi CF respectiv pe AB şi AC, astfel ca $BE = DC$ şi $CF = BD$.

a) Să se arate că triunghiul AEF este isoscel; b) Dacă B' şi C' sînt proiecţiile punctelor B şi C pe AE şi AF, să se arate că $AB'/AC' = AB^2/AC^2$ şi că patratele segmentelor AB, AC, BD, CD sînt respectiv pronporţioale cu segmentele AB', AC', $C'F$, $B'F$.

6751. a) Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}(a + x) \operatorname{tg}(a - x) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x}$$

b) Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}(a + x) \operatorname{tg}(a - x) = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}$$

6752. În triunghiul dreptunghic ABC sînt date: ipotenuza $BC = a$ şi unghiul $B = 60°$.

a) Să se afle catetele, înălţimea AD şi segmentele BD, DC.

b) În sfera de diametru BC se consideră o zonă de înălţime x. Să se determine x aşa încît diferenţa dintre aria acestei zone şi aria semicercului de rază x să fie egală cu aria laterală a conului cu vîrful în C şi raza AD.

6753. Fie ecuaţia $x^2 + 2px + q = 0$.

Să se găsească relaţia între p şi q astfel ca ecuaţia dată să aibă ca rădăcini $x_1 = \cos\varphi$ şi $x_2 = \sin\varphi$. Pentru ce valori ale lui p, unghiul φ poate fi în cadranul I, pentru ce valori în cadranul II sau IV şi pentru ce valori în cadranul III.

Facultatea de mecanică

6754. Se dă funcţia: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

a) Să se afle extremele şi punctele de inflexiune; b) să se afle asimptotele c) să se reprezinte grafic.

6755. Să se determine valorile parametrului a, pentru ca polinomul

$$P(x) = x^4 + x^3 \sin 3a + x^2 \sin 2a + x \sin a - 1$$

să fie divizibil cu $x - 1$.

6756. Se notează cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei:

$$2x^2 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha)x + \cos 2\alpha = 0$$

a) Să se arate că:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = 2\sin\alpha$$

b) Să se determine α astfel ca între rădăcinile ecuației date să existe relația:

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = 2 \sin \alpha .$$

6757. a. Să se determine parametrii m, n, p astfel ca polinomul

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx + p$$

să fie divizibil cu produsul $(x^2+1)(x+2)$.

b) Să se rezolve apoi ecuația $P(x) = 0$.

6758. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC. În piciorul D al bisectoarei unghiului drept se duce perpendiculara DE pe ipotenuză și paralela DF la BE, punctele E și F fiind pe AC. Să se arate că:

a) Triunghiul BDE este isoscel; b) $FC/FA = a^2/2bc$.

6759. Fie un triunghi ABC dreptunghic în A, având perimetrul egal cu 12 cm, iar B egal cu 30°.

a) Să se calculeze laturile triunghiului. b) Să se afle volumul corpului generat prin rotirea acestui triunghi în jurul bisectoarei unghiului C.

4760. Se dă un cerc de rază R și un punct P exterior cercului. Din punctul P se duc tangentele la cerc. Fie A și B punctele de contact. a) Să se arate că ortocentrul triunghiului PAB este simetric cu centrul cercului, față de dreapta AB. b) Să se afle lungimea tangentei din P cînd ortocentrul se află pe cerc. c) Să se afle locul geometric al punctului P astfel ca tangenta să fie egală cu raza.

6761. Într-o piramidă patrulateră regulată se cunoaște înălțimea de 10 cm și distanțele de la centrul bazei la una din fețele laterale de 6 cm. Să se afle: a) aria totală și volumul piramidei, b) raza sferei înscrise.

6762. Să se afle extremele funcției

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

și asimptotele graficului.

6763. Să se rezolve ecuația:

$$3 \cos 2x - 8 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$$

6764. Să se afle soluțiile reale ale sistemului:

$$(x + y)^3 + x^2y^2 (x + y) = 39$$

$$x^3y^3 + xy (x + y)^2 = 26 .$$

PROBLEME PROPUSE*

6765. Dintre cercurile care au drept coardă comună latura BC a triunghiului oarecare ABC, se consideră două: unul tangent în C la AC care taie pe AB, a doua oară în D, iar celălalt tangent în B la AB, care taie pe AC, a doua oară, în E. Să se arate că punctele A, F, H sînt coliniare și patrulaterul $BFCH$ este paralelogram, unde F și H sînt puncte ce se iau pe DC, respectiv BE (în interior) astfel încît $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{AB}$ și $\frac{BH}{HE} = \frac{AC}{AE}$ (În legătură cu problema 5630).

Tudor Căsăndroiu, București

6766. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{1 + ax}{x^2}$$ și se cere:

a) Să se construiască graficul funcției

b) Tangenta într-un punct M variabil al graficului funcției taie axa oy în punctul N, iar graficul funcției în punctul M' (a doua oară). Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.

c) Locul geometric al mijlocului segmentului NM'.

A. Stanciu, profesor Brăila

6767. Să se rezolve ecuația

$$2(\sin 13x + \sin 9x + \sin 5x + \sin x) =$$
$$= \sin 15x + 2(\sin 11x + \sin 7x + \sin 3x).$$

și să se verifice soluțiile obținute.

C. Ionescu-Țiu

6768. Să se determine suma fracțiilor ireductibile cu numitorul 3, cuprinse între numerele naturale m și n, unde $m < n$. Idem, dacă numitorul este 5.

* * *

6769. Pe laturile triunghiului ABC se iau respectiv punctele D, E, F astfel încît $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{n}{p}$ și $\frac{AF}{FB} = \frac{p}{m}$. Fie D', E', F' conjugatele lui D, E, F față de punctele B, C; C, A; A, B. Să se demonstreze că dacă cercurile de diametre DD' și EE' se taie în M și N, atunci cercul de diametru FF' trece prin M și N.

* * *

6770. Pentru n natural, numerele $4n^n$; $n(n!)^2$; $2(n+1)!$ sînt $\leqslant 2^{2^n}$. În ce caz avem semnul egal.

Dan Voiculescu, elev, București

6771. Prin vîrful A al unui triunghi ABC se duce o dreaptă variabilă, care face cu dreapta BC unghiul x. Fie B', C' proiecțiile vîrfurilor B, C pe (Δ) și M, N proiecțiile lui B', C' respectiv pe AB și AC.

---

*) IX (6765, 6768, 6778, 6783, 6786, 6788, 6791, 6794); X (6767, 6770, 6771, 6773, 6774, 6781, 6782, 6784, 6787, 6790, 6792, 6793); XI (6766, 6769, 6772, 6775, 6776, 6777, 6779, 6780, 6785, 6789). Soluțiile se primesc pînă la 1 iulie 1965.

a) Să se determine poziția dreptei (Δ) astfel ca MN să fie paralelă cu BC. Notînd cu I intersecția dreptelor $B'M$, $C'N$ să se arate că în acest caz, triunghiul $B'C'I$ este isoscel.

b) Să se determine unghiul x astfel ca dreptele $B'M$ și $C'N$ să se întîlnească pe înălțimea AD a triunghiului ABC. Să se arate că în acest caz IA este mediana triunghiului $B'C'I$.

Gh. D. Simionescu

6772. a) Să se reprezinte grafic funcțiile

$$f_1(x) = \sin x + 2\cos x \text{ și } f_2(x) = \cos x - 2\cos 2x.$$

b) Să se arate că:

$$-1 \leqslant 2\sin x + \cos 2x \leqslant 1{,}5;$$
$$-3 \leqslant 2\cos x - \cos 2x \leqslant 1$$

c) Să se afle valorile lui x și să se verifice cazurile cînd avem semnul egal.

C. Ionescu-Țiu

6773. Între elementele unui triunghi oarecare există relația:

$$p\sum (b-c)\operatorname{ctg}A = 8R^2 \sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

Strătescu Ion, student București

6774. Folosind notațiile obișnuite într-un triunghi să se demonstreze relația

$$\left(\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right)^2 = \left(\frac{r_b - r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right)^2 = \left(\frac{r_c - r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right)^2 = 8Rr_v.$$

C. Herling, București

6775. Să se afle maximum și minimum expresiilor:

$$E_1 = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$$
$$E_2 = \cos x + \cos y - 2\sin(x+y)$$
$$E_3 = \sin x + \sin y + 4\cos(x+y)$$
$$E_4 = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$$
$$E_5 = \sin x + \sin y - 2\sin(x+y)$$
$$E_6 = \cos x + \cos y - 4\cos(x+y)$$

cînd x și y variază între $0°$ și $360°$.

C. Ionescu-Țiu

6776. Să se afle valoarea fracției:

$$F(x) = \frac{a^m(x^n + b) - x^m(a^n + b)}{a^n(x^m + b) - x^n(a^m + b)}$$

pentru $x = a$

Liviu Pîrșan, București

6777. Pe muchiile unui tetraedru regulat care pornesc din vîrful A se construiesc punctele L, M, N cu $AL = l$, $AM = m$, $AN = n$.

Să se demonstreze că distanța h de la vîrful A la planul LMN este dată de relația

$$\frac{1}{h^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{np} + \frac{1}{mp}\right).$$

Să se calculeze maximul lui h pentru:

a) $m + n + p =$ constant

b) $mnp =$ constant

Ioan Tomescu, student București

6778. Să se afle cel mai mic număr de 6 cifre care îndeplinește condițiile a) prima și ultima cifră sînt egale, b) are 5 cifre distincte c) suma primelor 3 cifre este egală cu suma ultimelor 3 cifre d) numărul format de primele 2 cifre este divizibil cu 5 e) este divizibil cu 38.

Serban I. Grigorescu, student București

6779. Se dau două drepte $x'x$ și $y'y$ concurente în O și un punct P. Prin P se duc două drepte variabile PA (A pe $x'x$) și PB (B pe $y'y$), care păstrează între ele un unghi constant α. Să se arate că locul geometric al proiecției punctului P pe AB este în general un cerc.
(generalizarea problemei 4500).

Petre Liviu, profesor Tîrgoviște

6780. Să se afle toate perechile de numere întregi (x, y) cu proprietățile:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \text{ și } x > 2,\ y > 2$$

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

6781. Se dau n puncte ($n < 3$) în plan astfel încît orice dreaptă ce trece prin două din aceste puncte să nu treacă și printr-un al treilea. Există oare un cerc, care să treacă prin minimum 3 din aceste puncte fără să conțină nici un alt punct în interior.

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

6782. Să se afle toate soluţiile reale ale sistemului:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p\,(x^2 + y^2)$$

$$xy - \frac{x}{y} = p\,(x^2 + y^2)$$

unde p este un parametru real.

Olimpiada matematică R.D.G., 1964

6783. Să se găsească toate numerele de două cifre astfel încît formînd cuburile lor şi stergînd toate cifrele cu excepţia ultimelor două să obţinem numărul iniţial.

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

6784. Se dau în spaţiu 4 puncte fixe, nesituate în acelaşi plan: A, B, C, D. Prin A şi B se duc dreptele paralele (Δ), (Δ'). Fie M proiecţia lui C pe (Δ) şi N proiecţia lui D pe (Δ'). Se cere locul geometric al mijlocului segmentului MN cînd dreptele (Δ), (Δ') variază ca poziţie, rămînînd paralele între ele.

* * *

6785. Să se determine polinomul $P(x) = a_0x^p + a_1\,x^{p-1} + a_2\,x^{p-2} + \ldots + a_{p-1}\,x + a_p$, astfel încît $P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = n^{p+1}$ pentru orice n natural.
(Generalizarea problemei 6362).

Dăncilă Ion, elev, Sibiu

6786. Să se construiască un triunghi isoscel cunoscînd înălţimile.

* * *

6787. Într-o adunare a două numere de 5 cîfre s-au pus cît o literă în locul unei anumite cifre şi a rezultat

$ABCDE + EDCBA = FFFFF$

În cîte feluri este posibilă operaţia.

Matematikai Lapok, Budapesta, 1964

6788. Pentru care valori ale lui x avem:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x - \sqrt{x}}}\,?$$

* * *

6789. Într-un patrulater oarecare $ABCD$ se consideră segmentele $AM = MP = PB$ şi $DR = RS = SC$. Punctele M,P sînt pe segmentul AB iar R,S sînt pe DC. Să se arate că aria patrulaterului $ABCD$ este de trei ori aria patrulaterului $MPRS$.

Matematica v şcole, Moscova 1964

6790. Să se arate fără tabele, că

$$\frac{2\cos 20^\circ + 2\sin 20^\circ - 1}{2\cos 20^\circ - 2\sin 20^\circ - 1}\operatorname{tg} 25^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

Matematica v şcole, Moscova 1964

6791. Fie triunghiul isoscel $A_1A_2A_3$. Să se determine poziţia punctului A_4 din plan, astfel ca triunghiurile $A_1A_2A_4$; $A_1A_3A_4$; $A_2A_3A_4$ să fie isoscele (Se va lua $A_3A_1 = A_3A_2$.)

E. Popa, elev Iaşi

6792. Să se arate că:

$$(ax+1)^{(a-1)n+a} + (ax)^{a-1} + C_a^1(ax)^{a-2} + \ldots + C_a^{a-2}(ax) + C_a^{a-1}$$

se divide cu:

$$(ax)^a + C_{a+1}^1(ax)^{a-1} + \ldots + C_{a+1}^a,$$

a şi n fiind numere naturale. (Generalizarea problemei 6333.)

Acu Dumitru, student Cluj

6793. Într-o sferă cu raza R se înscrie o piramidă patrulateră regulată a cărei volum este $V = \frac{64\,R^3}{81}$. Să se calculeze unghiul făcut de muchiile laterale cu planul bazei piramidei.

C. Săndulache, profesor Negreşti Iaşi

6794. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{a^2(b+c)}{a-x} + \frac{b^2(c+a)}{b-x} + \frac{c^2(a+b)}{c-x} = 3(ab+bc+ca)$$

şi să se arate că pentru oricare a, b, c numere reale rădăcinile sînt reale.

C. N. Tudor, Bucureşti

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *

E: **2281.** Un cooperatist a primit pentru munca prestată 1500 kg grîu şi 800 kg porumb, în două rînduri; la avans şi la sfîrşitul anului, astfel: la avans: porumbul primit reprezenta 1/2 din cantitatea de grîu primită, iar la sfîrşitul anului porumbul primit reprezenta 5/9 din cantitatea de grîu primită acum. Cît porumb a primit la avans.

Grigorescu Nicolae, Dăeni Dobrogea

---

*) V (E: 2281, 2283, 2286); VI (E: 2282, 2292, 2293); VII (E: 2287, 2288, 2291); VIII (E: 2284, 2285, 2289, 2290), Soluţiile se primesc numai de la elevii claselor V—VIII pînă la 1 iulie 1965.

E : **2282.** Să se calculeze :

$$E = \frac{10 - 8\left\{0{,}46\ (1) + \frac{1}{24} - \left[\frac{19}{3} - (6 + 0{,}0675 : 1{,}215)\right]\right\}}{3{,}9986 + \frac{1}{10}\sqrt{0{,}000196}}$$

E : **2283.** Să se calculeze :

$$1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1{,}5}}}}\left[5 - \frac{7}{8}(1 + 0{,}405 : 0{,}945) + 1{,}25 - \right.$$

$$\left. - 0{,}(1) \cdot (5 - 0{,}32 : 0{,}35) : \frac{1}{9}\right].$$

C. Săndulache, profesor Negreşti Iaşi

E : **2284.** Să se arate că dacă $(a + b + c)^2 = ab + bc + ca$ avem :

$$(a + b + c) = a^5 + b^5 + c^5$$

Acu Dumitru, student Cluj

E : **2285.** Se consideră pe o dreaptă punctele A, B, C. Să se demonstreze relaţiile :

$$BA^3 + CB^3 + AC^3 = 3BA \cdot CB \cdot AC$$

$$\frac{BA^3 + CB^3 - 2BA \cdot CB \cdot AC}{AC^3 + CB^3 - 2BA \cdot CB \cdot AC} = \frac{CA}{AB}$$

G. Georgescu, Craiova

E : **2286.** Un iepure fuge la 100 de paşi înaintea unui cîine. Iepurele mai face 250 paşi şi distanţa dintre ei nu mai este decît de 30 de paşi. Cîţi paşi va mai fugi iepurele pînă ce va fi prins de cîine.

Din probleme vechi chinezeşti

E : **2287.** O plantă de apă creşte în prima zi 3 cm iar în fiecare din zilele următoare pe jumătate cît în precedenta. O altă plantă de apă creşte în prima zi cu 1 cm iar apoi în fiecare din zilele următoare de două ori cît în ziua precedentă. Presupunînd viteza de creştere în decursul unei zile drept constantă să se afle în cîte zile ambele plante ating aceeaşi înălţime.

Din probleme vechi chinezeşti

E : **2288.** O femeie ţese în prima zi 5 coţi de pînză, apoi zilnic ţese cu o anumită lungime mai puţin, pînă ce în a 30-a zi nu mai ţese decît un cot. Cîtă pînză a ţesut femeia în aceste treizeci de zile.

Din probleme vechi chinezeşti

E : **2289** : Să se arate că :

$$(adx + x)^2 + [(ac + bd)\,x + y]^2 + (bcx + y)^2 =$$
$$= (acx + y)^2 + [(ad + bc)x + y]^2 + (bdx + y)^2.$$

L. Pîrşan

E : **2290.** Să se rezolve ecuaţia

$$2Ax^2 - 1 = 0 \text{ unde } A = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

E : **2291.** Pentru organizarea unei excursii în Deltă, pionerii şi şcolarii unei şcoli au economisit la CEC în cursul anului şcolar suma de lei 7912. Ştiind că din clasele a VI-a s-au înscris cu 6 elevi mai mult decît cei din clasele a V-a, iar din clasele a VII-a cu 4 elevi mai puţin decît cei din clasele a VI-a şi că elevii de clasa a VII-a au depus mai puţin cu 344 lei decît cei de clasa a VI-a, să se afle cîţi elevi au participat la excursia organizată de şcoală şi ce sumă a economisit fiecare clasă.

Nelu I. Dobre, Merei, Buzău

E : **2292.** Suprafaţa destinată culturii grîului şi porumbului dintr-o G.A.S. este arată de 3 brigăzi de tractoare. Prima brigadă ară 65% din suprafaţa arată de a treia, iar a doua cu 60 ha mai puţin decît a treia. Ştiind că a doua brigadă ară cu 15% mai mult decît prima, să se afle suprafaţa repartizată pentru fiecare din aceste două culturi ştiind că ele se află în raportul de 7/8.

Nelu I. Dobre, Merei, Buzău

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME. EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 noiembrie 1964 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme de la școlile din localitățile cu inițialele A—Z, după cum urmează :

1. *Popescu Eleodor* (cl. XI ș. m. 1 Tr. Severin), 2. *Georgescu G.* (student fac. matematică-mecanică București), 3. *Voiculescu Dan* (cl. IX ș. m. 21 București), 4. *Bena I. Dorin* (cl. XI ș. m. 1 Caransebeș), 5. *Atanasiu Adrian* (cl. XI ș. m. Tîrgoviște), 6. *Geleriu Dan* (cl. XI ș. m. 3 Sibiu), 7. *Aron C. Constantin* (cl. XI ș. m. Pucioasa), 8. *Poenaru Paraschiva* (cl. VIII șc. generală Vlahi, Dobrogea), 9. *Turculeț Demostene* (cl. XI ș. m. Trușești), 10. *Cosmanciuc Dumitru* (cl. XI ș. m. Trușești), 11. *Oprescu Gabriel* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 12. *Chițescu Ion* (cl. XI ș. m. 10 București), 13. *Biscă Octavian* (cl. XI ș. m. 1 Craiova), 14. *Botez Dan* (cl. X ș.m. 17 București), 15. *Jurcă Ion* (cl. XI ș. m. 1 Lugoj), 16. *Noroc Constantin* (cl. XI ș. m. Trușești), 17. *Radu Vasile* (cl. XI ș. m. 2 Ploiești), 18. *Niculescu Constantin* (cl. XI Tîrgoviște), 19. *Radu Luminița* (cl. X ș. m. 10 București), 20 *Tonceanu Dan* (cl. X ș. m. 11 București), 21. *Niculescu G. G.* (student matematică-mecanică București), 22. *Arcip Petre* (cl. XI ș. m. Trușești), 23. *Catană Ilie* (cl. XI ș. m. Sinaia), 24. *Minculescu Gheorghe* (absolvent Ploiești), 25. *Mîrza Mihai* (cl. XI ș. m. Trușești), 26. *Stan Emil* (cl. X ș. m. 2 Ploiești), 27. *Mitroiu Cornelia* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 28. *Cistelecan Mihai* (absolvent Cluj), 29. *Ursulescu Octavian* (cl. XI ș. m. 11 București), 30. *Verveagă T.* (absolvent Bistrița), 31. *Cojan A. Marius* (cl. X ș. m. 1 Buzău), 32. *Turcu Ilie* (cl. IX ș. m. 1 Craiova), 33. *Buță Viorel* (cl. XI ș. m. Reșița), 34. *Ghițulescu Dan* (cl. XI ș. m. 3 Craiova), 35. *Vartan Florin* (cl. IX ș. m. 3 Tîrgoviște), 36. *Marinuș Radu* (cl. XI ș. m. 3 Sibiu, 37. *Dăncilă Ioan* (cl. XI Sibiu), 38. *Moisescu C. Ana* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 39. *Simion Gheorghe* (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 40. *Stan Mihai* (cl. VIII Petroșeni), 41. *Oprișiu Cornel* (cl. XI ș. m. Petroșani), 42. *Vrînceanu Vasile* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 43. *Bîrlog Corneliu* (cl. XI Pucioasa), 44. *Mihalca Dan* (cl. XI ș. m. 11 București), 45. *Wagner Richard* (cl. XIII șc. muzică Botoșani), 46. *Biltac Sabin* (cl. XI lic. militar Cîmpulung Moldovenesc), 47. *Smit Petre* (cl. X Roman), 48. *Sterian Cornel* (cl. XI ș. m. 19 București), 49. *Petraru Ovidiu* (cl. X Roman), 50. *Zăgan Dumitru* (cl. X Sibiu), 51. *Birsan Nicolae* (co. X ș. m. 1 Tîrgu Jiu), 52. *Bratu Constantin* (cl. X ș.m. Tîrgoviște), 53. *Lașiță Ileana* (cl. X ș. m. Sibiu) 54. *Farkaș Petru* (cl. IX ș. m. 1 Cluj), 55. *Trif Nicolae* (cl. IX ș. m. 2 Sibiu), 56. *Achiței Ioan* (cl. XI ș. m. Trușești), 57. *Bucur Liliana* (cl. XI Sibiu), 58. *Butnaru Dumitru* (cl. XI s. m. Trușești), 59. *Ilisei Florin* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 60, *Florea Gh.* (cl. XI ș. m. 1 Sighișoara), 61. *Stănescu Dan* (cl. X ș. m. 1 Ploiești), 62. *Floria Florian* (absolvent Ploiești), 63. *Steriu Dan* (cl. X ș. m. 2 Ploiești), 64. *Orășanu Laurențiu* (cl. VIII ș. m. 1 Ploiești), 65. *Niță Gabriela* (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 66. *Tilimpea Viorel* (cl. X ș. m. 2 Ploiești).

*

Pînă la 1 noiembrie 1964 s-au primit soluții bune la problemele propuse în G.M.B., de la :

AIUD, Șc. m. cl. XI Hamorszki Iosif (6405, 09, 20, 24, 36, 41, 48, 59, 67, 92, 504), Molnar Iuliana (6405, 09, 11, 22, 24, 53, 504, 07, 12, 39, 45).

ADJUD. Ș. m. cl. XI Cernăuțeanu Mircea (6420, 59, 61, 63, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 26, 37).

ALBOTEȘTI. Ș. elementară. Badea Manuela (2184, 85, 90—96).

ARAD. Ș. m. 1. *Ioan Slavici* cl. VIII itu Delia (6482, 88, E : 2186, 93, 96, 201, 06). Lucuța Petru (6356—59, 68, 70—75, 88, 89, 420, 24, E : 2154—85, 87, 90—96), cl. IX Aldea Marilena (E : 2181, 83, 84, 87, 91, 96, 209), Betea Dan (6356, 70, 89, 458——61, E : 2155, 60, 7886), Volintir Petru (6489, 527, E : 2175, 83, 86, 87, 89, 209, 427).

Ș. m. 5 cl. X Nudean Teodor (6316, 30, 45, 56, 57, 59, 66, 67, 71, 72, 89).

BACĂU. *Ș. m. 1* cl. XI Ninău Antonel (6356—62, 65—70, 72, 73—77, 86—89, 93)

Ș. m. 2 cl. X Buruiană Marcel (6358——60, 65—68, 71, 77, 88, 96, 93).

BAIA MARE. *Ș. m. 1* cl. XI Bitiș Clara (6420, 24, 28, 59, 61, 63, 501, 10, 15, 22, 26, 36).

BĂICOI, cl. VII Iancu Elena (E : 2161, 63, 64, 71, 72, 85, 91).

BĂILEȘTI (Oltenia). *Ș. m.* cl. XI Vînătoru Mircea (6356m, 59, 67, 70, 72, 86, 459, 61).

BÎRLAD. *Ș. m. 3* cl. IX Ghiur Gheorghe (E : 2154, 55, 60, 63, 67, 71, 74, 75, 78, 81, 83), Ionescu Valeriu (6389, 459, E : 2154, 55, 60, 63, 67, 81, 83, 87), Nechifor Ionel (E : 2154, 55, 60—63, 68, 74, 75, 81, 83, 84, 88, 91), Ulinic Maria (E : 2154, 55, 60—63, 69, 70, 73, 79—86, 91, 92, 94—96), cl. X Badea Lori (6360, 98, 414, 18, 20, 21, 24, 27, 45, 46, 54, 57, 59—62, 76).

BRĂILA Ş. m. 2 cl. XI Lăzărescu Vasile (6356, 58, 65—68, 70, 74, 89, 93), Frangu Octavian (6356, 58, 65—68, 70, 74, 89, 93)

BISTRIŢA, Absolvent *Verveagă T.* (6444, 45, 49, 54, 57—64, 66, 84, 90, 92—94, 503, 505—27, 39), *Ş. m. 1* cl. X Pleşca Constantin (6367, 68, 70, 71, 73, 420, 28, 43, 57—59, 61—63), cl. XI Buta Grigore (6444—46, 56, 57, 59—63, 80, 82, 84, 92).

BOTOŞANI. Şc. elem. nr. 8 cl. VIII Braie Ovidiu (E : 2153, 56, 58, 59, 61, 65, 68, 69). Şc. de muzică cl. VIII *Wagner Richard* (6344, 57, E : 2153, 56—59, 61, 64, 66, 68—70, 73, 76, 79, 82, 84, 85, 87, 90—96).

BOZOVICI. *Ş. m.* cl. X Lipătiţă Tiberiu (6457—61, 507, 10, 16, 19, 22, 23, 27), cl. XI Didiaga Iacob (6405, 20, 24, 28, 36, 56, 59, 61, 63, 92, 504, 10, 12, 15, 36).

BRĂNEŞTI. A. m. cl. X Minea Vasile (6356, 59, 67, 70—73, 89, 93, 458—51), Ştefănescu Călin (6356, 59, 67, 70—73, 89, 93, 458—61).

BRAŞOV *Ş. m.* cl. XI Zsido Ghörgy (6356, 58, 60, 62, 70, 76, 77, 82, 88, 89, 98, 400).

BREAZA. Liceul militar „D. Cantemir" cl. XI Filimon Nicolae (6356, 58, 62, 65—68, 70, 72, 73, 75, 77, 86, 88, 89, 93, 400), Vasilescu Ion (6457, 59, 61, 63, 76, 82, 88, 504, 10, 17, 45).

BUCUREŞTI. *Studenţi. Anca Tănase* (Inst. construcţii) (6393, 408, 09, 13—16, 20, 29, 42, 57—59, 61—64, 66, 68, 504, 09, 10, 12, 13, 15—19, 22, 23), Călbunaru Constantin (Fac. matematică) (6356, 57, 59, 60—62, 65—70, 72, 73, 75, 98). *Georgescu G.* (Fac. matematică) (6377, 81, 88—90, 93—95, 402—31, 34—49, 56—63, 66, 67, 70—77, 86, 88, 89, 91), Nicolae Sergiu (Inst. de Petrol şi gaze) (6446, 49, 55, 57, 59—64), 66, 67, 77, 80, 92, 504, 06, 10—15, 19—24, 35, 39), *Niculescu G. G.* (Fac. matematică) (6356, 58, 60, 67, 69, 77, 78, 79, 81, 89, 419, 21, 24, 27, 28, 45, 56, 58—61, 63, 87, 92, 98, 503, 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 36, 38, 46). Oprescu Gheorghe (Fac, matematică) (6404—16, 19—21, 24, 28, 29, 31—40, 42). Absolvenţi : Bucur Severina (6404, 05, 10—12, 92, 504—11, 24), Florescu Dumitru (medic) (6357—59, *N.* 68, 70—73, 75, 77, 86, 89, 93, 400), *Ş. m.jl Bălcescu*, cl. IX Brăileanu Ana (6356, 57, 67, 70, 72, 74, 75, 89, E : 2154, 60), cl. X Munteanu Maria (6366—68, 70—76, 88—90, 93, 99) cl. XI Andrei Romulus (6404, 05, 11, 14, 15, 36, 41, 57, 59—67, 80, 86, 92, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 34). *Ş. m. 3 Ion Neculce* cl. XI Russe Gheorghe (6356, 58, 65, 68, 70. 72, 73, 89, 93, 405, 09, 58, 59, 61—63—, 82, 86,92).

Ş. m. 5 Mihail Sadoveanu cl. VIII Stănculescu Alexandru (E : 2169, 71, 79, 82, 93, 202, 06), cl. VIII Tun Marilena (6389, E : 2154, 59, 68—70, 73, 82, 85, 92, 94).

Ş. m. 6 cl. X Gheorghiu Doina (6356—58, 66, 67, 70—73, 88—90, 416, 20, 21). *Ş. m. 7 I. L. Caragiale* cl. VII Popa Radu (E : 2153, 56—69, 61, 63, 64, 68). cl. VIII Hîncu Eugenia (6371, E : 2161, 63, 71, 73, 79, 82).

Ş. m. 10. cl. X Cănilă Carmen (6445, 503, 07, 10, 19, 25, 27, 36, 44, 54, 61). Rentea Anca (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 53, 54, 61, 63), Vasiliu Irina (6445, 503, 07, 16, 19, 25—27, 59, 61, 63, 71), *Chiţescu Ion* (6443—50, 56, 59, 61, 63, 65—67, 71, 71, 74—77, 80, 82, 84, 87, 90, 92, 96—99, 501, 04, 10, 26—28, 46) *Radu Luminiţa* (6440—45, 56—59, 61, 84, 85, 503, 04, 07, 10, 12, 16, 19—26, 36, 39, 54, 57, 59, 61, 65—67, 71, 74, 79, 26, 39 ...43), *Surcel Anca* (6459, 82, 87, 504, 10, 15, 19, 22, 23, 45, 84, 85).

Ş. m. 11 D. Cantemir cl. IX Pascaru Aurel (6357, 58, 67, 71, 73, 75, 93, 420, 24, E : 2174, 83), cl. X Popescu Eugen (6356, 59, 66, 68, 70—73, 93), *Tonceanu Dan* (6445, 46, 48—50, 56—61, 67, 69, 71, 76, 80, 82, 89, 92, 97, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19—24, 26, 36, 46). cl. XI Anuşca Mihaela (6356, 59, 73, 78, 79, 400, 504, 10, 12, 15, 16, 22, 26), Blidaru Dana (6445, 46, 48—50, 67, 69, 71, 82, 98, 512, 36, 39), Chircoriam Liliana (6356, 418, 29, 31, 61, 504, 07, 10, 15, 19, 22, 26), Drăguţescu Gheorghe (6356, 73, 431, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 27), Dumitru Petre (6356, 57, 69, 67, 70, 72, 73, 75, 78, 93, 400, 59, 61, 510), Ioniţă Doru (6536, 59, 73, 78, 89, 504, 10, 15, 16, 20, 22, 36, 73), Ionescu Florian (6356, 59, 67, 70, 72, 73, 75, 78, 93, 400, 59, 61, 510), Racu Maria (6356, 418, 29, 59, 61, 82, 504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 26), Rămureanu Eugen (6356, 89, 424, 31, 504, 12, 15, 16, 19, 22, 26), Ştefan Şerban Cristian (6356, 59, 62, 67, 70, 73, 78, 89, 400, 11, 20, 29, 59, 61), Zaharia Alexandru (6356, 57, 59, 66, 62, 70, 73, 74, 83, 83, 93, 99, 459, 61), Zăvoianu Olga (6356, 59, 73, 78, 89, 400, 504, 10, 12, 15, 16, 22, 25—27), Xifando Silvia (6356, 59, 73, 78, 89, 99, 418, 20, 80, 504, 10, 12, 25—27, 36), *Mihalca Dan* (6416, 24, 28, 43—45, 56, 63, 64—67, 69, 74, 76, 79, 80, 82, 92, 96, 98, 99, 502—05, 09, 10, 12, 15, 22, 46), Ştefănescu Mihail (6356, 59, 73, 99, 429, 50, 61, 504, 07, 10, 15, 19, 26), Todericiu Brîndușa (6356, 73, 78, 99, 411, 18, 20, 29, 31, 59, 61, 504, 07, 10, 15, 16, 19, 26), *Ursulescu Octavian* (6404, 13, 15, 19, 20, 22, 24, 23, 34, 36—42, 56, 59, 61—63, 65, 66, 68, 71, 80, 82, 84, 91, 92, 94, 94, 503, —26, 36, 39, 41, 43, —45, 54, 61—63, 67, 68, 72, 76, P).

Ş. m. 17 Matei Basarab cl. X Borangiu Theodor (6418, 20, 21, 24, 29, 57, 59, 61, 82, 510, 16, 22, 25), *Botez Dan* (6219—36, 38, 41, 57—60, 67, 70—75, 77, 80, 89, 92, 94, 308—12, 14, 16—18, 22, 23, 29, 30, 40, 45, 56—62, 65—76, 82, 88—90, 93, 400, 05, 11, 13, 14, 16, 18—21, 24, 28, 29, 31, 54, 55, 59—61, 63, 72, 76, 92).

Ş. m. 19 Ion Creangă cl. XI *Sterian Cornel* (6405, 11, 20, 22, 24, 28, 31, 36, 41, 45, 48, 49, 56, 57, 59, 61—63, 67, 75, 82, 86, 92, 503, 04, 07, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 36, 38, 39, 46).

Ş. m. 20 Gh. Şincai cl. IX Velula Temucin (E : 2143, 49, 54, 55, 63, 6344, 56, 58).

Ş. m. 21. cl. IX Singer Claude (6356, 57, 67, 68, 71, 73, 424, 54, 59, 61, 62, 82). *Voiculescu Dan* (6554—56, 58, 61, 63, 67, 68, 601, 05, 16, 18, 41, 42, 46, 49, 53, 50—63, P.N.A).

Ş. m. 23. D. Bolintineanu cl. XI Ioaniţescu Constantin (6420, 52, 504, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22, 26, 38).

Ş. m. 34 C. A. Rosetti cl. X Cernicica Tatiana (6459, 61, 62, 510, 26, 27—31, 39, 41, 45), Grabovski Adrian (6443, 61, 62, 510, 26, 59). *Şc. de 8 ani 23,* cl. VIII Georgescu Marin Eugen (E : 2153, 54, 56, 57, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 68). *Şc. de 8 ani 71* cl. VIII Vasiliu Alexandru (E : 2153 54, 56, 57, 59, 61, 63, 64, 66, 68). *Şc. de 8 ani 76* cl. VIII Talianu Andruşca (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 90, 92, 96, 206).

Şc. de 8 ani 146 cl. VII Bădeascu Smaranda (E : 2176, 79, 82, 85, 87, 90—95).

BUHUŞI. Şc. m. cl. XI Schmitd Gabriel (6356, 59, 65, 67, 70, 72, 73, 77, 86, 88, 93, 98).

BUZĂU. Şc. m. 1 B. P. Haşdeu cl. XI *Cojanu Marius* (6388, 90, 99, 405, 09, 16, 20—22, 24, 25, 28, 31, 34, 39, 41, 46, 49, 57, 59—63, 69, 82, 87, 92, 93, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 38, 44, 44), *Şc. m. 2* cl. IX Gavrilă Şerban (6420, 21, 24, 27, 29, 31, 43, 46, 59—61. 75, 82, 507, 10, 19, 25, 27, 32).

Şc. m. 3 cl . VIII Mogoş I. Gheorghe (E : 2174, 77, 78, 83, 86).

BUZIAŞ. Şc. m. cl. VIII Albu Elena (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 91—03, 95, 202), Aldam Ion (E : 2169, 71, 82, 84, 85, 87, 91, 97), Reinert Edith (E : 2169, 71, 82, 84, 85, 87, 91, 92, 94)

CALAN. Şc. m. cl. VI Bal Corneliu (E : 2154, 61, 63, 64, 68), cl. X Aghenitei Chirică (6356, 57, 59, 60, 67, 70—73, 88, 89, 93, 98, 400).

CALVINI. Şc. de 8 ani cl. VIII Boncu Elena (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 81, 92, 96).

CARANSEBEŞ. Şc. m. 1. cl. VIII Ştefăneanu I. Mircea (6358, 75, 86, E : 2156, 58, 62, 65, 69—71, 74, 75, 79, 82—85, 90—96), cl. XI Covăsală Pavel (6366—68, 70, 72, 75, 89, 93, 420, 24, 28, 41, 59, 61, 62). *Bena I. Dorin* (6405, 11, 14, 19, 12, 22, 27, 33, 37, 38, 43—49, 56—67, 69—71, 76, 79, 80, 82, 84, 86—88, 92, 97, 98, 503—07, 10—12, 14—16, 19—27, 32, 34, 36—40, 42—44, 46, 47).

CAREI. Şc. m. cl. IX Pop Gemma (6526 ; E : 2169—71, 78, 80, 81, 83, 94).

CARACAL. Şc. m. cl. VIII Mitrache Doru (6482, E : 2154, 60, 78, 80, 85, 92, 94, 96).

CENADE. Şc. m. de 8 ani cl. VIII Olar Mihai (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 91—93, 95).

CERNAVODĂ. Şc. m. cl. XI Isăroiu Ion (6444, 45, 48, 58, 59, 61—63, 67, 69, 72, 82, 86, 96, 504, 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 27—29, 43, 46).

CÎMPINA. Şc. m. 1 cl. VIII Georgescu Horia (E : 2155, 60—62, 68, 69, 84, 87), cl. IX Sbîrnea Ion (6389, 482, E : 2154, 60, 75, 77, 81, 86, 87), cl. XI Dumitrescu Brateş Raluca (6428, 54, 57, 59, 61, 62, 504, 10, 12, 15, 16), Rotaru Alexandru (6419, 24, 59, 61, 63, 504, 10, 12, 19).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Liceul militar „Ştefan cel Mare" cl. XI *Biltac Sabin* (6357—59, 65, 70, 75, 88, 93, 405, 18, 24, 28, 41, 58, 59, 61—63, 67, 69, 82, 87, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 36, 45, 47). Borşan Ion (6428, 57—59, 61, 62, 07, 93, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 36), Mamo Cristian (6416, 20, 21, 24, 27, 28, 34, 57—59, 61—63, 67, 82, 515, 19, 22, 23), Mascan Marius (6356, 79, 87, 403, 405, 409, 411, 21, 24, 41).

CLUJ. Şc. m. N. Bălcescu cl. VII Berna Corina (E : 2184, 86, 90—96), dl. VIII Man Augustian (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 91, 97—99), Moşneagu Lucian (E : 2185, 92—96, 98, 202), cl. IX Fărcăşanu M. (6370, 4559, 60, 510, 26, E : 2154, 55, 60, 63, 67, 86, 209), Stoian Daniela (6443, 59—61, 82, 510, 16, 22, 26), *Farkaş Petru* (6402, 03, 05—07, 11, 13—16, 18—21, 24, 27—29, 31, 34, 43, 44, 57—63, 67, 69, 76, 82, 89, 92), Trif Damian (6418, 20, 24, 29, 31, 59—62, 76, 82, 26), cl. XI Kaytor Irina (6405, 11, 20, 28, 59, 61, 63, 504, 10, 12, 15, 22), Olaru Ana (6405, 11, 20, 28, 41, 59, 61, 63, 92, 504, 12, 26), Weisz Gheorghe (6356—60, 62, 67, 68, 70—73, 75, 77, 88, 89, 98, 400). Absolvent *Cistelecan Mihail* (6444, 48, 51, 52, 67, 68, 71, 75, — 77, 84, 87, 91—93, 503—22, 24, 25, 27, 39, 42).

Şc. *m. E. Racoviţă* cl. VIII Sinca Aurelian (E : 2153, 58, 59, 61—66). cl. IX Lascu Ioan (6420, 24, 55, 57, 59—62, 510, 25—27).

COGEALĂC. Şc. de 8 ani Tariverde cl. VII Stere Mitică (2173, 85, 91—94, 98, 201, 02).

CONSTANŢA. Şc. m. 2 cl. IX Blană Ionel (6356—58, 62, 67, 70, 72, 73, 89, 93, 400).

CRAIOVA. Şc. m. 1 Dincă Vasile (6357, 58, 67, 70, 72, 73, 89, 93, E: 2154, 55, 60, 67, 83), *Turcu Ilie* (6356, 60, 62, 66, 67, 70, 72—75, 82, 89—90, 93, 95, 98, 429, 43, 44, 57, 59—62, 82) E: 2154, 55, 60, 67, 74, 75, 78, 81, 83, 86, 87, 89). Cl. XI *Biscă Octavian* (6356—62, 65—78, 80—82, 88—90, 93—96, 99, 400, 05, 06, 18, 20, 21, 24, 28, 31).

Şc. m. 2 cl. X Dăescu Dumitru (6357, 58, 67, 73, 75, 89, 424, 57, 58, 59, 61, 519), cl. XI Năstase Florea (15, 24, 28, 36, 41, 86, 504, 05, 07, 82, 25—27, 36, 44, 45). Smarandache Emilia (6356—58, 60, 65—67, 70, 79, 73, 89). Ş. c. 3 cl. XI Diaconescu Mihaela (6330, 57, 59, 65, 66, 68, 72, 86, 93, 420, 424). *Ghiţulescu Dan* (6409, 11, 20, 27, 28, 31, 44, 54—63, 67, 69, 80, 82, 86, 87, 89, 92, 98, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 45). *Şc. m. 4* cl. XI Iordănescu Anca (6359, 65—74, 77, 86, 89, 90, 93).

CUGIR. Şc. m. cl. IX Buitaş Corina (6357, E: 2154, 55, 58, 61—63, 68).

DRĂGĂŞANI. Şc. m. elem. 1. cl. VIII Oltu Mihai E: (2169, 71, 73, 76, 79, 82, 85, 89, 91, 92, 94—96).

FARAOANI (BACĂU) Moldoveanu Leonida (stud. f. f.) (6356—58, 65—70, 72——75, 86, 89, 93).

FOCŞANI. Şc. m. cl. XI Fetcu Dinu (6356—60, 62, 70, 72—74, 89, 400).

FURCENI Şc. elem. cl. V Bşeahnă Emil (2192, 93, 95, 97, 98, 201, 06).

GALAŢI. Şc. m. 1 cl. IX Herşcovici Isaia (E: 2174, 75, 81, 83, 86, 87, 209; 6424, 57, 59, 61, 62, 510).

Şc. m. 4 cl. VI Fichman Rodica (E: 2169, 57, 59, 64, 69, 71, 84), cl. VII Caşu Eugen (E: 2153, 57—59, 64, 71, 82), cl. VIII Gheorghiu Virginia (E: 2153, 59, 69, 82), cl. XI Petrescu Victor (6356—60, 66—68, 70, 72—74, 89, 93).

Şc. m. 5 cl. VIII Menită Gabriel (E: 2168, 70, 79, 84, 85, 93, 95, 96), cl. IX Enache Lenuţa (E: 2184, 85, 91, 93, 95, 96), Gabroveanu Rodica (6459, 526, E: 2169, 84, 85, 93, 94—96, 201, 206). Pricopie Ioan (6424, E: 2174, 75, 77, 81, 83, 89), cl. XI Blaga Jenica (6504, 05, 07, 10, 12, 19, 22, 45, 46), Ciobătaru Ionel (6455, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 69, 82, 92, 6503, 04, 05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 45, 46), Coblaş Angelina)6458, 59, 61, 67, 82, 92, 503, 504, 05, 10, 15, 40), Filipescu Otilia (503, 04, 05, 07, 10, 15, 18, 19, 22, 45, 46), Marinescu Stela (6458, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 19, 22), Petrache Constantin (6503—05, 07, 10, 12, 15, 22, 23, 35, 46), Stoian Violeta (6424, 57—59, 61, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19), Pană Roxana (6503, 504, 505, 07, 10, 12, 15, 22, 23).

Şc. elem. nr. 10 cl. VIII Butunoi Florica (2153, 56—58, 61, 70, 73, 79).

Şc. elem. nr. 21 cl. VIII Caraghiosu Angela (2153, 56—59, 61, 63, 64, 69), Căraba Cornelia (E: 2156, 58, 59, 61, 68, 69, 70 73, 79, 85), Carabogdan Elena (E: 2169. 71, 73, 79, 82, 91, 93, 98, 203), Enache Dumitru (E: 2169, 73, 82, 85, 91—94, 98, 205), Pătru Mioara (2169, 73, 84, 85, 91, 96), Wexler Adrian (2182, 92, 95, 98—203, 06, 08).

Şc. elem. 23 cl. VIII Dejan Ovidiu (E: 2171, 82, 85, 92, 94, 200, 06). Costiniuc Florin (E: 2156, 61—66, 68, 71).

Şc. elem. 26 cl. VII Ionescu Mihai (2092, 93, 97—99, 104, 08, 09, 12, 15, 16, 21, 23, 26, 28—30, 33, 36, 46, 47, 61).

GHERLA. Şc. m. 1 cl. IX Baumgarten Alexandru (6356, 57, 66—68, 70, 73, 74, 89, 459). S.

Şc. m. 2 cl. X Irimescu Dorin (6367, 68, 70, 72, 73, 75, 88, 89, 93, 98).

GIURGIU. Şc. m. 1 cl. VIII Giscă Iulia (6455, 59, E: 2154, 60, 71, 79, 83, 84, 91), cl. XI Rada Mircea (6416, 22, 45, 56, 59, 61, 63, 84, 87, 504, 10, 12, 22). Şc. m. 2 cl. XI Măcăneaţă Miron (6359, 62, 65——68, 71, 74, 88, 459, 61, 62).

Şc. elem. nr. 6 cl. VIII Călinescu Mihai (E: 2153, 58, 59, 61, 64, 71, 73, 79, 82).

HALEŞ. Şc. elem. 1 cl. VII Dogaru Vasilica (E: 2170, 85, 91, 92, 94, 95, 96, 201, 02), cl. VIII Marinescu Maria (E: 2184, 85, 90—96).

HOREZU. Şc. m. cl. XI Buşe Maru (6418, 20, 21, 24, 31, 44, 57—62, 75, 507, 10, 12, 16, 19, 22, 25—27, 29, 34, 24).

HUNEDOARA . Şc. m. 1 cl. XI Lupu Alexandru (6357, 59, 60, 67, 75, 86, 89, 424, 41, 59, 61, 63).

IAŞI. Şc. m. 1 cl. V Rimer Matia (E: 2153, 56, 58, 68—70, 73, 82), cl. VIII Ioniţă Nicoleta (56—59, 63—66, 68, 69, 71—73, 79).

Şc. m. 2 cl. VIII Linde Radu (E: 2169, 71, 73, 76, 79, 82, 84, 85, 87, 90—94, 96).

Şc. m. 4 cl. VIII Focşa Gabriela (E: 2164, 69, 71, 73, 79, 82, 84, 85, 92, 93, 95).

Şc. m. 7 cl. VIII Bîrleanu Dorel (E: 2179, 82, 92—95, 202.

Şc. elem. 7 cl. VI Hagianu Doru (E: 2153, 56, 76, 79, 82, 84, 90—92, 95, 97) cl. VII Bilanca Radu (E: 2163, 71, 79, 82, 84, 85, 90, 91—95), Petrachioaie Doina (E: 2156—59, 61, 64, 66, 71, 73, 76, 79, 82), cl. VIII Danicov Liliana (E: 2136, 38, 53, 69, 71, 73, 82, 85, 91—96, 209).

Şc. elem. 14 cl. VI Poroşnicu D. Gabriela (E: 2169, 71, 73, 82, 85, 92, 93, 95, 97,

208, 06). Stancu Viorel (E: 2169, 73, 76, 79, 82, 85, 91–93).

ILIA. Şc. m. cl. XI Honaie Ioan (6356, 67, 68, 70, 71–73, 75, 78, 93, 94, 99). Vlad Virgil (6356, 57, 59, 67, 70, 72, 73, 75, 78, 94).

INEU. Şc. m. cl. IX Alexa Nicolae (E: 2161–63, 68, 71, 74, 79, 81, 83, 84, 91, 6368, 89, 93, 59).

JIMBOLIA. Şc. m. cl. IX Mănescu Ion (6359, 67, 70, 72–74, 77, 86, 89, 405, 11).

LUGOJ. Şc. m. 1 cl. VIII Sterian Virgil (E: 90–96), cl. XI *Jurcă Ioan* (6408, 16, 21, 28–29, 31, 36–38, 42, 45, 46, 48–50, 55–57, 59–63, 65–67, 71, 73, 74, 76, 82, 84, 87, 92, 93, 98, 503–07, 10–12, 14–16, 19–25, 27, 32, 36, 39, 46).

MĂRĂŞEŞTI. Şc. m. cl. VIII Cazacu Mihail (6420, 59, 61, E: 2175, 81, 84, 91, 209).

MEDIAŞ. Şc. m. 2 cl. IX Brădişteanu Smaranda (6420, 24, 55, 57, 58–62, 97, 98, 526, E: 2174, 75, 83), cl. X Georgescu Clement (6420, 24, 29, 31, 57–59, 61, 62, 70, 75, 503, 07, 10, 19, 22), Orban Elek (6314, 16, 17, 28, 38, 44, 45, 56–59, 65–68, 70–73, 75, 86, 88, 89, 98, 99).

MOARA SĂRACĂ. Şc. elem. cl. VIII Anca M. Elena (E: 2157, 58, 68, 69, 70, 73, 82, 83).

MURGENI. Şc. m. cl. X Cîrjă Gheorghe (6356, 57, 59, 67, 70, 75, 89, 93, 98, 400, 20, 21, 24, 31), Leu Ştefan (6356, 59, 60, 67, 70, 75, 93, 98, 400, 20, 24, 31), Popa Nicolae (6356, 57, 59, 60, 67, 70, 75, 89, 93, 420, 24, 31).

NĂSĂUD. Şc. m. 1 cl. VIII Ilioaie Vasile (6357, 60–63, 67, 68, 71, 74, 79, 83), Vălcan Emil (E: 2171, 75, 78–81, 83, 84, 91, 6420, 24, 59, 61), cl. X Kiselstein Aurel (6356–58, 66, 89, 90, 99, 400, 18, 20, 24, 31, 57).

NEGREŞTI (Neamţ) Şc. elem. cl. VIII Roibu Niculina (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 91, 92).

NEGREŞTI. (Oaş) Şc. m. cl. XI. Big Mihai (6459, 61, 63, 82, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25).

ONEŞTI. Ş. m. cl. VIII. Papanicolau Lefteris (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 91–93, 98, 202, 06). Cl. IX Timaru Ţheodor (6375, 405, 09–11, 16, 18, 24, 28, 31, 41, 57, 59, 61–63), Cheinic Leonard (6403–05, 09–13, 16, 20, 24, 28, 36, 41), Şerban Nicolae (6359, 73, 75, 88, 405, 09, 11, 20, 59, 61, 63, 92).

ORADEA. Ş. m. cl. VIII. Zavaschi Liana (E: 2161–63, 68, 71, 79, 84, 91). Cl. X. Bara Gheorghe (6356, 59, 67, 70, 83, 89, 93, 420, 24, 27, 59, 61). Cl. XI. Bordaş Arcadiu (6356–59, 61, 62, 67, 72–75, 89, 98, 400), *Negruţiu Vasile* (6309, 21, 41, 56–62, 65–68, 70–75, 77, 83, 86, 88–90, 93, 94, 98–400).

ORAVIŢA. Ş. m. cl. X Florescu Florian (6356–59, 67–70–72, 74, 89, 93, 420, 24, 27, 29, 31, 32, 34, 39).

OŢELUL ROŞU. Cl. VIII. Făroată Anghel (E: 2169–71, 73, 79, 82, 85, 92, 202, 06).

ORPIŞANI. Ş. m. cl. X Chişiu Ioan (6420, 24, 57–62, 510, 22, 25, 26).

OSTROVENI. Şc. 8 ani cl. VIII. Ionele Vergina (E: 2169, 82, 85, 90–93, 95).

PANCIU. Şc. m. cl. VII. Cumpăneţ Mariana (E: 2169, 73, 74, 82, 84, 85, 91, 202, 05, 06), Drăgan Diana (E: 2169, 70, 82, 85, 91, 92, 94, 97, 98, 210, 13, 15, 17), Luca Georgeta (E: 2156–58, 69, 70, 82, 91, 92, 97), Măru Mariana (E: 2169, 73, 74, 82, 85, 205, 06), Popa Dan (E: 2156, 58, 59, 61, 62, 66, 68, 69, 79). Cl. VIII. Burdilă Adrian (E: 2169, 71–73, 79, 82, 84, 85, 91–96, 202, 06), Cumpăneţ Elena (2185, 91, 93, 202, 06, 11, 13), Ghica Teodor (E: 2169–71, 73, 82, 91, 93, 95, 202). Cl. XI Tudorache Ion (6356, 57, 64, 67, 68, 70, 72, 73, 88, 90, 93).

PAUNEŞTI (Bacău). Cl. VI. Anghel Aneta (E: 2158, 63, 69–71, 82, 85, 92), Nica Lucia (E: 2169–71, 73, 79, 82, 84, 92), Neagu Viorica (E: 2169–71, 73, 79, 85, 90, 92). Cl. VII. Berbece Maria (E: 2166, 70, 71, 73, 76, 79, 82, 84, 85, 90–93, 95–97), Gheorghiu Gabriela (E: 2165, 70, 71, 73, 76, 79, 85, 90–93, 95–97, 201, 02), Novac Maria (E: 2159, 65, 68–70, 71–73, 76, 79, 82, 84, 85, 91–93, 96, 98), Rizuc Rodica (E: 2165, 70–73, 76, 83, 85, 92, 95–98, 202, 09). Cl. VIII. Banciu Virginica (E: 2161, 65, 70, 72, 76, 85, 90–93, 96, 98, 201, 02, 09), Bacalu M. Lucia (E: 2161, 65, 70, 85, 91–93), Berbece I. Maria (E: 2161, 62, 65, 66, 68–70, 72, 75, 79, 84, 85, 91, 95–96, 98, 201), Gîdea Otilia (6390, 434; E: 2170, 73, 74, 83–85 m, 88, 91–95, 200–03, 06), Neagu Elena (E: 2155, 65, 70–72, 79, 84, 90–93, 95, 96, 201, 02, 06, 09), Sandu I. Victoriţa (E: 2165, 69, 70, 72, 73, 76, 79, 84, 86, 90–93, 96, 98), Vişan Ştefan (E: 2165, 70, 72, 76, 83, 85, 90–95, 98, 202, 09).

PARVA. Şc. 8 ani cl. VIII. Rus Anton (E: 2184, 85, 90–96), Scurtu Vasile (E: 2184, 85, 90–96).

PETROŞANI. S. m. cl. VIII. Paicu Nicolae (E: 2123, 29, 30, 36, 38, 51, 52). *Stan Mihai* (E: 2174, 75, 79, 81, 83, 87, 89, 207, 09, 6420, 21, 24, 31, 41, 56, 59, 61, 62, 504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25–29, 34, 36, P). Cl. X Bălan Toma (6444, 45, 59, 60–63, 66, 516, 19, 22), Ioni Nicolae (6412, 24, 45, 59, 61–63, 66, 504–06, 10–12, 15, 16, 19–22, 24)-Cl. XI. *Oprişiu Cornel* (6405, 10, 11, 13, 14, 16, 20, 24,

28, 29, 33, 44, 45, 56, 57, 59—63, 66, 70, 71, 76, 92, 99; 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 46, 59).

PITEȘTI. Șc. elem. 8 ani nr. 4 cl. VI Ruse I. Lilian (E: 2136—38, 48, 53, 56, 57, 59—64, 67—69, 82, 202, 06). Cl. VIII. Păunescu Ștefan (E: 2169, 71, 82, 85, 91—94).

Șc. 8 ani nr. 17 cl. VIII. Burlacu Gheorghe (E: 2159, 64, 66, 79, 85, 92, 95, 96).

Ș. m. 1 cl. X. Mînasian Mardin (6420, 24, 31, 57—59, 61, 510, 16, 19, 22, 25, 26), Herescu Gabriela (6420, 24, 31, 57, 59, 61, 62, 510, 16, 19, 22, 25, 27). Cl. XI. Diaconescu Dorin Valentin (6402, 19, 24, 29, 31, 70, 74, 92, 504, 07, 10, 12, 18, 19, 23), Maftei Victoria (6356, 57, 59, 70, 72, 73, 420, 58—63).

PĂTĂRLAGELE. Ș. m. cl. VIII. Ghiță Eugen (E: 2154, 55, 62, 63, 67, 68, 6356——59, 67, 70, 89, 93). Cl. XI. Poșoiu Constantin (6356—58, 67, 68, 70—74, 89, 93).

PLOIEȘTI. Absolvent Florea Florian (6314, 57—59, 66, 72, 84, 88, 93, 94, 404, 05, 10—12, 20, 21, 24, 27, 28, 32, 37, 39——42, 58, 59, 61—63, 66, 505, 10—13, 15, 16, 20, 21, 24, 26), *Minculescu Gheorghe* (6356, 78, 90, 303, 08, 11—13, 20, 22, 24, 27, 31, 33, 34, 36—39, 41, 42, 45, 49, 55—59, 61—69, 78, 80, 84, 92, 98, 504, 06, 10—17, 19—24, 26, 34, 36, 39, 44, 46).

Ș. m. 1 I. L. Caragiale. Cl. VI. Busuioc Constantin (E: 2169, 93, 97, 98, 206), Condrescu Mihai (E: 2169, 82, 84, 92, 97, 98, 202, 06), Costache Dorin (E: 2153, 57, 59, 63, 64, 66, 71, 82), Papaiane Letiția (E: 2173, 93, 97, 98, 201, 06), Petrescu Alexandru (E: 2169, 70, 73, 92, 93, 95, 96, 91). Cl. VIII. Boaldă Nicolae (E: 2184, 85, 92, 96, 98, 201, 06, 07), Iordache I. Sorin (E: 2169—71, 76, 79, 82, 85, 91, 93, 95), Iosif Carmen Nicoleta (E: 2171, 79, 80, 84, 85, 91, 92), Nuțescu Adrian (E: 2169, 71, 73, 82, 85, 91—95, 98, 202, 03, 06), *Orășanu Laurențiu* (6329, 418, 20, 43, 44, 54, 59—63, 510, 19, 22, 26, 27, 34; E: 2181, 84—87, 90—96, 200——02, 04—09), Popescu Mariana (E: 2172, 74, 85, 87, 92, 94, 95, 96, 202, 03), Saines Manuela (E: 2169, 71, 79, 82, 85, 92, 96, 204), State C. Adrian (6328; E: 2151, 0——63, 71, 77, 79), Tămăduianu Daniela (E: 2158, 61, 71, 85, 91, 93, 95, 206). Cl. IX. Coman N. Constantin (6420, 24, 31, 59—61, 510, 22, 25, 26, 28, 32), Ene I. Constantin (6420, 24, 58—61, 75, 503, 10, 25—27, 32), Ghiță Veronica (6428, 58—61, 66, 89, 504, 10, 15, 19, 22, 26, 27), Moraru Eleonora (6421, 43, 59, 61, 82, 89, 526, 28, 34, 43; E: 2181, 87), Nicolae Amelia (6367, 70, 72, 74, 89, 400, 24, 43, 59—61), Nicolae I. Aurelian (E: 2173, 78, 80, 81, 83, 85—87, 90—96; 6459), Prelipceanu Minodora (6443, 54, 58—61, 82, 89, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27, 32, 43, 63), Zamfir Cristian (6443, 59, 61, 82, 510, 22, 25—28, 32, 34, 43), Vasiliu Constantin (6356—59, 60, 67, 68, 70, 72, 93, 420, 21, 24, 29, 31, 44—46, 58—61, 63, 65, 76, 82). Cl. X. Bucșa Viorel (6429, 34, 57, 59—63, 66, 92, 504, 10, 22, 26), Dumitru C. Maral (6457—63, 87, 503, 10, 11, 16, 19, 22, 25—27, 32, 54, 61, 63), Dumitrescu Gheorghe (6420, 24, 57, 59, 61, 62, 80, 503, 10, 15, 19, 26, 27, 32, 36), Gheorghe Ioana (6371, 72, 420, 57, 59, 62, 510, 16, 36), Ionaș Tudor (6457—62, 510, 16, 19, 20, 22, 24, 26, 35, 36), Pană M. Constantin (6420, 24, 57, 59, 61, 62, 65, 80, 503, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 32, 36), *Stănescu Dan* (6444, 45, 56—63, 75, 76, 80, 82, 84, 89, 92, 97, 99, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 38, 39, 40—46), Tomescu Pavelina (6420, 57, 59, 61, 62, 503, 16, 19, 24, 26, 27, 36). 29, 57, 59, 61, 504, 10, 15, 22, 26), Bungreanjanu Elena (6356, 58, 59, 65, 68, 70, 72, 75), Cîrstea Nina (6357, 58, 59, 65, 68, 72, 74, 75, 86, 93, 457, 59, 61), Ciolac Mariana (6366, 89, 405, 27, 28, 44, 45, 82, 510, 82), Cinstatinescu Florin (6356, 59, 61, 66, 67, 70—73, 86, 80, 93, 405, 09, 11, 14—16, 18, 20, 24, 28, 29, 31, 34), Dobrică Virgil (6356—58, 65, 67, 68, 70—72, 74, 86, 93), Donțu Grigore (6411, 24, 29, 41, 80, 82, 87, 89, 92, 503, 08, 10, 12, 15, 16), Dumitrescu Gabriel (6459—61, 63, 67, 80, 82, 84, 89, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 27, 43, Florea Sorin (6356, 57, 65, 67, 70—73, 77, 78, 86, 89, 90, 93, 400), Furtună Constantin (6405, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 31, 36, 41, 56, 59), *Ilisei Florin* (6356, 58—61, 65—68, 71—73, 77, 86, 88, 89, 93, 403, 05, 11, 16, 18, 20,—22, 24, 28, 29, 31, 34, 36, 41, 43—45, 48, 55—63, 66, 67, 74—76, 80, 82, 84, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 32, 34, 36, 38, 39, 43, 45, 46), Ionescu Florian (6358, 59, 405, 11, 57, 59—63, 67, 504, 10, 15, 19, 22, 35, 36), Ionescu A. Octavian (6428, 59, 61, 89, 504, 10, 15, 19, 22, 35, 36), *Ionescu Paul* (6308, 16, 56, 75, 76, 411, 20, 28, 45, 56, 59, 61, 63, 67, 80, 82, 84, 89, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 39, 45), Ivan Veronica (6356—58, 62, 66, 67, 70, 72, 73, 77, 86, 88, 405, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 36, 41, 59), Ivănescu Viorica (6356—59, 61, 65, 67, 68, 70, 71, 72, 75), *Mitroiu Cornelia* (6356—59, 62, 65, 68, 70—72, 74, 75, 77, 86, 93, 405, 09, 11, 16, 17, 20, 24, 27—29, 31, 41, 44——46, 49, 57, 59, 61, 63, 69, 80, 82, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—28, 39, 44, 46), *Mocanu Dan* (6358, 59, 65,

67, 68, 74, 93, 409, 11, 16, 20, 24, 28, 29, 41, 45, 46, 49, 57, 59—61, 63, 80, 82, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 27), *Moisescu C. Ana* (6357, 58, 60, 62, 68, 77, 78, 88, 89, 93, 98, 400, 03, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 30, 31, 36, 41, 56—63, 66, 67, 80, 82, 84, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 39, 45, 46), Naum Mariana (6420, 24, 28, 57—62, 66, 504, 10, 12, 22, 26), Niculescu Ilie (6405, 09, 11, 06, 20, 24, 28, 41, 49, 59, 61, 63, 80, 504, 10), *Nica C. Vasile* (6356—63, 65, 67, 69, 75—83, 87—90, 93, 97, 99, 400, 16, 21, 24, 28, 47, 98), *Niţă Gabriela* (6358—62, 65—68, 71, 72, 74, 75, 86, 89, 93, 405, 11, 20, 24, 26, 27, 31, 34, 50, 58, 60—63, 92, 504, 10, 15, 22, 26), *Oprescu Gabriel* (6356, 59—62, 65—78, 86, 89, 93, 400, 03, 05, 09—12, 14, 16, 18, 2—022, 21, 24, 28, 29, 31, 34, 41, 43—45, 48, 54—63, 66, 67, 74, 76, 80, 82, 84, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36), Păunescu Gheorghe (6419, 20, 24, 28, 59, 504, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 43), Postelnicu Cristian (6356, 58, 62, 70, 72, 75—77, 86, 88, 93, 405), Radu Constantin (6463, 92, 510, 15, 16, 19, 22, 28, 32, 35), Sădeanu Dan (6356, 62, 67, 63, 67, 68, 73, 424, 63, 504, 10, 12, 26), *Şendrea George* (6356—58, 62, 67, 68, 70, 72, 73, 75, 77, 86, 88, 93, 400, 05, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 28, 41, 56, 59, 61, 63, 92), Silaev Silvia (6358, 59, 61, 62, 65—68, 71, 74, 75, 86, 89, 93, 405, 11, 20, 27, 28, 44, 45, 59, 61, 82, 510, 22), *Stere Cornelia* (6363, 65, 66, 70, 74, 86, 89, 93, 411, 16, 20, 24, 28, 29, 34, 45, 57—63, 66, 83, 82, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 36), Stoica Cornelia (6424, 57, 59, 61, 63, 82, 504, 10, 12, 11, 22, 27), Turcanu Laurenţiu (6308, 16, 456, 59, 63, 65, 67, 80, 82, 84, 89, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26, 36, 39, 45), *Vrînceanu Vasile* (6405, 09, 11, 16, 17, 20, 24, 28, 41, 44, 45, 49, 59—61, 63, 80, 82, 89, 92, 97, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—29, 32, 38, 39, 44). Zara Dan (6367, 76, 416, 31, 57, 59, 61, 510, 12, 16, 19, 20, 22, 25, 27), *Simion Gheorghe* (6411, 44, 45, 47, 48, 55, 58—65, 67, 70, 72, 76, 79, 82, 87, 88, 97——99, 501, 03, 05, 07, 10—12, 14—28, 34, 36, 39, 44, P).

Ş. m. 2 cl. VII. Nicolaescu Traian (E: 2171, 79, 82, 90—93, 95), Lipănescu Costin (E: 2169, 71, 82, 85, 90, 93, 95), Petraşcu Mariana (E: 2169, 82, 85, 90—93, 95), Tănăsescu Doina (E: 2169, 82, 85, 90—93, 95), Teodorescu Paul Lucian (E: 2171, 79, 82, 85, 90, 91, 94, 202). Cl. VIII. Cărbunescu D. Violeta (6356, 75, 420, 59, 51; E: 2154, 55, 60, 61, 63, 67, 68), Cernea Raul Adrian (6356—58, 70, 72, 89, 400, E: 2154, 55, 67, 83), Dănică Rozalia (6420, 24, 59, 61, 510, 26; E: 2175, 83, 86, 209), Georgescu Alina (E: 2175, 81, 84, 86, 91; 6424, 59, 61, 510, 26), Georgescu Cecilia (6420, 24, 59, 61, 510, 26; E: 2175, 79, 83, 86, 91, 209), Georgescu Cristian (6359, 525, 26; E: 2171, 79—81, 84, 85, 87, 91, 209), Papuc Viorica (6356—58, 89; E: 2154, 55, 60, 67, 71, 83, 459, 61, 526; E: 2184, 86, 87, 91, 209), Radu C. Vasile (6356, 89; E: 2154, 61, 63, 79), Roşculeţ Valeriu (6356, 459; E: 2153, 55, 60, 67, 70, 71, 73, 79, 82, 84, 90—93), Tudor Stoica (6357, 80; E: 2149, 55, 61, 71, 79, 80, 83). Cl. IX. Beldescu N. Petre (6136, 56, 58, 70, 72, 73, 89, 400, 24; E: 2137, 49, 55, 67, 75, 83), Cernat Laurenţiu (6424, 59—61, E: 2171, 75, 79, 81, 83, 84, 86, 91), Enescu Gheorghe (6424, 59, 61, 510, 26) E: 2175, 78, 79, 81, 83, 84, 86, 87, 91), Ionescu Boeru Liana (6356, 59, 66, 67, 70, 73, 89, 429), Manolescu Cristiana (6356, 70, 72, 75, 88, 420, 59, 64: E: 2154, 55, 60, 67), Marica Petre (E: 2183, 86, 91, 209: 6418, 24, 57—59, 61, 76, 510, 22), Neagoe Paulina (6420, 24, 59, 61, 510; E: 2175, 79, 81, 83, 84, 86, 91, 209), Spiridon Maria (6459, 61, 89, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 32). Cl. X. Bădescu Alexandru (6356—60, 66—68, 71—75, 82, 86, 88—90, 93, 98, 99, 400), Dinu Cornel (6356, 57, 59, 68, 70, 72, 73, 93, 400, 16, 24, 28, 59, 61, 82), Georgescu Marius (6420, 24, 27, 54, 55, 57, 58, 60—62, 510, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 36, 44), Mazepa Lidia (6366, 67, 70—75, 89, 92, 400). Palancă Radu (6356, 68, 70—73, 93, 400, 20, 24, 58—62, 82), Soare Paula (6424, 26, 27, 59, 61, 510, 15, 16, 19, 23, 26, 36), Somai Gabriela (6356—59, 68, 70, 73, 76, 93, 403, 05, 06, 09, 11, 20, 24, 28, 36, 43, 45, 61, 63, 87, 92), *Stan Emil* (6403—07, 11, 13—21, 25, 27—29, 31, 36—46, 48, 54—65, 67, 69, 71, 73, 80, 82, 84, 87—89, 92), *Steriu Dan* (6402, 05, 11, 16, 18—21, 24, 25, 27—29, 31, 33, 34, 36, 40, 41, 43, 45, 46, 56—63, 67, 71, 75, 76, 79, 80, 82, 87, 89, 92), Tănăsescu Mariana (6356, 57, 66, 67, 70—73, 89, 93, 400, 20, 24), *Tilimpea Viorel* (6356——60, 65—78, 80, 82, 85, 86, 88—90, 93, 96, 98—400, 02, 05, 11, 13—16, 18—20, 23—25, 27—29, 34), *Ţintă* Mircea (6356——60, 66—68, 70, 73, 74, 90, 93), Voinea Iulian (6356—59, 67, 70, 72—74, 89, 93, 420). Cl. XI. *Radu Vasile* (6443—46, 48—50, 54, 67, 70, 71, 73—77, 80, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 503—05, 10—12, 14—17, 19—26, 29, 31, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 42, 46, 47, 54, 56, 61, 63, 74, 79), Sulcică Carmen (6416, 24, 57, 59, 61, 63, 82, 504, 05, 10, 15, 26, 36), Ionescu Nelly (6356, 57, 62, 67, 68, 70, 73, 405, 11, 16, 18, 20, 24, 28, 41, 57, 61, 82, 92), Gheorghiu Liliana (6420, 24, 57, 59, 61, 63, 82, 504, 10, 12, 26), Strul Adam (6405, 11, 20, 45, 46, 49, 59, 61, 63, 504, 10, 15), Spiridon Ion Dănuţ (6457, 59, 61, 504, 10, 12, 16, 19, 22, 23, 26, 36),

Teodorescu P. Dan (6358, 66—68, 70, 72, 73, 86, 93, 94, 409, 16, 20, 22, 24, 28, 57, 59, 61, 62, 80, 84).

Ş. m. 3 cl. VIII. Marinescu Cornel (6308, E : 2136—39, 43—49, 51), Mircea Daniela (E : 2154, 55, 60, 61, 63, 67, 80, 83 ; 6375, 89).

Ş. m. 4 cl. VII Stoica Valentin (E : 2169, 70, 73, 82, 85, 92, 93, 95). Cl. VIII. Carmen Jean (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 92, 93, 94, 96), Ionescu I. Mihail (E : 2169, 71, 80, 82, 85, 92—94, 96), Rozeanu Adrian (E : 2169—71, 79, 82, 85, 92, 93), Vasilache Dan (E : 2169—71, 79, 82, 85, 92, 94, 96), Weinberg Mihail (E' 2169, 71, 79, 82, 84, 85, 92, 94, 96). Cl. IX. Arnăutu Carmen Tamara (6356, 70, 72, 73, 74, 600, 16 ; E : 2167), Oroviceanu F. Maria (6457, 59—62, 510, 15, 16, 19, 22, 25, 26), Ionescu Elena (6416, 20, 24, 45, 47, 59—62, 510, 19, 22, 26), Teodor Elena (E : 2167, 74, 78, 83 ; 6356, 70, 72, 73, 75, 420, 24, 59).

Ş. m. 5 cl. IX. Voicilos Cornel (6356—60, 67, 72, 73, 75, 76, 88, 89, 90, 93, 98). Cl. X. Rumega Steluţa (6418, 21, 59—61, 82, 507, 10, 19, 22, 26, 36).

Şc. 8 ani nr. 2. Circioagă Teodora (E : 2194—96, 98, 201, 06, 10, 11, 13, 15—18). Cl. VIII. Stoica Georgeta (E : 2195, 85, 90—93, 96, 98, 99), Vrînceanu Virgil (E : 2169, 79, 81, 82, 84, 85, 90—95, 201, 02, 08).

Şc. 8 ani nr. 9 Moisescu Valerie (*E* : 2169, 71, 79. 82, 85, 91, 92, 98, 202).

Şc. 8 ani nr. 12. Steriu Alex. (E : 2169—71, 93, 79, 82, 84, 85, 87).

Ş. m. 6 cl. IX. Taraş Viorel (E : 2174, 75, 81, 83 ; 6420, 24, 59, 510, 26, 27, 32).

PUCIOASA. Ş. m. cl. IX. Cimpoca Gheorghe (E : 2154—56, 58, 60—63, 67, 84, 91 ; 6389, 400, 59, 82), Miciu Ioan (6370, 400, 82, 510 ; E : 2154, 60—63, 86, 87). Cl. XI. *Aron C. Costantin* (6356—61, 65—94, 96, 98—400, 03—05, 07—15, 18, 20—22, 24, 27—29, 32—34, 36—42, 45, 54, 55, 57—65, 67, 72, 76, 80, 86, 87, 92), Birlog Corneliu (6405, 11, 16, 20, 24, 27, 29, 36, 41, 44, 57—59, 61—63, 67, 72, 76, 80, 84, 86, 87, 90, 503, 04, 10, 12, 15—19, 23, 25, 27, 45, 52).

PRUNDUL BÎRGĂULUI. Ş. m. cl. X. Boieriu Octavian (6314, 16, 44, 45, 56, 66, 70, 72—74, 89, 93, 424).

PREDEAL Ş. m. cl. XI. Ioniţă Maria (6405, 11, 21, 25, 59, 61—63, 65—67, 92).

REŞIŢA. Şc. 8 ani cl. VIII. Andrei Radu (E : 2153, 56, 57, 59, 61, 63, 65, 66, 69, 71—73, 76, 82, 83).

Ş. m. cl. XI. *Buiă Viorel* (6405, 09, 11, 16, 20—22, 24, 28, 29, 31, 36, 41, 44, 45, 48, 49, 54—63, 65, 67, 74—76, 80, 82, 84, 92, 502, 10, 12, 15, 26, 59).

RĂCARI (Bucureşti). Ş. m. cl. X. Dincă Gheorghe (6409, 10, 16, 20, 22, 24, 31, 41, 59, 61, 66). Cl. XI. Beşleagă Gabriela (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 23, 25, 35, 36), Ştefan Alexandru (6405, 09, 11, 16, 20—22, 27, 28, 34, 36, 57, 59—63, 82, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 25—27, 34, 36, 45).

ROMAN. Şc. 8 ani cl. VI. Segal Bruno (E . 2169—73, 79, 82, 85, 93).

Ş. m. cl. X. Bercovici Nelu (6358, 416, 18, 20, 24, 36, 59, 61, 76, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25), Căpăţînă Valeriu (6420, 24, 57, 59—61, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27), *Petraru Ovidiu* (6375, 76, 88, 90 93, 416, 18, 20, 21, 24, 27, 31, 46, 55, 59, 61,, 503, 05, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 44, 45, 47, 56, 58, 62, 63, 65, 69, 76, 86), *Smil Petre* (6375, 76, 88, 90, 92, 98, 99, 414—16, 18, 20, 21, 24, 27, 31, 44—47, 55, 57—63, 65, 89, 503, 05, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25——27, 44). Cl. XI. Gavriliu Mihai Mircea (6356—62, 70, 72, 73, 77, 89, 93, 400, 22, 24, 25), Niculicioiu N. Gh. (6409, 11, 20, 24, 28, 29, 41, 44, 57, 59—63, 66, 82, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 36, 31, 45).

ROŞIORII DE VEDE. Ş. m. cl. X Botea Ilie (6459, 61, 75, 82, 510, 15, 16, 19, 22, 25). Cl. VII. Georgescu N. (E : 2169, 71, 79, 82, 84, 85. 92, 94). Cl. IX Albuşteanu Aurelia (E : 2183, 87, 207, 09 ; 6424, 59, 519, 22, 26, 27), Bacorna Samuel (6459, 510, 16, 19 ; E : 2174, 75, 81, 209, 22, 25——27), Frăsineanu Ion (6424, 59, 510, 19, 26, 27 ; E : 164, 75, 81, 83, 86, 209), Marcov Constantin (6459, 507, 10 ; E : 2175, 81, 83, 86, 86, 87, 89, 202), Niţoiu F. Dumitru (E : 2181, 83, 86, 87, 89, 209 ; 6424, 59, 61, 510, 19), Popescu Ilinca (E : 2183, 89, 209, 25, 26 ; 6424, 57, 59, 61, 62, 510, 16, 19, 26, 27), Popescu Theodor (E : 2179 80, 83—85, 87, 91, 92, 209 ; 6459, 61, 510, 26, 27), Enache Teodora (E : 2187, 207 ; 64 24, 59, 61, 507, 10, 16, 19, 26, 27), Ticmeanu Marin (E : 2174, 81, 83, 86, 87, 89, 209 ; 6459, 61, 519, 22). Cl. X. Buzea Dobra (6359, 60, 67, 72, 75, 86, 93, 424, 31, 45, 56, 59, 61, 75, 76, 80, 92, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 39), Georgescu Graţiela (6420, 24, 31, 59, 61, 87, 510, 16, 19, 22, 26, 27), Şerban Floarea (6431, 47, 75, 83, 507, 10, 16, 25, 27). Cl. XI. Călin Paul (6366, 70, 71, 73, 75, 89, 93, 400, 20, 28), Georgescu Mihai (6359, 66—75, 86, 88, 89, 93, 400, 05, 09, 11, 14, 22, 28), Nedelea Ion (6367——70, 72, 73; 86, 89, 93, 405, 24, 28, 57, 59, 61—63, 92), Pene Ştefan (6410, 15, 22, 59, 61, 66, 92, 504, 10, 15, 22).

RÎMNICU VÎLCEA. Ş. m. 1 cl. IX. Defta P. Mihai (E : 2627 ; 6424, 45, 57—59, 61, 76, 79, 510), Dumitrescu C. Constantin (6424, 45, 57—59, 61, 79, 510, 26, 27),

Morariu Liviu (6370, 89, 93, 400, 18, 24, 58, 59, 61, 510, 26, 40), Stoica Mihail (6418, 24, 45, 57, 59, 61, 510, 16, 19, 26, 27). Cl. X. Bucur Florea (6420, 24, 44, 45, 46, 59, 75, 79, 80, 82, 503, 07), Buiculescu Ana (6416, 20, 24, 31, 44, 45, 59, 61, 75, 79, 504, 07), Moldoveanu Ion (6424, 31, 44—46, 59, 61, 79, 80, 82, 503, 07), Ioniță Aurică (6444—46, 61, 75, 79, 79, 82, 503, 07, 10, 25). Preda Gheorghiță (6416, 24, 31, 44—46, 59, 61, 75, 79, 503, 07), Buliga P. Maria (6424, 31, 44, 45, 59, 61, 79, 82, 92, 504, 07, 10, 19, 25, 26, 36), Renner Fredericka (6424, 31, 45, 46, 59, 61, 79, 503, 10, 16, 19, 26), Sofia D. Doina (6416, 26, 24, 44, 45, 59, 61, 79, 503, 10, 16, 19, 26), Diaconu N. Alexandru (6416, 20, 24, 28, 31, 44—46, 59, 75, 79, 80, 507), Știrbei Gh. (6416, 24, 28, 31, 44, 45, 59, 61, 75, 79, 82, 503, 07), Radu F. Florin (6431, 44—46, 59, 75, 79, 82, 503, 07), Cornilescu Eugen (6424, 31, 44, 45, 46, 59, 61, 75, 79, 82, 503, 07), Cruceru Traian (6416, 24, 28, 44, 45, 59, 61, 79, 81, 503), Ceaușescu Tudorița (6427, 31, 44—46, 59, 61, 75, 79, 82, 503, 07, 10, 25). Droașcă Florin (6444—46, 59, 61, 75, 79, 80, 82, 503, 07, 12, 15, 19, 25), Diaconu Dumitru (6416, 24, 28, 31, 44, 59, 61, 75, 79, 82, 503, 07), Dinulete Florica (6416, 20, 24, 31, 45, 46, 59, 79, 82, 503, 07, 25), Iordan Mihaela (6420, 24, 31, 44—46, 59, 75, 79, 503, 07), Mitruț Cicerone (6420, 24, 31, 44—46, 59, 75, 79, 82, 503, 07), Maiorescu Nicolae (6416, 24, 28, 44, 59, 61, 79, 82, 503, 07), Marinescu Lucia (6416, 20, 24, 31, 44—46, 59, 75, 79, 80, 82, 503), Nicolae Adriana (6420, 24, 44—46, 75, 79, 82, 503), Popescu Constantin (6376, 89, 98, 444, 59, 61, 16, 21, 24, 28, 29, 31), Pogăceanu Adriana (6416, 24, 31, 44, 45, 59, 76, 75, 79, 503, 07, 19), Roșca Ion (6416, 24, 44, 59, 75, 79, 82, 505, 17), Roibu Gheorghe (6420, 24, 44—46, 59, 75, 79, 80, 82, 503, 07), Safta Georgeta (6420, 24, 44—46, 59, 75, 79, 80, 82, 503, 07)), Minculescu Elena (6420, 24, 31, 44—46, 59, 61, 75, 79, 82, 503, 07, 25). Cl. XI. Bădescu Mira (6416, 18, 28, 59, 63, 66, 69, 82, 411, 22, 24, 61), Cismaru N. Valentin (6469, 16, 18, 20, 41, 57, 59, 61, 63, 65, 66, 69, 526), Diaconescu Constantin (6411, 24, 28, 41, 59, 61—63, 66, 69, 82, 504, 10, 15, 19). Dumitrescu Liviu (6418, 24, 28, 41, 59, 61—63, 66, 67, 69, 76, 79), Frățilă Constantin (6409, 18, 41, 57, 59, 61, 63, 65, 69, 526, 27), Mătcuță Lucian (6411, 24, 28, 61—63, 66, 82, 504, 10, 15, 19, 22, 36), Parlapan Mhaela (6358, 59, 67, 69—72, 75), Popescu Lucian (6504, 11, 18, 24, 28, 41, 54, 57, 59—63, 65, 66), Stratulat Florin (6405, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 28, 41, 49, 57, 59—63, 66, 67, 69, 82, 92), Sîrbu Mihai (6411, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 29, 28, 41, 59, 61), Segărceascu Vasile (6411, 18, 24, 27, 28, 41 57, 61—67, 69, 74, 82, 84, 87, 92), Tănase Constatin (6409—11, 16, 18, 2—22, 24, 25, 28, 29, 41, 57, 59, 61, 63, 66, 69, 82, 512, 15, 22, 26, 34).

Ș. m. Vasile Roaită cl. X. Buricea Mihai (6356, 59, 60, 67, 70—73, 89, 93). Cl. XI. XI. Droașcă Bogdan (6405, 06, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 24, 25, 28, 29, 31, 33, 34, 41), Munteanu Dumitru (6405—07, 09, 14, 16, 19, 20, 24, 25, 28, 29, 33, 34, 41).

Șc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Florescu Ion (E: 2169, 71, 73, 79, 92, 85, 91—95, 202), Tilirea Mihai (2169—71, 73, 79, 82, 85, 91—95, 202, 03).

SATU MARE. Ș. m. cl. VII. Gösle Mihai (E: 2169—73, 79, 82, 84, 85, 90—94, 96, 201, 02, 06). Cl. IX. Ciornău Ioan Dan (E: 2174, 75, 78, 209; 6420, 24, 44, 57, 59, 61, 26), Motaru Alexandru (E: 2186, 87, 207, 09; 6459—62, 82, 510, 25, 26, 32), Sichet Margareta (6367, 72, 74, 93, 418, 59, 75, 82, 503, 10, 16, 22, 26). Tarția Mircea (6457, 59, 61—63, 92, 504, 10, 15, 16, 22, 39). Cl. X. Ciornău N. (6420, 24, 51, 59, 61, 75, 519, 26), Ivănescu Constantin (6459, 61—63, 66, 82, 505, 07, 10, 19, 22, 27), Nemeș Gavril (6457, 59—62, 507, 10, 16, 19, 25—27).

SĂVENI. Cl. VIII. Lungu Dumitru (E: 2169, 82, 83, 84, 91, 96, 206, 09), Oriciu Dumitru ((6481—84, 96; E: 2187), Lungu Vasile (6370; E: 2153—55, 58—61, 63, 64, 66—69, 71, 82—84, 91), Brînzei I. Ioan (6370, 88; E: 2154, 60, 61, 63, 67, 88), Focșa Constantin (6415, 20, 57, 59, 61, 69, 82, 504, 10, 19, 22, 26), Bejenaru Marin (6482; E: 2183, 85, 89, 96, 201), Leucă Marin (E: 2169, 84, 85, 91—93, 96; 6459, 82, 526), Bălășanu Paula (E: 2169, 81, 83, 84—86, 91, 92, 94, 96, 201; 6427,) Dejanski Aurica (E: 2169, 81, 83—86, 91, 92, 94, 96, 201; 6482), Lețuc Aurica (E: 2169, 81, 82, 84, 85, 86), Șchipu Aurica (E: (E: 2169, 81, 83, 84, 91, 92, 94, 201; 6427, 82). Cl. XI. Andrei Mircea (6411, 20, 24, 28, 57, 60—63, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 30), Mălăescu Gabriel (6424, 59, 61—63, 92, 504, 10, 15, 22, 26).

SĂCUENI. Ș. m. cl. XI. Maior Gheorghe (6411, 18, 36, 76, 80, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 32, 36, 41, 45).

SĂRMAȘ. Ș. m. cl. X. Moldovan Vasile (6455, 57, 59—61, 82, 507, 10, 15, 16, 22), Cublescu Ioan (6454, 55, 59—62, 507, 10, 19, 22, 25—27).

SIGHIȘOARA. Ș. m. cl. XI. *Florea Gheorghe* (6356—59, 62, 65—68, 70—76, 86, 87, 89. 93, 94, 99, 400, 03, 05, 11, 14, 16, 20, 23, 25—27, 36, 55, 58, 63, 67, 82, 92).

MŰSZAKI KÖNYVTÁR

SIBIU, Ş. m. 1 cl. IX. Banciu Maria (E: 2174, 75, 82, 83, 87, 89, 91, 82; 6424), Buzoianu Mureş (E: 2171, 74, 75, 79–81, 83, 86, 87, 98, 91), Buzgoriu Mircea (E: 2171, 74, 75, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 91; 6420, 59, 61), Babeş Carmen (6420, 24, 76, 525, 32, 24; E: 2174, 75, 78, 81, 83, 86), Caleşcu Constantin (6359, 61; E. 2175, 79, 83, 86, 87, 91), Lesiacu Dan (E: 2174, 75, 79–91, 83, 84, 86, 87; 6424, 59, 61), Goţia Viorica (E: 2175, 78, 83, 87; 6476, 82, 528, 26, 27, 32), Grosu Adrian (E: 2174, 75, 77–79, 83, 84, 86, 87, 91; 6420, 24, 59, 60, 61), Biţu Radu (E: 2174, 75, 78, 81, 83, 86; 6439, 82, 526, 27, 32, 34), *Pompilian Alexandru* (6354, 55, 56, 58, 60–63, 67, 70, 72, 73, 76, 89, 93, 420, 26 43, 57, 59, 61–63, 71, 74, 75, 79, 80–83), Petrişor Elena (E: 2175, 78, 81, 92, 96; 6422, 59–61), Roşu Dumitru (E: 2171, 75, 78–84, 87; 6420, 24, 59), Giurca Ioan (E: 2174, 75, 78, 81, 86; 6148, 21, 74, 526, 27, 29, 32, 53, 76, 78, 82), Bucurenciu Ion (E: 2174, 75, 79–84, 86, 96; 6424, 59, 61), Surdu Cornel (E: 2174, 75, 78, 81, 83, 86, 87; 6418, 24, 76, 82, 526, 27, 32, 49). Cl. X. Albescu Ion (6446, 59, 61, 503, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 26, 36). Cl. XI Bucur Delia (6405, 10, 20, 22, 24, 28, 29, 34, 36, 41, 43–46, 48, 59, 54, 57–61), Carabulea Ilie (6411, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 46, 57. 59–61), Dragotă Paula (6411, 16, 18, 22, 24, 28, 29, 30, 59, 71, 92).

Ş. m. 2 cl. VIII. Nica Maria (6461, 510, 26; E: 2177, 84, 85, 86, 91, 92, 96). Cl. IX. Hodor Liviu (6420, 24, 43, 44, 54, 58, 59, 61, 411, 19, 22; E: 2187, 209), Tulea Ilie (6405, 09, 11, 16, 20, 21, 22, 24, 28, 41), *Trif Nicolae* (6318, 22, 25, 28, 30, 33, 38, 40, 44, 49, 54, 56–60, 62, 66–75, 88, 90, 93, 418, 24, 27, 45, 46, 59, 61).

Ş. m. 3 cl. VIII. Blăjan Petru (E: 2125, 29, 51, 54, 60–62, 67, 71). Cl. IX. Bobanga Mircea (E: 2174, 79, 89; 6420, 24, 59–61, 510, 15, 26, 27), Sandovici Călin (6329, 37, 45, 67, 58, 67, 70, 72, 76, 89), Lungu Alexandru (E: 2171, 74, 75, 79, 86, 91; 6482, 83). Cl. X. Laşite Ileana (6369, 82, 98, 400, 03, 05, 11, 14, 16, 20, 21, 24, 27, 28, 29, 36, 41, 44, 48, 49, 55, 57, 59–63, 67, 71, 71, 75, 79, 80, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 39, 45), Modran Liviu Nicolae (6420, 24, 31, 57–61, 63, 92, 503, 10, 19, 22, 26, 36), Magda Radu (6356–59, 65–67, 70, 72, 424, 59, 61), Mavrocordat Ioan (6424, 29, 44, 45, 57–61, 503, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25–27, 44), Pricop Sorin (6356, 67, 70, 72, 420, 59, 61, 510, 22, 26, 34, 36, Sandovici Călin (6416, 24, 28, 29, 44, 45, 57–61, 63, 67), *Zăgan I. Dumitru* (6445––47, 50, 56–63, 66, 71, 74, 76, 82, 92, 96–98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 35, 36, 39, 43, 44, 84). Cl. XI. Arsenie I. Aurel (6405, 11, 18, 20, 24, 28, 48, 61, 92, 504, 10, 36), *Bucur Liliana* (6408, 10, 11, 14, 16, 18, 20, 29, 31, 40, 41, 44, 48, 57, 61, 63, 66–71, 82, 97, 98, 503, 04, 10, 12, 15, 19, 25–27, 36, 39, 40, 43), *Marinuş Radu* (6405, 09, 13–16, 18–21, 24, 27–29, 36, 40, 41, 43–46, 48–50, 54–63, 65–67, 69, 70, 79, 80, 82, 86, 87, 92, 93, 98, 98), Bart Radu (6405, 16, 18, 20, 24, 27, 28, 48, 57, 59, 61, 66, 69, 92, 510, 12), *Geleriu Dan* (6443–46, 48–50, 54–67, 69, 71, 72, 75, 76, 79, 80, 84–88, 92, 93, 96–501, 03–11, 13–28, 30, 31, 34–36, 38–40, 44–46, 42, 55, 61, 72, 74), *Dăncilă Ioan* (6443–45, 48–50, 58, 59, 61, 67, 69–71, 76, 80, 87, 88, 92, 97–99, 503, 04, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25–27, 32, 34, 36, 39, 45, 46), Popescu Adriana (6403, 11, 18, 58, 59, 61, 63, 82, 92, 93, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 36, 39, 44), Ràduly Fànor (6356, 58, 67, 70, 72, 73, 77, 409, 11, 20, 24, 43, 59, 61–63, 66, 67, 71, 82, 504, 10, 15. 22, 26).

S. m. 4 cl. IX. Moraru Vasile (6443, 54, 57–61, 516, 26, 27, 32, 34; E: 2203, 09) Cl. XI. Falotă Horia (6405, 16, 18, 18, 20, 21, 24, 28, 36, 41, 50, 56 57, 59, 61–63, 67, 70, 71, 84, 87, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25, 27, 29, 36, 38, 46), Oprişor Simion (6405, 09, 11, 16, 18, 20–22, 23, 25, 27–29, 36, 41, 59, 61, 63, 67, 71, 84, 87, 92).

Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Zaharia N. (E: 2169–73, 79, 82, 99).

Şc. 8 ani nr. 4 cl. VII. Zarschech Dorin (E: 2153, 56–59, 61–64, 66, 69–71, 73, 76, 79, 80, 82).

Şc. 8 ani cl. VI Marinuş Marian (E: 2185, 91, 96, 201, p2, 06, 09).

Şc. 8 ani nr. 8 cl. VIII. Găvozdea Mircea (E: 2191, 93, 95–98, 200, 01, 02, 06).

Şc. 8 ani nr. 12 cl. VII. Nicu Olguţa (E: 2156, 57, 66, 84, 85, 92, 96, 206).

SIMERIA. Ş. m. cl. VI. Oprea Alexandru (E: 2171, 79, 82, 85, 92, 94, 97, 202). Cl. IX. Wichmann Christian (6418, 21, 24,, 27, 59–62, 510, 16, 19, 22, 25–27), Igna Ion (6421, 57, 59–62, 82, 504, 10, 12, 25, 26, 32).

SINAIA. Ş. m. cl. VIII. Simionescu Cristian (E: 2157, 61, 64, 68, 69, 79, 80, 82, 96). Cl. XI. *Catană Ilie* (6356–58, 61, 65, 68, 69, 71, 74, 404, 05, 06, 12, 19, 28, 37, 41, 45, 49, 56, 57, 59–63, 66, 67, 71, 76, 84, 92, 503–05, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 25–27, 34, 39, 43).

SLATINA. Ş. m. cl. IX. Stăncescu Ştefan (6420, 24, 44, 54, 57, 59–62, 507, 10, 19, 25–27), Verescu Sergiu (6356, 57, 59, 60, 68, 72, 73, 76, 79, 80; E: 2154, 55, 66, 83). Cl. X. Buicescu Radu (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23), Constantinescu Dan (6356–60, 67, 70, 72, 75, 81, 93, 420,

1965 JUN 2 9

57, 59, 61), Etfodie Mircea (6357, 58, 60, 66 – 68, 89, 57 – 61), Păun I. Maximilian (6368, 74, 416, 20, 28, 59 – 61, 87, 92, 504, 07, 10, 12, 19, 36).

SÎNGERU. Ş. m. cl. VII. Pişcoci M. Constantin (E : 2080, 83, 84, 94, 136, 68, 59, 69, 79, 84, 85, 91, 92, 93, 201, 02, 06).

SÎNTANA (Crişana), Cl. IX. Pop Mircea (6310, 60, 457, 59, 61, 505, 10, 26).

SOMCUŢA MARE. Cl. XI. David Vasile (6459 – 63, 67, 71, 73, 80, 87, 92, 604, 10, 12, 16, 19, 22, 23, 25 – 27, 36, 46).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VII. Picol Gheorghe (E :2169 – 73, 79, 82, 92, 95). Cl. VIII. Postelnicu Petre (E :2169, 71, 73, 79, 85, 92, 94), Răducu Aurel (E : 2153, 48, 59, 61 – 64, 66, 69, 71, 79, 82, 85, 92, 96).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiţi şi Olimpiada Matematică, 1965.

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 35–40 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective. *Solicităm probleme interesante legate de practică.*

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate şi citeţ semnate. Desenele să fie făcute îngrijt pe foi separate.

Elevii claselor V–VIII vor fi anunţaţi în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puţin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX–XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat şi să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată pentru anul 1965 (12 numere). Preţul este de 2 lei lei exemplarul (24 lei anual).

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicaţie şi altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.

I. P. „Informaţia" – c. 5155

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) – aprilie 1965

4

MŰSZAKI EGYETEM

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI (II), nr. 4 — aprilie 1965

SUMARUL

		Pag.
1.	Dimitrie Pompeiu, de Elena Flondor.	145
2.	Soluţiile problemelor date la a VI-a O.I.M. — 1964 A doua lucrare scrisă, de T. Roman	149
3.	Note matematice de Viorel Mihăilescu, I. Bîrsan, Alexei Sosinski	155
4.	Probleme rezolvate (6323, 6328, 6329, 6336, 6341, 6342, 6343, E: 2205, 2210, 2219)	160
5.	Chestiuni de examen (6795—6839)	169
6.	Probleme propuse (6811—6839)	172
7.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2293—2306)	177
8.	Cărţi noi	179
9.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	180

ANUL XVI, 4 APRILIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, profesor univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Păvîţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ., *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14 46 53. — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

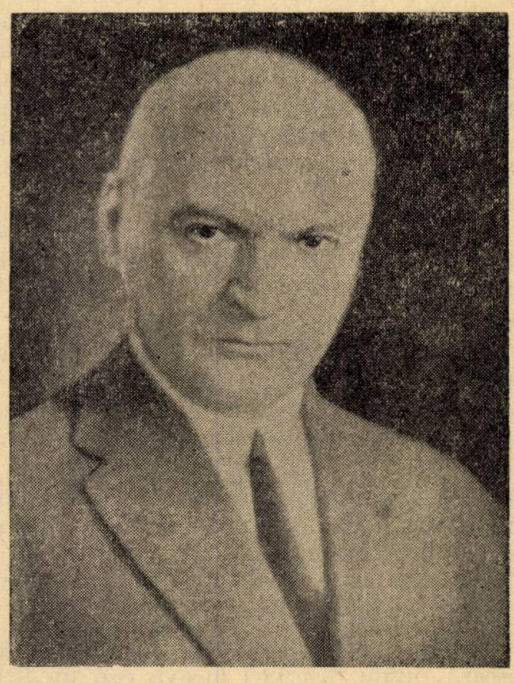
GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVI (II), nr. 4 aprilie 1965

DIMITRIE POMPEIU

de *ELENA FLONDOR*, profesoară București

A fost una din marile figuri de matematicieni romîni, un savant, un dascăl autentic, care a muncit din toată inima, a crezut în idealuri și a lăsat urme adînci în sufletul celor ce l-au ascultat. Cei ce l-au cunoscut ca profesor sau în raporturile lui sociale au păstrat amintirea unuia din spiritele cele mai alese care au împodobit, în viață fiind, și cinstesc după moarte galeria oamenilor noștri de cultură.

Totdeauna modest, aproape sfios, profesorul Dimitrie Pompeiu cucerea pe auditorii lecțiilor sale și pe cei ce au avut norocul să-i fie apropiați prin covîrșitoarele lui însușiri: pătrundere intelectuală, voință, perseverență, pasiunea cercetării, cultură întinsă și adîncă, suflet deschis, cald și generos.



Toate aceste însușiri i-au asigurat un loc strălucit în viața științifică a țării, în care a fost un creator și deschizător de drumuri noi.

Așa fiind, nu e de mirare că posteritatea și-a plătit o datorie de recunoștință față de unul din sufletele cele mai alese ale țării, gînditor și realizator, care a tras brazde adînci și roditoare în ogorul patriei. În ziua de 10 decembrie 1964 Facultatea de matematică-mecanică din București, împreună cu Societatea de științe matematice au comemorat zece ani de la moartea marelui matematician Dimitrie Pompeiu.

Nici o notă stridentă n-a întrerupt armonia acestei consacrări. Toți vorbitorii, foști studenți ai profesorului Dimitrie Pompeiu, azi profesori universitari cu renume la noi și peste hotare, au subliniat cu respect amintirea omului și a profesorului.

D. Pompeiu s-a născut în anul 1873, la 22 septembrie, în satul Broscăuţi, din apropierea Dorohoiului. Copilul se remarcase încă din şcoala primară — urmată în satul său — prin o memorie excepţională şi printr-o mare putere de concentrare, încît putea reproduce întocmai părţi întregi din lecţiile dascălilor săi. Era bun la toate obiectele, dar avea o deosebită preferinţă pentru matematici.

După absolvirea şcolii primare, în 1885 se înscrie la gimnaziul din Dorohoi. Studiază cu sîrguinţă. Citeşte mult, învaţă vioara şi încă din cl. a III-a a gimnaziului colaborează la revista ieşeană „Recreaţii ştiinţifice". Profesorii îl apreciază ca pe un element deosebit de înzestrat, iar colegii îl învăluie în dragostea şi preţuirea lor atît pentru compunerile de la limba romînă cît şi pentru uşurinţa cu care făcea traducerile din latină, precum şi pentru desenele pe care le executa cu mult talent. Cei ce l-au cunoscut spun că lui Dimitrie Pompeiu îi plăceau plimbările în mijlocul naturii. Firea lui sensibilă găsea — desigur — în armoniile din natură — prilejuri de popas primenitor pentru inima lui!

După terminarea gimnaziului, trece la şcoala normală de institutori înfiinţată de Alexandru Odobescu. Aici D. Pompeiu a dat o deosebită atenţie filozofiei şi pedagogiei, trudindu-se să-şi însuşească o exprimare logică şi frumoasă. Aceasta l-a remarcat şi mai tîrziu în viaţă, atît în conversaţia obişnuită cît mai ales în formularea gîndurilor sale cu caracter ştiinţific — matematic.

Nu împlinise vîrsta de 20 de ani cînd a fost numit institutor la Ploieşti. Indemnul inimii sale, căruia nu i se putea opune, îl îndruma spre lumea matematicilor. De aceea îl vedem asistînd mereu la sesiunile ştiinţifice de comunicări ale secţiei de matematică de la Universitatea din Bucureşti. Îl întîlnim între colaboratorii la „Buletinul societăţii amicii şciinţelor matematice" şi curînd ţine şi o comunicare „Despre numerele perfecte".

Tînărul institutor nutrea dorinţa fierbinte de a se înscrie la Universitate. Neputîndu-se înscrie fără trecerea bacalaureatului — şcoala normală nefiind echivalată cu liceul — se hotărăşte să-şi definitiveze studiile, ceea ce şi face, cu izbîndă.

În anul 1898 pleacă la Paris cu soţia sa, cu toată conştiinţa greutăţilor materiale pe care le va îndura. Ia un concediu de boală, apoi un concediu de studii. Prin munca neobosită şi prin inteligenţa lui biruie greutăţile studiului. După un an de studiu trece bacalaureatul cu menţiunea „très honorable". Se înscrie la universitate şi urmează cursul de calcul diferenţial şi integral şi mecanica raţională. Asistă la cursurile de mecanică fizică şi experimentală ale profesorului Köenigs, lucrînd chiar în laboratorul de mecanică al acestuia, căci Dimitrie Pompeiu, a avut totdeauna înclinare pentru problemele practice, pentru studiul ştiinţelor aplicate.

Biografii lui spun „că după fiecare lecţie audiată, se ducea grăbit acasă, unde rămînea cîteva ore meditînd asupra demonstraţiilor şi teoremelor ascultate. Studiul său nu se mărginea numai la perfecta înţelegere a unei teorii sau a unei probleme, ci se întindea mai cu seamă asupra legăturilor posibile dintre vechile şi noile sale cunoştinţe" (M. Botez „Dimitrie Pompeiu").

Munca încordată şi roadele bogate ale tînărului cercetător romîn au atras atenţia profesorilor cu care lucrase (Appell, Goursat, Picard, Köenigs).

În 1905 Dimitrie Pompeiu îşi susţine teza de doctorat în faţa unei comisii prezidate de marele matematician francez H. Poincaré cu tema „Singularităţile funcţiilor analitice".

În scurt timp, între 1905—1906, Dimitrie Pompeiu publică 7 lucrări de matematică, foarte apreciate atît pentru ideile ce le cuprind cît şi pentru metoda de cercetare afirmată. H. Poincaré îi propune să rămînă la Paris, asigurîndu-i o catedră universitară. Dragostea de ţară şi de tineretul romîn, căruia voia să-i reverse bogăţia minţii sale l-a îndemnat pe Pompeiu să se întoarcă acasă, în ţara lui.

În anul 1905 e numit conferenţiar de „analiză matematică" iar în 1907 — profesor de mecanică la facultatea de ştiinţe din Iaşi. Paralel cu munca universitară a predat matematica şi la liceul internat din Iaşi, ţinînd astfel legătura cu matematicile elementare.

De altfel întreaga operă a lui Dimitrie Pompeiu — 150 lucrări — cuprinde elemente destul de variate de la chestiuni adînci de matematici superioare, pînă la articole unele numai de cîteva rînduri, în care tratează cu aceiaşi plăcere chestiuni de matematici elementare:

De la teoria funcţiilor de o variabilă complexă şi reală la derivata areolară, la stabilirea existenţei coeficientului de contracţie al polinoamelor de grad oarecare şi pentru funcţiile armonice, chestiuni dezvoltate apoi de matematicieni romîni (O. Onicescu, Gr. Moisil, Gh. Mihoc, N. Teodorescu, M. Nicolescu, A. Froda şi alţii) şi matematicieni străini (Burgatti, Tonolo, Vecua, Ceacalof, Favard, Montel şi alţii), pînă la teoreme de matematici elementare „Distanţele de la un punct din planul unui triunghi echilateral la cele trei vîrfuri sînt laturile unui triunghi" generalizată pentru pătrat şi o linie poligonală închisă — problemă care a interesat de asemenea pe mulţi geometrii (Dan Barbilian).

În 1912 a fost transferat la Bucureşti, la Facultatea de ştiinţe în locul lui Spiru Haret, alt mare dascăl al ţării, primul romîn doctor în matematici de la Paris.

Faima lui de matematician trecuse de mult hotarele ţării. Se poate spune că venise cu ea de cînd părăsise studiile la Paris. Această faimă stăruia încă în conştiinţa cunoscătorilor. De aceea nu e de mirare, că atunci cînd fostul său student N. Teodorescu, astăzi academician, şi-a ţinut teza de doctorat la Paris (1931) cu studiul aprofundat al noţiunii de derivată areolară descoperită de Dimitrie Pompeiu în anul 1913 — acesta a fost invitat să prezideze însuşi comisia de examen a fostului său elev.

Era aceasta o cinste adusă lui Pompeiu şi ţării sale.

Prestigiul de care se bucura, limpezimea gîndirii sale şi tactul său pedagogic ca şi prodigioasa sa putere de muncă, de organizator, de îndrumător a făcut ca îndată după primul război mondial să primească sarcina să organizeze Universitatea din Cluj. Dimitrie Pompeiu a primit sarcina cu toată inima şi i s-a dăruit acestei munci timp de 20 de ani.

Orientîndu-se după modelul seminarului „Collège de France" crează Seminarul matematic de la Cluj, asociind în munca sa un mănunchi de

tineri matematicieni (Th. Angheluță, Gh. Bratu, N. Abramescu, Petre Sergescu, D. V. Ionescu și alții), care primeau impulsul ideilor maestrului lor și au izbutit să dea roade îmbelșugate.

Tot la inițiativa lui D. Pompeiu apare la Cluj, în 1929, revista „Mathematica", care ajunge curînd să numere în paginile ei colaboratori de peste hotare, cîștigînd o valoare internațională.

În anul 1930 profesorul D. Pompeiu trece de la catedra de mecanică la catedra de teoria funcțiilor, prin pensionarea lui David Emanuel — al doilea romîn care și-a trecut doctoratul la Paris. Astfel Dimitrie Pompeiu își împarte activitatea între cele două universități din București și Cluj, ocupînd tot din 1930 și catedra de geometrie analitică de la Școala politehnică din București. Desigur că numai o putere de muncă uriașă ca a lui D. Pompeiu a putut face față atîtor sarcini ce i s-au încredințat.

În anul 1933, la împlinirea vîrstei de 60 de ani, institutele superioare de învățămînt din țara noastră au organizat o dublă aniversare : Dimitrie Pompeiu și Gh. Țițeica. Aniversarea a fost un prilej de a evidenția munca celor doi mari matematicieni.

În 1938 se înființează la București Școala normală superioară, după modelul școlii normale superioare din Paris, pentru pregătirea viitorilor profesori. Conducerea școlii a fost încredințată tot lui Dimitrie Pompeiu. Era și acesta un semn omagial, adus profesorului stăpîn pe tainele metodologiei.

Deși în plină putere de muncă, în 1940, profesorul Dimitrie Pompeiu a fost pensionat și silit să coboare treptele catedrei pe care o luminase și o încălzise cu văpaia sufletului său cu atîta vrednicie. Nici vechea Academie Romînă nu l-a numit membru decît la vîrsta de 61 de ani (în 1934), deși renumele său era cunoscut de savanți străini care subliniau cu admirație rezultatele cercetărilor profesorului Pompeiu. Abia după instalarea puterii populare, în 1948 Academia R.P.R. îl alege membru și îi încredințează funcția de director al Institutului de matematică din R.P.R.

Ca o recunoaștere a meritelor deosebite pe tărîm științific și didactic și ca un răspuns la dragostea cu care Pompeiu încurajase generația de tineri din preajma sa, a fost decorat cu ordinul „Steaua R.P.R." și „Ordinul Muncii". Universitatea din Varșovia l-a numit doctor honoris causa, subliniind prețuirea străinătății.

La vîrsta de 80 de ani, Academia R.P.R. și S.S.M. l-au sărbătorit pe D. Pompeiu într-un cadru festiv. O caldă și duioasă dragoste a înconjurat pe octogenarul care și-a dăruit întreaga sa viață pentru școala romînească de matematică.

La 8 octombrie 1954 — profesorul Dimitrie Pompeiu a încetat din viață.

În galeria cărturarilor noștri, el înfățișează pilda unei armonii depline între om și operă. Totdeauna s-a impus prin puterea exemplului personal. În aceasta a stat puterea magică a influenței lui asupra contemporanilor și prin amintirea acestei armonii intime trăiește în conștiința posterității puternica personalitate a lui Dimitrie Pompeiu. El a creat o școală de matematică și de caractere prin exemplul vieții sale.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA A VI-A OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ – 1964

de T. Roman.

A DOUA LUCRARE SCRISĂ*

Problema IV. 17 oameni de știință sînt în corespondență, fiecare cu ceilalți 16. Corespondența lor se referă doar la trei subiecte diferite; doi savanți oarecare au un singur subiect de corespondență. Să se demonstreze că cel puțin trei savanți au același subiect de corespondență.

(propusă de R. P. U.)

Soluție. Fie A un anumit om de știință; el trebuie să corespondeze asupra aceluiași subiect a cu cel puțin 6 din ceilalți savanți (denumiți B, C, D, E, F, G). În adevăr, dacă asupra fiecărui subiect ar corresponda doar cu cîte 5 savanți, nu ar mai avea ce scrie celui de-al 16-lea din enunț.

Dacă printre savanții B, C, D, E, F, G se găsesc doi: B și C (de exemplu) care își scriu asupra subiectului a, demonstrația a fost dată.

Dacă B nu scrie niciunuia dintre savanții C, D, E, F, G asupra subiectului a el trebuie să le scrie asupra subiectului b sau c și anume la cel puțin 3 (D, E, F de exemplu) asupra subiectului b (de exemplu), căci dacă ar corresponda asupra ficărui subiect doar cu cîte 2 colegi, nu ar avea ce scrie celui de-al cincilea. Dacă dintre savanții D, E, F, doi (de exemplu D și E) corespondează între ei tot asupra subiectului b, a fost găsit grupul de savanți căutat: B, D, E.

Dacă însă D, E și F nu corespondează între ei asupra subiectului b, ei trebuie să corespondeze asupra subiectului c și grupul de trei căutat a fost găsit.

Deoarece au fost studiate toate posibilitățile, s-a dovedit afirmația din enunț.

Observații. 1° Această problemă a ridicat cele mai mari greutăți elevilor noștri: niciunul nu a rezolvat-o, doar unuia i s-au atribuit 2 puncte pentru că a redus problema la studiul corespondenței savantului A cu alți 6 savanți.

2°. Pentru toți participanții la O.I.M., această problemă a fost cea mai dificilă: doar 16 au obținut cele 6 puncte, unul 5 puncte, 5—2 puncte și ceilalți 50 — zero puncte.

3°. Este necesar ca să se acorde mai multă atenție rezolvării de probleme de perspicacitate, care cer mai puține cunoștințe dar o putere mai mare de pătrundere, de sesizare, de urmărire a mai multor variante, ca în cazul problemelor de șah. Este util ca și Gazeta matematică seria B să publice mai multe asemenea probleme, dar elevii pot găsi material și în cărțile de matematică distractivă apărute în Editura Tineretului, în anii precedenți.

Problema V. Se dau într-un plan 5 puncte. Printre dreptele care unesc aceste cinci puncte cîte 2, nu se află drepte paralele, perpendiculare sau coincidente. Prin fiecare dintre punctele date se duc perpendiculare pe toate dreptele ce se pot construi cu celelalte patru puncte date. Care este numărul maxim de puncte de intersecție a acestor perpendiculare, în afara punctelor date.

(propusă de R. P. R.)

---

*) Soluțiile problemelor date la prima lucrare scrisă au apărut în numărul precedent al revistei.

Soluția I-a (redactată după *O. Bîscă, V. Neagoe, A. Vinea*).

Fie A, B, C, D, E cele 5 puncte date. Din punctul A, de exemplu, se pot duce $C_4^2 = 6$ perpendiculare pe dreptele determinate de celelalte 4 puncte. Prin urmare din cele 5 puncte se pot duce 30 perpendiculare. Acestea se pot intersecta în $C_{30}^2 = 435$ puncte.

Deoarece din A se duc 6 perpendiculare, cele $C_6^2 = 15$ puncte de intersecție ale lor confundate în A nu vor fi luate în considerație. Pentru cele 5 puncte vor fi deci de scăzut $15 \cdot 5$ puncte.

Deoarece perpendicularele din A, B, C pe dreapta DE sînt paralele, cele $C_3^2 = 3$ puncte de intersecție ale lor nu se iau în considerație. Cum în total sînt $C_5^2 = 10$ drepte, rezultă că se vor scădea încă $3 \cdot 10$. puncte.

În fine, în triunghiul ABC, înălțimile fiind concurente, iar numărul total al triunghiurilor care se pot forma fiind $C_5^3 = 10$, rezultă că se vor scădea alte 2.10 puncte.

Așa dar, numărul maxim de puncte distincte de intersecție este $435 - 75 - 30 - 20 = 310$.

Soluția II-a.

Prin fiecare punct dat trec cîte 4 drepte și se pot duce cîte 6 perpendiculare.

Se determină mai întîi punctele de intersecție a perpendicularelor ce sînt duse din A și B. Pentru a obține puncte distincte, se consideră în primul rînd cele 3 perpendiculare ce se pot duce din A pe BC, BD, BE și cele 6 perpendiculare ce se pot duce din B pe AC, AD, AE, CD, CE și DE. Cele $3 \cdot 6 = 18$ puncte de intersecție sînt distincte, în condițiile problemei. În al doilea rînd, se consideră celelalte 3 perpendiculare duse din A pe CD, CE, DE; fiecare dintre ele intersectează 5 dintre perpendicularele duse din B pe AC, AD, AE, CD, CE și DE (perpendiculara din A pe CD de exemplu, nu intersectează perpendiculara din B pe CD). Rezultă astfel încă $3 \cdot 5 = 15$ puncte de intersecție.

Așa dar, perpendicularele duse din A și B se intersectează în $18 + 15 = 33$ puncte.

Deoarece cu cele 5 puncte se pot forma $C_5^2 = 10$ perechi de puncte, rezultă că numărul total al punctelor de intersecție este $33.10 = 330$.

Pentru ca să se obțină puncte distincte, trebuie să se scadă ortocentrele celor $C_5^3 = 10$ triunghiuri care se pot forma cu ajutorul punctelor date; cum aceste ortocentre au fost numărate de cîte 3 ori (ca intersecție a celor 3 înălțimi luate cîte două), se va scădea numărul $10 \cdot 2$ puncte, așa că numărul maxim al punctelor de intersecție rămîne $330 - 20 = 310$.

Observații. 1°. Unii dintre elevii noștri au generalizat problema pentru cazul a n puncte din plan, care îndeplinesc condițiile din enunț.

Procedînd ca în soluția I-a, rezultă că dintr-un punct se pot duce $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ perpendiculare și deci în total $N = nC_{n-1}^2$ perpendiculare. Numărul punctelor de intersecție este:

$$C_N^2 = \frac{n(n-1)(n-2)[n(n-1)(n-2)-2]}{8} = 6C_n^2 C_n^4 +$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)((n-2)}{6} - \frac{3}{2} C_n^3 =$$

$$= 6C_n^2 C_n^4 + \frac{3}{4}(n+1)(n-2)C_n^3 .$$

Se vor scădea însă : punctele confundate în vîrfuri, în număr total $n \cdot C_p^2$, unde $p = C_{n-1}^2$; punctele de intersecţie a perpendicularelor duse din vîrfuri diferite pe aceeaşi dreaptă, în număr total de $C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 = 6C_n^4$ şi ortocentrele celor C_n^3 triunghiuri, care fac să se piardă $2C_n^3$ puncte.

Numărul maxim al punctelor distincte de intersecţie este aşa dar

$$6C_n^2 C_n^4 + \frac{3(n+1)(n-2)}{4} C_n^3 - \frac{n}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 \right] -$$

$$- 6C_n^4 - 2C_n^3 = 6C_n^2 C_n^4 + C_n^3 .$$

Cei trei elevi citaţi la soluţia I-a nu au făcut calculele însă, pentru a obţine rezultatul, sub forma simplă de mai sus, dată de autorul problemei, *Gh. D. Simionescu.*

2°. Ceilalţi elevi ai noştri au dat soluţii incomplete, unii neluînd în consideraţie o categorie sau două de puncte nedistincte de intersecţie iar alţii lucrînd confuz, neexplicînd clar cum se obţin rezultatele pe care le scriu (şi care de fapt erau greşite).

Trebuie remarcată şi greşala unui elev care, la calculul C_{30}^2 scrie $\frac{30 \cdot 19}{2}$.

3°. Problema a provocat dificultate şi multor altor elevi care nu au luat în consideraţie toate punctele care trebuie scăzute.

Trei dintre elevii noştri au obţinut 7 puncte, cîte unul 6, 4 şi 3 puncte şi doi cîte 2 puncte. În ansamblu, 20 elevi au obţinut 7, 6 sau 5 puncte, 30 elevi 4 sau 3 puncte, iar 8 elevi 1 sau 0 puncte.

4°. În şedinţele sale, juriul O.I.M. a discutat îndelung asupra acestei probleme şi anume dacă nu cumva există şi alte puncte confundate aşa încît maximul de 310 să nu poată fi atins niciodată. În cele din urmă s-a acceptat părerea că elevilor nu li se cere să demonstreze că există 5 puncte în plan astfel încît, perpendicularele din problemă să se intersecteze în 310 puncte distincte.

La rubrica „Note matematice" a revistei se publică o demonstraţie a existenţei unui astfel de grup de 5 puncte, demonstraţie datorită unuia din colaboratorii sovietici care şi-a arătat astfel interesul pentru rezolvarea completă a problemei propuse din partea *R.P.R.*

Problema VI-a. Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară şi D_1 centrul de greutate (punctul de întîlnire a medianelor) al bazei ABC. Paralelele la DD_1 duse prin A, B, C intersectează feţele opuse în punctele A_1, respectiv B_1, C_1. Să se demonstreze că volumul piramidei $A_1B_1C_1D_1$ este triplul volumului piramidei $ABCD$. Rămîne valabil rezultatul dacă punctul D_1 este oarecare în interiorul triunghiului ABC?

(*propusă de R.P.P.*)

Soluţia I-a (dată de toţi elevii noştri) se limitează să demonstreze afirmaţia din problemă, fără a aborda cazul general. Mai jos se dau două soluţii pentru acest caz.

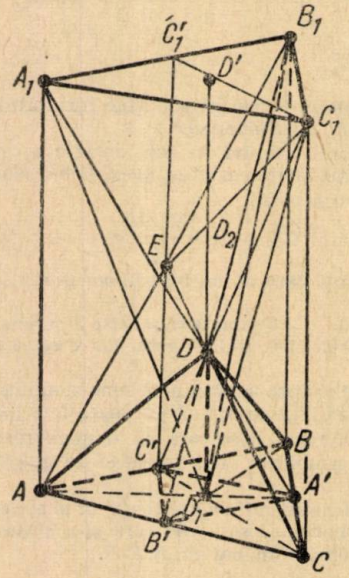
Soluţia II-a (redactată după soluţia autorului problemei), pentru cazul că D_1 este un punct oarecare în interiorul triunghiului ABC.

Dreapta AD_1 taie latura BC în punctul A', BD_1 taie AC în B', iar CD_1 taie AB în C'. Se notează : cu p planul dus prin AB, paralel cu DD_1, cu a planul DBC, cu b planul ADC şi cu c planul ABD.

Dreapta $A'D$ (conţinută în a) trece prin A_1, $B'D$ (conţinută în b) trece prin B_1 şi $C'D$ (conţinută în c) trece prin C_1, datorită modului de construcţie a punctelor A_1 şi A', B_1 şi B', C_1 şi C'.

Dreapta CD intersectează planul p într-un punct E astfel, încît $C'E$ este paralelă cu DD_1 şi taie pe A_1B_1 în C_1'. Dreapta DD_1 înţeapă planul $A_1B_1C_1$ într-un punct D' situat pe dreapta $C_1'C_1$. Dreapta C_1E fiind situată în planul $CC'C_1'C_1$ intersectează dreapta D_1DD' într-un punct D_2.

În trapezul AA_1BB_1, dreapta AE (situată în planul b) trece prin B_1 iar BE (situată în planul a) trece prin A_1. Așa dar, E este intersecția diagonalelor acestui trapez; deoarece $C'C_1'$ este paralelă cu bazele lui, rezută egalitatea $C'E = EC_1'$.



În trapezul $CC'C_1C_1'$, dreapta D_1DD_2D' este paralelă cu bazele. Din relația

$$\frac{CD}{CE} = \frac{C_1D_2}{C_1E}$$

se deduce

$$\frac{D_1D}{C_1E} = \frac{D'D_2}{C_1'E}$$

și deci $D_1D = D'D_2$. Cum C_1C' trece prin D, rezultă $D_1D = DD_2$ (în trapezul $CC'EC_1$). Așa dar,

$$D'D_1 = 3\,DD_1. \qquad (1)$$

Dar volumul piramidei $A_1B_1C_1D_1$ este suma volumelor piramidelor $A_1B_1D'D_2$, $B_1C_1D'D_2$ și $A_1C_1D'D_2$ care sînt respectiv echivalente cu piramidele $ABD'D_2$, $BCD'D_2$, $ACD'D_2$. In adevăr, pentru a arăta echivalența între piramidele $A_1C_1D'D_2$ și $ACD'D_2$ de exemplu, este suficient să se observe că ariile triunghiurilor $D'D_1C_1$ și $D'D_1C$ sînt egale (deoarece vîrfurile C și C_1 sînt pe o paralelă la $D'D_1$), iar înălțimile coborîte din A și A_1 pe planul acestor triunghiuri sînt de asemenea egale (căci AA_1 este paralelă cu planul $D'D_1CC_1$).

Așa dar, volumul piramidei $A_1B_1C_1D_1$ este egal cu volumul piramidei $ABCD'$. Ținînd seama de relația (1), rezultă

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$$

adică proprietatea este valabilă, oricare ar fi D_1 în interiorul triunghiului ABC.

Soluția III-a (redactată după cea dată de elevul sovietic care a întrunit maximul de puncte posibil la O.I.M.).

Dreptele AD_1, BD_1, CD_1 taie laturile opuse ale bazei în A', B', C'. Dreapta A_1D este situată în planele A_1BC și A_1AA' așa că trece prin A'; analog se arată că B_1D trece prin B' și C_1D prin C'.

În vîrfurile triunghiului ABC se fixează respectiv greutățile x, y, z astfel ca centrul de greutate al său să fie D_1; se poate lua de exemplu

$$x = B'C, \quad y = \frac{CA'}{A'B} \cdot AB', \quad z = AB'.$$

Se verifică îndată*) că rezultantele greutăților $\frac{x}{2}$ și $\frac{z}{2}$, $\frac{y}{2}$ și $\frac{z}{2}$ se aplică în B', A'. Pentru a arăta că rezultanta greutăților $\frac{x}{2}$ și $\frac{y}{2}$ se aplică în C', se folosește teorema lui Ceva. Așa dar, se pot scrie relațiile

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{z}{x}, \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{y}{z}, \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{x}{y},$$

de unde

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{AC'}{AB} = \frac{y}{x+y}.$$

Notînd cu S_{MNP} aria triunghiului MNP, se poate scrie

$$\frac{S_{AC'B'}}{S_{ABC}} = \frac{AB' \cdot AC'}{AC \cdot AB} = \frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

și prin analogie

$$\frac{S_{BC'A'}}{S_{ABC}} = \frac{xz}{(y+x)(y+z)}, \quad \frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}} = \frac{xy}{(z+x)(z+y)}.$$

Prin urmare,

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AB'C'} - S_{BC'A'} - S_{CA'B'}}{S_{ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Deoarece piramidele $ABCD$ și $A'B'C'D$ au aceiași înălțime, rezultă

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Cum în A' se poate aplica greutatea $y+z$, rezultă

$$\frac{x}{y+z} = \frac{A'D_1}{D_1A} = \frac{A'D}{DA_1}.$$

În mod analog, se obține

$$\frac{B'D}{DB_1} = \frac{y}{x+z}, \frac{C'D}{DC_1} = \frac{z}{x+y}.$$

Unghiurile triedre $DA'B'C'$ și $DA_1B_1C_1$ fiind egale, volumele tetraedrelor $A'B'C'D$ și $A_1B_1C_1D$ sînt proporționale cu produsele muchilor laterale

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{A'D \cdot B'D \cdot C'D}{A_1D \cdot B_1D \cdot C_1D} = \frac{xyz}{(x+y)(y+x)(z+x)}.$$

---

*) v. manualul de fizică pentru clasa a VIII-a ed. 1963 sau lucrarea „Unele aplicații ale mecanicii în matematică" de V. A. Uspenski, Biblioteca S.S.M.F., Editura Tehnică, 1961.

Comparînd cele două rapoarte de volume, rezultă:

$$V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}.$$

Înlocuind greutăţile din A, B, C cu greutăţile $\frac{y+z}{2}$, $\frac{x+z}{2}$, $\frac{x+y}{2}$ fixate respectiv în A', B', C', centrul de greutate rămîne D_1.

Se plasează apoi în A_1, B_1, C_1 respectiv greutăţile $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$. Centrele de greutate ale perechilor de puncte (A_1, A'), (B_1, B'), (C_1, C') vor coincide în D, căci are loc relaţia

$$\frac{A_1D}{DA'} = \frac{AD_1}{D_1A'} = \frac{y+z}{x} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}}$$

şi încă două analoge. Rezultă că centrul de greutate al sistemului tuturor greutăţilor este D.

Pe de altă parte, centrul greutăţilor situate în A', B', C' este D_1 unde se aplică greutatea $x + y + z$. Centrul greutăţilor plasate în A_1, B_1, C_1 se află în planul acestor puncte şi pe dreapta DD_1, adică este punctul D'; unde se aplică greutatea $\frac{x+y+z}{2}$. Aşadar,

$$\frac{D_1D}{DD'} = \frac{1}{2} \text{ şi } \frac{D'D_1}{D'D} = \frac{3}{2}.$$

Deoarece însă tetraedrele $A_1B_1C_1D$ şi $A_1B_1C_1D_1$ au aceiaşi bază, rezultă

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{3}{2}.$$

Cum însă $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$, rezultă

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}.$$

Observaţii. 1° Problema poate fi generalizată considerînd D_1, în planul ABC, în afara triunghiului şi nesituat pe prelungirile laturilor.

2° — Majoritatea elevilor (47 au luat 6 puncte, iar 3 cîte 5 puncte) au rezolvat cazul particular, neabordînd cazul general. Doar 3 elevi au rezolvat complet problema iar alţi 3 au studiat parţial cazul general.

La prima selecţie a problemelor, juriul a oprit doar prima parte a problemei. Constatîndu-se că foarte mulţi elevi au rezolvat foarte bine problemele primei lucrări, s-a hotărît să se adauge ultima întrebare, pentru a avea posibilitatea de a alege pe elevii cei mai bine pregătiţi.

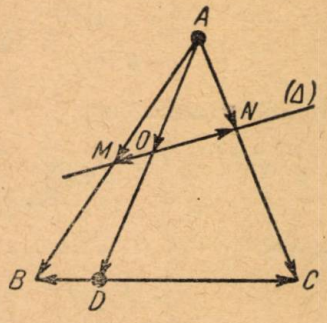
3°. Se constată din cele de mai sus, că rezolvarea completă a problemei cerea cunoaşterea unor proprietăţi ale figurilor plane şi în spaţiu, îndeminare în alegerea liniilor auxiliare sau metodei de lucru dar mai ales o dezvoltată capacitate de reprezentare spaţială.

Demonstrarea unor relații geometrice

În G.M.F. seria B nr. 12/1960 pag. 731—732 s-au dat două soluții pentru rezolvarea problemei:

Dacă o dreaptă (Δ) *intersectează laturile* AB, AC *precum și o ceviană* AD *ale unui triunghi* ABC, *respectiv în punctele* M, N, O *atunci avem relația*:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{AM}{AN}=\frac{OM}{ON}\cdot\frac{AB}{AC}$$



În cele ce urmează dăm o altă demonstrație folosind calculul vectorial.

Deoarece vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{ON}$ sînt respectiv coliniari cu vectorii $\overline{AM}$, $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{DB}$, $\overline{OM}$ avem:

$$\overline{AB}=m\overline{AM},\ \overline{AD}=p\overline{AO},\ \overline{AC}=n\overline{AN},\ \overline{DC}=q\overline{DB},\ \overline{ON}=r\overline{OM} \quad (1)$$

Se observă că:

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB};\ \overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC};\ \overline{AM}=\overline{AO}+\overline{OM};$$
$$\overline{AN}=\overline{AO}+\overline{ON} \quad (2)$$

Ținînd seama de (1) și (2) avem:

$$p\overline{AO}+\overline{DB}=m(\overline{AO}+\overline{OM}) \quad (3)$$
$$p\overline{AO}+q\overline{DB}=n(\overline{AO}+r\overline{OM}) \quad (4)$$

Scoțînd din (3) pe $\overline{DB}$ și substituindu-l în (4) avem:

$$(p+mq-qp)\ \overline{AO}+mq\overline{OM}=n\overline{AO}+nr\overline{OM}$$

Rezultă că:

$$p+mq-qp=n \quad (5)$$
$$mq=nr \quad (6)$$

Înlocuind în (5) și (6) valorile lui m, n, p, q, r scoase din (1) obținem:

$$\frac{DC}{DB}\left(\frac{AD}{AO}-\frac{AB}{AM}\right)=\frac{AD}{AO}-\frac{AC}{AN} \quad (5')$$
$$\frac{AB}{AM}\cdot\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AN}\cdot\frac{ON}{OM} \quad (6')$$

Relația (6′) este o altă formă sub care poate fi scrisă relația de demonstrat, iar (5′) este o nouă relație care are loc în ipotezele aceleiași probleme.

Viorel I. Mihăilescu,
asistent Institutul Politehnic, București

Generalizarea problemelor 5882, 6278

Considerăm suma de forma :

$$S_n^k = \frac{1^k}{q} + \frac{2^k}{q^2} + \cdots + \frac{n^k}{q^n}$$

Plecăm de la identitatea :

$$q \cdot \frac{(i+1)^k}{q^{i+1}} = C_k^0 \frac{i^k}{q^i} + C_k^1 \frac{i^{k-1}}{q^i} + C_k^2 \frac{i^{k-2}}{q^i} + \cdots + C_k^k \frac{1}{q^i}$$

Sumăm după i :

$$q \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+1)^k}{q^{i+1}} = C_k^0 \sum_{i=0}^{n} \frac{i^k}{q^i} + C_k^1 \sum_{i=0}^{n} \frac{i^{k-1}}{q^i} + C_k^2 \sum_{i=i}^{n} \frac{i^{k-2}}{q^i} + \cdots + C_k^k \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{q^i}$$

sau :

$$q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^k}{q^{i+1}} + q\frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} = C_k^0 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^k}{q^i} + C_k^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{k-1}}{q^i} +$$

$$+ C_k^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{k-2}}{q^i} + \cdots + C_k^k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^i} + 1$$

de unde :

$$qS_n^k = 1 - \frac{(n+1)^k}{q^n} + S_n^k + C_k^1 S_n^{k-1} + C_k^2 S_n^{k-2} + \cdots + C_k^k S_n^0$$

Obţinem :

$$(q-1)\, S_n^k = 1 - \frac{(n+1)^k}{q^n} + C_k^1 S_n^{k-1} + C_k^2 S_n^{k-2} + \ldots + C_k^k S_n^o \qquad (1)$$

Formula (1) ne permite să calculăm S_n^k cînd cunoaştem pe S_n^{k-1}, $S_n^{k-2}, \ldots, S_n^o$.

Prin calcul direct obţinem :

$$S_n^o = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^n} = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{q^{n+1}}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$$

Pe baza formulei (1) :

$$S_n^1 = \frac{1}{q-1}(1 - \frac{n+1}{q^n} + C_1^1 S_n^o) = \frac{1}{q-1}\left[1 - \frac{n+1}{q^n} + \frac{1}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(q-1)^2}\left[q - \frac{(q-1)\,n + q}{q^n}\right]$$

Analog,

$$S_n^2 = \frac{1}{(q-1)^3}\left[q^2 + q - \frac{(q-1)^2 n^2 + 2q(q-1)n + q^2 + q}{q^n} \right] \quad (2)$$

Prin inducție stabilim forma lui S_n^k:

$$S_n^k = \frac{1}{(q-1)^k}\left[a_k - \frac{P_k(n)}{q^n} \right] \quad (3)$$

unde $P_k(n)$ este un polinom de gradul k în n, iar a_k un polinom de gradul k în q.

Formula (3) se verifică pentru $k = 0, 1, 2$; presupunem că este adevărată pentru indicii superiori și să o stabilim pentru k.

Într-adevăr, conform relației (1):

$$S_n^k = \frac{1}{q-1}\left[1 - \frac{(n+1)^k}{q} + C_k^1 S_n^{k-1} + C_k^2 S_n^{k-2} + \ldots + C_k^k S_n^0 \right] =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[1 - \frac{(n+1)^k}{q^n} + C_k^1 \cdot \frac{1}{(q-1)^k}\left(a_{k-1} - \frac{P_{k-1}}{q^n} \right) + \right.$$

$$\left. + C_k^2 \frac{1}{(q-1)^{k-1}} \cdot \left(a_{k-2} - \frac{P_{k-2}}{q^n} \right) + \cdots + C_k^k \frac{1}{(q-1)} \left(a_0 - \frac{P_0}{q^n} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{(q-1)^{k+1}}\left[(q-1)^k + C_k^1 a_{k-1} + C_k^2 (q-1) a_{k-2} + \cdots + C_k^k (q-1)^{k-1} a_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+1)^k (q-1)^k + C_k^1 P_{k-1} + C_k^2 (q-1) P_{k-2} + \cdots + C_k^k (q-1)^{k-1} P_0}{q^n} \right]$$

adică evident, S_n^k este de forma (3), iar pentru a_k avem formula de recurență:

$$a_k = (q-1)^k + C_k^1 a_{k-1} + C_k^2 (q-1) a_{k-2} + \cdots + C_k^k (q-1)^{k-1} a_0 \quad (4)$$

$a_0 = 1$, după cum am găsit mai sus.

Observație. Cînd $|q| > 1$, avem:

$$\lim_{n \to \infty} S_n^k = \frac{1^k}{q} + \frac{2^k}{q^2} + \cdots + \frac{n^k}{q^n} + \cdots = \frac{a_n}{(q-1)^{k+1}}$$

2° Dacă în (4) luăm $q = 2$ obținem

$$\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \cdots, + \frac{n^2}{2^n} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$$

(adică problema 6278 din G.M.—B 4/1964.

I. Bîrsan, Iași

Asupra problemei 6501*

Perpendicularele p_i, duse din punctele A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) pe toate dreptele posibile d_k (care trec prin două din aceste puncte) sînt concurente, cîte trei, în cazul ortocentrelor, deci dacă

$$A_{i_1} \in p_{i_1} A_{i_2}, \in p_{i_2}, p_{i_2} A_{i_3} \in p_{i_3},$$

unde

$$p_{i_1} \perp A_{i_2} A_{i_3},\ p_{i_2} \perp A_{i_3} A_{i_1},\ p_{i_3} \perp A_{i_1} A_{i_2}.^{**}$$

Vom demonstra că *punctele $A_1, \ldots, A_5$ se pot alege în cazul general astfel încît trei perpendiculare (sau mai multe) să nu fie concurente, în puncte diferite de A_2 decît în cazurile ortocentrelor* ***.

Punctele care nu sînt ortocentre, dar în care se intersectează trei sau mai multe perpendiculare, sînt în număr finit de aceea afirmaţia de mai sus rezultă imediat dacă se aplică succesiv următoarea propoziţie :

Fie H punctul de intersecţie a 3 perpendiculare p_1, p_2, p_3, dar care nu e ortocentrul unui triunghi format de dreptele d_k. Atunci unul din punctele A_1 poate fi înlocuit cu A_1' astfel încît : (a) noile perpendiculare p_1', p_2', p_3' să se intersecteze în 3 puncte;

(b) *numărul punctelor rămase de intersecţie ale perpendicularelor să nu se modifice.*

Pentru a demonstra această propoziţie, se aleg notaţiile astfel, încît dreapta p_i să treacă prin punctul A_i şi să fie perpendiculară pe dreapta d_i, unde $i = 1, 2, 3$. Deoarece prin ipoteză se exclude cazul ortocentrelor, nu e posibilă îndeplinirea simultană a următoarelor trei relaţii

$$A_1 = d_2 \cap d_3,$$
$$A_2 = d_3 \cap d_1,\ A_3 = d_1 \cap d_2.$$

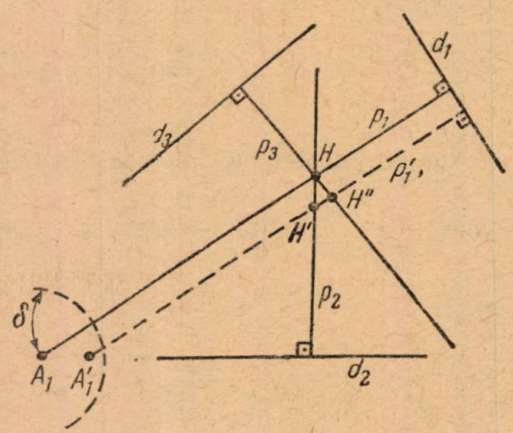


Fig. 1

Deci una dintre ele este falsă; se poate considera că prima relaţie este falsă, adică

$$A_1 \neq d_2 \cap d_3.$$

Să arătăm că, dacă δ este un număr pozitiv oarecare, atunci se poate găsi un punct $A_1' \neq A_1$ astfel încît să fie îndeplinită condiţia (a) şi

$$d(A_1', A_1) < \delta \qquad (1)$$

---

* v. şi art. Soluţiile problemelor date la a VI-a O.I.M., Moscova 1964. pag. 151 (N.R.).

** Se folosesc următoarele notaţii : $A \in p$ înseamnă că punctul A aparţine dreptei p; $A = p_1 \cap p_2$, A este intersecţia dreptelor p_1 şi p_2; $p \perp d$, dreptele p şi d sînt perpendiculare, $d(A, B)$ distanţa de la A la B.

*** De aci rezultă că există 5 puncte A aşa încît numărul punctelor distincte de intersecţie a perpendicularelor duse din ele pe dreptel d_k să fie de 310 (maximul indicat în soluţiile date în articolul citat mai sus). (N.R.)

În adevăr, dacă $A_1 \notin d_2$ și $A_1 \notin d_3$, A'_1 poate fi orice punct diferit de A_1 și care verifică relația (1). Dacă însă $A_1 \in d_2$ (respectiv $A_1 \in d_3$), atunci A'_1 poate fi orice punct $A'_1 \in d_2$ (respectiv $A'_1 \in d_3$) diferit de A_1 și care verifică (1). (fig. 1). Atunci dreptele d_1, d_2, d_3 și perpendicularele p_2, p_3 nu se modifică, în timp ce perpendiculara p_1 va fi înlocuită de dreapta paralelă cu ea $p'_1 \ni A'_1$ și care intersectează pe p_2 și p_3 în două puncte diferite H' și H''. Noile perpendiculare p'_1, $p'_2 \equiv p_2$, $p'_3 \equiv p_3$ se intersectează în trei puncte H, H', H'', adică are loc (a).

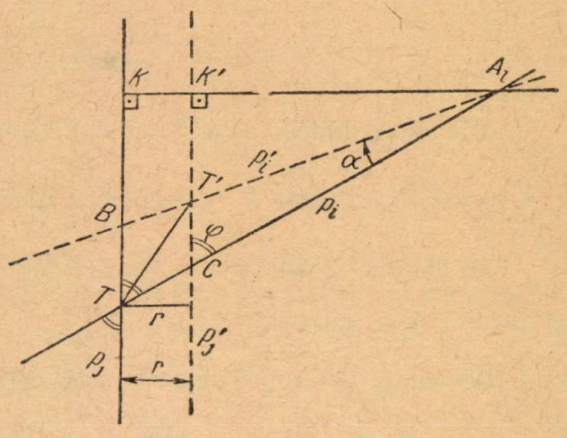


Fig. 2

Să arătăm acum că, dacă δ este suficient de mic, atunci este îndeplinită și condiția (b).

În adevăr, coordonatele carteziene ale punctelor de intersecție a perpendicularelor sînt funcții continue de coordonatele punctelor A_i; de aceea, la un δ suficient de mic, coordonatele acestor puncte de intersecție variază cu mai puțin decît jumătate din distanța minimă dintre punctele inițiale de intersecție, așa că oricare două din noile puncte de intersecție nu se suprapun.

Mai jos se demonstrează aceeași afirmație fără a folosi explicit noțiunea de continuitate.

Fie r_0 jumătate din distanța minimă dintre perechile de puncte de intersecție a perpendicularelor; fie T punctul de intersecție a două perpendiculare arbitrare p_i și p_j (fig. 2). Înlocuind pe A_1 cu A'_1, perpendicularele p_i, p_j se înlocuesc cu p'_j, p'_i și rezultă un nou punct de intersecție T'. Să demonstrăm că la un δ suficient de mic, rezultă $d(T,T') < r_0$ (de unde rezultă imediat (b)).

Fie p una din dreptele p_i și p_j, d acea dreaptă din $\{d_k\}$ pe care p este normală și p' dreapta în care se transformă p, cînd A_1 devine A'_1. Sînt posibile următoarele trei cazuri:

(1): p coincide cu p' (dacă $A_1 \notin p$, $A_1 \notin d$),

(2): p' face cu p unghiul α (dacă $A_1 \notin p$, dar $A_1 \in d$),

(3): $p' \| p$ și se găsește la distanța r de p (dacă $A_1 \in p$ și $A_1 \notin d$.)

Astfel este evident că numerele α și r sînt oricît de mici, dacă δ este suficient de mic.

Pentru demonstrarea inegalității $d(T, T') < r_0$, trebuie considerate combinările a două din aceste trei cazuri.

Ne limităm la considerarea unui singur caz: se presupune că p_i face cu p'_i unghiul α, iar p'_j este translatată paralel cu p_j la distanța r. Față de acest caz celelalte sînt analoge sau mai simple.

Este evidentă inegalitatea: $TT' < TC + CT'$.

Fiecare termen al sumei se calculează separat (v. notaţiile pe figura 2).

Deoarece

$$TC = \frac{r}{\sin\varphi},$$

rezultă

$$CT < \frac{r_0}{2}, \text{ pentru } r < \frac{r_0 \sin\varphi}{2}.$$

Din triunghiurile $A_iK'T'$ şi $A_iK'C$, se obţine:

$$T'C = (A_iK - r)\,[\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)] = (A_iK - r)\,\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi \sin(\alpha + \varphi)}.$$

În enunţul problemei se dă $\varphi \neq 0$; de aceea, dacă α este suficient de mic, $\sin(\alpha + \varphi)$ va fi mai mare decît o anumită constantă pozitivă, şi rezultă $T'C < (\text{const.}) \cdot \sin\alpha$.

De aceea $T'C < \frac{r_0}{2}$, dacă α este suficient de mic.

Din inegalităţile $T'C < \frac{r_0}{2}$ şi $TC < \frac{r_0}{2}$ (care sînt verificate pentru α şi r suficient de mici), se obţine inegalitatea $TT' < r_0$.

Aleksei Sosinski
asistent, Univ. „Lomonosov", Moscova

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6323

Să se arate că:

$$2bc\,(b + c) > a\,(b + c - a)\,(b + c) > 2abc\cos A$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

(The Mathematical Gazette, Londra, 1963)

Soluţie dată de *Popa Eugen*, elev Iaşi

Vom demonstra separat:

$$2bc > a\,(b + c - a);\ (b + c - a)\,(b + c) > 2bc\cos A$$

Făcînd substituţia $a = x + y$; $b = y + z$; $c = z + x$ se observă imediat că este necesar şi suficient ca $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ pentru ca a, b, c să fie laturi ale unui triunghi. Obţinem inegalitatea

$$2\,(y + z)\,(z + x) > 2z\,(x + y)$$

sau $xy + z^2 > 0$, ceea ce este evident, căci $x > 0$, $y > 0$ prin ipoteză — Efectuînd calculele și înlocuind $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ găsim :

$$b^2 + bc + bc + c^2 - ab - ac > b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2bc > a(b + c - a)$$

adică tocmai prima inegalitate, care a fost demonstrată. Deci inegalitățile date sînt demonstrate.

Problema 6328

Să se arate că :

$$\sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}} = \sqrt[3]{63 + \sqrt{5300}} + \sqrt[3]{63 - \sqrt{5300}} = 3.$$

Eugen I. Popa, elev Iași

Soluție dată de *Chițescu Ion*, elev București. — Notăm :

$$\sqrt[3]{18 + \sqrt{325}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{325}} = E_1$$

$$\sqrt[3]{63 + \sqrt{5300}} + \sqrt[3]{63 - \sqrt{5300}} = E_2$$

Ridicăm la cub

1) $E_1^3 = 18 + \sqrt{325} + 18 - \sqrt{325} + 3\sqrt[3]{18^2 - 325} \cdot E_1$

$E_1^3 = 36 + 3\sqrt[3]{324 - 325} \cdot E_1 = 36 - 3E_1$

Se vede ușor că ecuația $E_1^3 + 3E_1 - 36 = 0$ admite singura rădăcină reală $E_1 = 3$.

2) Analog, $E_2^3 = 63 + \sqrt{5300} + 63 - \sqrt{5300} + 3\sqrt[3]{63^2 - 5300} \cdot E_2 =$
$= 126 + 3\sqrt[3]{3969 - 5300} \cdot E_2 = 126 + 3\sqrt[3]{-1331} \cdot E_2 = 126 - 33E_2$.

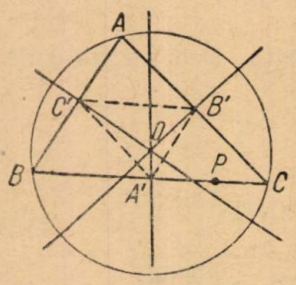
La fel se vede că și ecuația $E_2^3 + 33E_2 - 126 = 0$ admite unica rădăcină reală $E_2 = 3$.

Problema 6329

Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i centrul cercului circumscris, direcțiile celor trei mediatoare și un punct pe una din laturi.

Flondor Paul, elev București

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. — Presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul de construit, $A'B'C'$ triunghiul format de mijloacele laturilor , O centrul cercului circumscris și P un punct pe BC. Observăm că PA', $A'B'$ și $A'C'$ sînt perpendiculare respectiv pe OA', OC', OB'. Rezultă construcția.



Ducem paralel la direcțiile date dreptele OA', OB', OC' ce trec prin O. Perpendiculara din P pe OA' taie această mediatoare în A'. Perpendicularele din A' pe OB' și OC' taie pe OC', respectiv OB' în B' și C'. Am obținut astfel triunghiul $A'B'C'$. Paralela din A' la $B'C'$ și cea din B' la $A'C'$ se taie în C. Analog construim pe A și B.

Problema 6336

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(a+kx) - \operatorname{tg}^n a}{x}$ *și să se determine* $a \in (0, \pi)$ *în cazul* $k = 3$ *și limita are valoarea* 72.

I. Hadîrcă, profesor Breaza

Soluție dată de *Spircu Tiberiu*, elev Arad.

Vom stabili valoarea limitei prin inducție completă :

pentru $k = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos(a+x) \cos a} = \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \operatorname{tg}^2 a$$

pentru $k = 2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x}$$

Fie $E_1 = \dfrac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a}{x}$ și $E_2 = \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x}$.

Calculăm $\lim\limits_{x\to 0} [E_2 - E_1 \operatorname{tg}(a+2x)] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} a \sin 2x}{x \cos(a+2x) \cos a} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{tg} a \sin x \cos x}{x \cos(a+2x) \cos a} = 2\operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 a)$$

deci, $\lim\limits_{x\to 0} E_2 = \operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 a) + 2 \operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 a) = 3 \operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 a)$

Pentru $k = 3$:

În mod cu totul analog, găsim :

$$\lim_{x\to 0} E_3 = \lim_{x\to 0} [E_2 \cdot \operatorname{tg}(a+3x)] + 3 \operatorname{tg}^2 a (1 + \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= 6 \operatorname{tg}^2 a (1 + \operatorname{tg}^2 a)$$

Coeficienții 1, 3, 6, 10 provin din șirul cu termen general $\frac{n(n+1)}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0} E_n = \frac{n(n+1)}{2} \operatorname{tg}^{n-1} a\,(1+\operatorname{tg}^2 a)$.

Să arătăm că $\lim\limits_{x\to 0} E_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \operatorname{tg}^n a\,(1+\operatorname{tg}^2 a)$.

Vom utiliza aceeași metodă:

$$\lim_{x\to 0}\{E_{n+1} - E_n \operatorname{tg}[a+(n+1)x)]\} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^n a \sin(n+1)x}{x\cos[a+(n+1)x]\cos a} =$$

$$= (n+1)\operatorname{tg}^n a\,(1+\operatorname{tg}^2 a)$$

$$\lim_{x\to 0} E_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}\operatorname{tg}^n a\,(1+\operatorname{tg}^2 a) + (n+1)\operatorname{tg}^n a\,(1+\operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\operatorname{tg}^n a\,(1+\operatorname{tg}^2 a).$$

În cazul $k=3$ și $\lim\limits_{x\to 0} E_3 = 72$ obținem ecuația: $\operatorname{tg}^4 a + \operatorname{tg}^2 a - 12 = 0$ cu rădăcinile $(\operatorname{tg}^2 a)_1 = 3$; $(\operatorname{tg}^2 a)_2 = -4$, din care se scoate: $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$ cu $a = \frac{\pi}{3}$ și $a = \frac{2\pi}{3}$.

Problema 6341

Să se demonstreze că produsul a două numere de forma $a^3+b^3+c^3-3abc$, unde a, b, c sînt numere întregi, este un număr de aceeași formă și să se arate că:

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)^n = A^3+B^3+C^3-3ABC$$

cu A, B, C întregi satisfăcînd relația $A+B+C=(a+b+c)^n$, unde n este un număr natural.

Ion Tomescu, student București

Soluția autorului. Fiind date numerele întregi a, b, c și a_1, b_1, c_1 să arătăm că putem găsi trei numere întregi a_2, b_2, c_2 așa ca:

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(a_1^3+b_1^3+c_1^3-3a_1b_1c_1) = a_2^3+b_2^3+c_2^3-3a_2b_2c_2 \quad (1)$$

Dar, oricare ar fi numerele a, b, c se știe că $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, relație care se verifică imediat.

Deci trebuie ca:

$$(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_1b_1-b_1c_1-c_1a_1) = (a_2+b_2+c_2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2-a_2b_2-b_2c_2-c_2a_2)$$

Să căutăm să satisfacem această relație alegînd pe a_2, b_2 și c_2 așa ca: $(a+b+c)(a_1+b_1+c_1) = a_2+b_2+c_2$ sau:

$$aa_1+bb_1+cc_1+bc_1+cb_1+ca_1+ac_1+ba_1+ab_1 = a_2+b_2+c_2$$

Egalitatea (1) este îndeplinită dacă alegem :

$$a_2 = aa_1 + bc_1 + cb_1\,;\; b_2 = ac_1 + bb_1 + ca_1\,;\; c_2 = ab_1 + ba_1 + cc_1\,. \quad (2)$$

Într-adevăr, trebuie ca :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_1b_1 - b_1c_1 - c_1a_1) =$$
$$= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_2b_2 - b_2c_2 - c_2a_2$$

sau :

$$a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 + a^2b_1^2 + a^2c_1^2 - a^2a_1b_1 - a^2b_1c_1 - a^2c_1a_1 + b^2a_1^2 +$$
$$+ b^2c_1^2 - b^2a_1b_1 - b^2b_1c_1 - b^2c_1a_1 + c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - c^2a_1b_1 - c^2b_1c_1 -$$
$$- c^2c_1a_1 - a_1^2ab - b_1^2ab - c_1^2ab + aba_1b_1 + abb_1c_1 + abc_1a_1 - a_1^2bc -$$
$$- b_1^2bc - c_1^2bc + a_1b_1bc + b_1c_1bc + c_1a_1bc - a_1^2ca - b_1^2ca - c_1^2ca +$$
$$+ a_1b_1ca + b_1c_1ca + c_1a_1ca = a^2a_1^2 + b^2c_1^2 + c^2b_1^2 + 2aa_1bc_1 +$$
$$+ 2aa_1cb_1 + 2bcb_1c_1 + a^2c_1^2 + b^2b_1^2 + c^2a_1^2 + 2abb_1c_1 + 2ac a_1c_1 +$$
$$+ 2bc a_1b_1 + a^2b_1^2 + b^2a_1^2 + c^2c_1^2 + 2ab a_1b_1 + 2acb_1c_1 + 2bc a_1c_1 -$$
$$- a^2a_1c_1 - aba_1b_1 - aca_1c_1 - abc_1^2 - b^2b_1c_1 - bca_1c_1 - acb_1c_1 -$$
$$- bcb_1^2 - c^2a_1b_1 - a^2a_1b_1 - aba_1^2 - aca_1c_1 - abb_1c_1 - b^2a_1c_1 -$$
$$- bcc_1^2 - acb_1^2 - bca_1b_1 - c^2b_1c_1 - a^2b_1c_1 - aba_1c_1 - acc_1^2 - abb_1^2 -$$
$$- b^2a_1b_1 - bcb_1c_1 - aca_1b_1 - bca_1^2 - c^2a_1c_1$$ şi egalitatea este demonstrată.

Deci, mulţimea numerelor de forma $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ este închisă faţă de înmulţire, adică, înmulţind două numere de aceeaşi formă obţinem un număr de aceeaşi formă.

Dacă $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ atunci $a_2 = a^2 + 2bc\,;\; b_2 = b^2 + 2ac\,;\; c_2 = c^2 + 2ab$. Vom demonstra că există A, B, C întregi aşa ca $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^n = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ prin inducţie completă. Pentru $n = 1$ putem lua $A = a$, $B = b$, $C = c$.

Dacă avem $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^{n-1} = A_1^3 + B_1^3 + C_1^3 - 3A_1B_1C_1$ rezultă $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^n = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(A_1^3 + B_1^3 + C_1^3 - 3A_1B_1C_1) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ unde A, B, C se obţin cu formulele :

$$A = aA_1 + bC_1 + cB_1\,;\; B = aC_1 + bB_1 + cA_1\,;\; C = aB_1 + bA_1 + cC_1 \quad (3)$$

deci, din presupunerea că proprietatea este adevărată pentru $n - 1$ a reieşit că este adevărată şi pentru n, deci este adevărată pentru orice n număr natural.

Proprietatea $A + B + C = (a + b + c)^n$ o vom demonstra tot prin inducţie completă. Pentru $n = 1$, $A = a$, $B = b$, $C = c$ şi $A + B + C = a + b + c$. Dacă proprietatea este adevărată pentru $n - 1$, adică $A_1 + B_1 + C_1 = (a + b + c)^{n-1}$ rezultă $A + B + C = aA_1 + bC_1 + cB_1 + aC_1 + bB_1 + cA_1 + aB_1 + bA_1 + cC_1 = (a + b + c)(A_1 + B_1 + C_1) = (a + b + c)^n$ adică este adevărată şi pentru n, deci pentru orice număr

n natural. Ţinînd seama de descompunerea în factori a expresiei $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, mai rezultă că :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)^n = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC.$$

Problema 6342

Să se arate că :

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos n^\circ \cdot \cos (n+1)^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(n+1)^\circ}{\sin 1^\circ}$$

Soluţie şi *generalizare* date de *Mihalca Dan*, elev s.m. 11 Bucureşti. — Să evaluăm suma

$$S = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos (\alpha + \beta)} + \frac{1}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)} + \frac{1}{\cos (\alpha + 2\beta) \cos (\alpha + 3\beta)} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{\cos [\alpha + (n-1)\beta] \cos (\alpha + n\beta)}$$

Avînd în mod evident relaţiile :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\beta) - \operatorname{tg}[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\sin \beta}{\cos (\alpha + n\beta) \cos [\alpha + (n-1)\beta]}$$

Adunînd aceste relaţii. avem :

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + n\beta) - \operatorname{tg}\alpha}{\sin \beta} = S$$

Însă suma noastră este un caz particular al celei de mai sus pentru $\beta = 1^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, şi $(n+1)$ în loc de n.

Soluţia a II-a dată de *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu şi *Lupu Valentin*, elev Bucureşti. — Folosim inducţia completă :

Pentru $n = 0$ avem :

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \sin 1^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

Presupunem egalitatea adevărată şi pentru $n-1$ adică avem:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos (n-1)^\circ \cos n^\circ} = \frac{\operatorname{tg} n^\circ}{\sin 1^\circ}$$

Să verificăm dacă există şi egalitatea:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos (n+1)^\circ \cos n^\circ} = \frac{\operatorname{tg} (n+1)^\circ}{\sin 1^\circ}$$

Din această relaţie scădem pe prima şi avem de verificat:

$$\frac{1}{\cos n^\circ \cos (n+1)^\circ} = \frac{\operatorname{tg}(n+1)^\circ - \operatorname{tg} n^\circ}{\sin 1^\circ}$$

dar:

$$\operatorname{tg}(n+1)^\circ - \operatorname{tg} n^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos n^\circ \cos (n+1)^\circ}$$

de unde avem evident:

$$\frac{1}{\cos n^\circ \cos (n+1)^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\cos n^\circ \cos (n+1)^\circ \sin 1^\circ}$$

Problema 6343

Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos k\alpha = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{n}{2}.$$

Liviu V. Ptrşan, student Bucureşti

Soluţie dată de *Popa Eugen*, elev Iaşi

Vom demonstra prin inducţie completă. Pentru $n = 2$ se verifică: $\cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$; Considerăm că:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos k\alpha = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{n}{2}$$

şi să arătăm că:

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \cos k\alpha = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{n+1}{2}.$$

Scăzînd cele două relaţii, rămîne să arătăm că:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\alpha}{2} - \sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Făcînd calculele în membrul al doilea, se ajunge la:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}$$

relaţie bine cunoscută. Deci şi relaţia dată este adevărată.

Problema E: 2205

Se dă triunghiul ABC. Pe latura AB se ia punctul M astfel ca segmentul AM să fie 3/8 din latura AB, iar pe latura BC se ia punctul N astfel ca segmentul BN să fie 4/9 din latura BC. Să se fixeze pe latura AC un punct P, astfel ca aria patrulaterului $AMNP$ să reprezinte 30% din aria triunghiului ABC.

Victor Florescu, R. Vîlcea

Soluţie dată de *Miţa T. Gh.* cl. VIII Călăraşi.
Dacă BN este 4/9 din BC, atunci NC este 5/9 din BC. Rezultă că ariile triunghiurilor ABN şi ACN, cu aceeaşi înălţime, sînt 4/9 şi respectiv 5/9 din aria triunghiului ABC. Aria patrulaterului $AMNP$ este suma ariilor triunghiurilor AMN şi APN.

Aria triunghiului AMN este 3/8 din aria triunghiului ABN, sau

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

din aria triunghiului ABC.

Aria triunghiului APN completează 30% din aria triunghiului ABC, adică este

$$\frac{30}{100} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

din aria triunghiului ABC, sau:

$$\frac{2}{15} : \frac{5}{9} = \frac{6}{25}$$

din aria triunghiului ACN. Rezultă că segmentul AP este $\frac{6}{25}$ din latura AC şi deci punctul P se fixează pe latura AC la $\frac{6}{25}$ de la vîrful A.

Problema E : 2210

Suprafața arabilă a unei gospodării agricole de stat este împărțită în 5 loturi. Primul lot reprezintă 2/7 din toată suprafața, al doilea lot 0,2 din rest, al treilea 1,(2) din al doilea, al patrulea 7/40 din suprafața lotului al doilea și al treilea la un loc, iar al cincilea întrece cu 14 ha suprafața primului lot.

Să se afle : a) *Ce suprafață arabilă are gospodăria?* b) *Ce suprafață are fiecare lot?*

Soluția dată de *Lascu Ion* cl. VIII S. m. 2 Cluj.

Să exprimăm fiecare lot în raport cu suprafața totală ca întreg.

— Primul lot are 2/7 unități ;

— Al doilea lot $\frac{2}{10}$ din rest, din $\frac{5}{7}$ ceea ce face

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1}{7}\text{ unități ;}$$

— Al treilea are 1, (2) adică $1\frac{2}{9}$ din $\frac{1}{7}$

$$1\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7}=\frac{11}{63}\text{ unități ;}$$

— Al patrulea lot este reprezentat prin

$$\frac{7}{40}\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{11}{63}\right)=\frac{7}{40}\cdot\frac{20}{63}=\frac{1}{18}$$

Dacă scădem aceste fracții din întreg obținem cel de-al cincilea lot,

$$1-\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{11}{63}+\frac{1}{18}\right)=\frac{43}{126}$$

Diferența dintre această fracție și 2/7 este :

$$\frac{43}{126}-\frac{2}{7}=\frac{7}{126}$$

Suprafața terenului întreg este deci

$$14:\frac{7}{126}=252\text{ ha}$$

Suprafețele celor cinci loturi se găsesc imediat : ele sînt : 72 ha, 36 ha., 44 ha, 14 ha și 86 ha.

Problema E : 2219

Să se arate că avem egalitățile :

$$34514_6+12321_4=5383_{10}$$
$$1\,010\,101_2-333_4=22_{10}$$

Indicii 2, 4, 6, 10 arată baza sistemului de numerație.

I. Bogatu, profesor Tecuci

Soluția dată de *Păun Ion*, cl. VIII S.m 1 Craiova.
Avem pentru primul exercițiu :

$$34514_6 = 3 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 4 =$$
$$= 3888 + 864 + 180 + 6 + 4 = 4942_{10}$$
$$12321_4 = 1 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 =$$
$$= 256 + 128 + 48 + 8 + 1 = 441_{10}$$

deci :

$$4942 + 441 = 5383$$

Pentru al doilea exercițiu avem :

$$1010101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 64 + 16 + 4 + 1 = 85_{10}$$
$$333_4 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 48 + 12 + 3 = 63_{10}$$

deci,

$$85 - 63 = 22.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Institutul de Construcții București

sesiunea septembrie 1964

6795. Într-un cerc de centru O se ia un diametru AB. Un unghi cu vîrful în A, de mărime constantă u (mai mică de 90°), se rotește în jurul lui A. Laturile sale taie cercul în M și N, iar dreptele AN și MB se taie în P. Să se arate că :

a) Presupunînd că M și N sînt deoparte și de alta a diametrului AB, unghiul APB este constant.

b) Dacă M și N sînt de aceeași parte a diametrului AB, unghiul APB este de asemenea constant. Ce legătură există între cele două valori constante găsite mai sus?

6796. Se dă o sferă de centru O și rază R și un punct V exterior sferei, distanța OV fiind notată cu d. Se consideră conul de vîrf V circumscris sferei, planul cercului de bază fiind planul de contact între con și sferă.

a) Să se calculeze aria laterală a conului astfel definit în funcție de R și d.

b) Să se exprime ariile calotelor determinate de cercul de contact pe sferă. Cît trebuie să fie d pentru ca raportul ariilor celor două calote să fie 1/2?

6797. Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{\cos 4a}{\sin a} + \frac{\sin 4a}{\cos a} = 2\cos a\,(\operatorname{ctg} 2a - \operatorname{tg} a)$$

6798. a) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 2(m+1) \\ 9a + 3b + c &= 2(m+1)^2 \end{aligned}$$

necunoscutele fiind a, b şi c, care se vor determina în funcţie de m.

b) Cu a, b, c găsiţi mai sus, se alcătuieşte ecuaţia de gradul al doilea :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Să se studieze natura şi semnele rădăcinilor acestei ecuaţii cînd parametrul m variază.

c) Să se arate că notînd cu x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei precedente avem relaţia :

$$y = x_1 x_2 - x_1 - x_2 = \frac{2}{m^2} - 1$$

şi să se reprezinte grafic funcţia

$$y = \frac{2}{x^2} - 1.$$

6799. Se consideră ecuaţia

$$x^3 + 2x^2 - (m+8)x + 2m = 0$$

Se cere să se determine parametrul m astfel încît între rădăcini să avem relaţia

$$x_2 x_3 + 6x_1 = 0$$

şi apoi să se rezolve ecuaţia.

6800. Să se reprezinte grafic funcţia :

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 5x + 6}$$

6801. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, A fiind vîrful unghiului drept. Cateta AC se împarte în trei părţi egale prin punctele M_1 şi M_2, adică $AM_1 = M_1M_2 = M_2C$. Se notează cu $m_1 = \sphericalangle CBM_1$ şi $m_2 = \sphericalangle CBM_2$.

a) Să se calculeze $\operatorname{tg} m_1$ şi $\operatorname{tg} m_2$ în funcţie numai de $\operatorname{tg} B$.

b) Dacă $m_1 = \pi/6$ să se determine unghiul B.

6802. Se consideră triunghiul isoscel ABC, unde $AB = AC$ şi AD înălţimea din A. Fie E intersecţia acestei înălţimi cu bisectoarea unghiului B şi F intersecţia bisectoarei cu perpendiculara în A pe AB.

a) Să se stabilească relaţia : $AB \cdot DE = AF \cdot BD$.

b) Să se arate că dacă patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil, atunci triunghiul ABC este echilateral.

6803. a) Se dă o sferă de rază R și un con de rotație care are ca bază un cerc mare al sferei. Să se calculeze înălțimea conului astfel încît al doilea cerc de intersecție al conului cu sfera să aibă raza egală cu jumătate din raza sferei.

b) Să se calculeze volumul și aria totală a trunchiului de con obținut prin secționarea conului cu planul celui de-al doilea cerc de intersecție al conului cu sfera.

* * *

6804. Să se determine cifrele x, y, z știind că egalitatea

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xxx\ldots x}}_{\text{2n cifre}} - \underbrace{\overline{yyy\ldots y}}_{\text{n cifre}}} = \underbrace{\overline{zzz\ldots z}}_{\text{n cifre}}$$

are loc pentru cel puțin două valori distincte ale numărului natural n

Să se găsească toate valorile lui n pentru care egalitatea are loc.

(propusă de R.P.B. la a VI-a O.I.M.)

6805. Fie $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$C_n^2\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_2a_n} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_1+a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_n} + \frac{1}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{1}{a_2+a_n} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+a_n}\right)^2$$

Ce relație satisfac numerele a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, pentru a avea egalitate?

(Propusă de R.S.F.J. la a VI-a O.I.M.)

6806. Pe un cerc se dau n puncte care se unesc prin linii drepte. Să se determine numărul maxim al ariilor în care este împărțită aria cercului de aceste drepte.

(Propusă de R.P.P. la a VI-a O.I.M.)

6807. Cîte soluții reale are ecuația

$$x = 1964 \sin x - 189\ ?$$

(propusă de R.D.G. la a VI-a O.I.M.)

6808. Să se arate că dacă A B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci

$$\cos A + \cos B + \cos C < 2$$

(Olimpiada matematică, R.P.U. 1964)

6809. Să se afle forma generală a numerelor întregi și pozitive n astfel ca întregul $n^2 + n + 1$ să fie multiplu de 13.

(Bacalaureat matem. element., Franța, 1964)

6810. Fie x și y două numere reale și

$$x^6 - 15x^4 y^2 + 15x^2y^4 - y^6 = f(x, y)$$

$$6x^5 y - 20x^3y^3 + 6xy^5 = g(x, y)$$

a) Să se rezolve sistemul $f(x, y) = 1$; $g(x, y) = 0$.

b) Să se verifice că $f(x, y) + ig(x, y) = (x + iy)^6$ și să se arate că rezolvarea sistemului precedent dă soluțiile ecuației $z^6 = 1$, unde $z = x + iy$. Să se rezolve această ecuație punînd $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

(Bacalaureat matem. element., Maroc. 1964)

PROBLEME PROPUSE*

6811. Se consideră un pătrat $ABCD$ și triunghiul AED al cărui vîrf E se află pe cercul circumscris pătratului. Fie H ortocentrul triunghiului AED și L, M intersecțiile dreptelor BH și CH cu laturile EA și ED. Să se demostreze că dreapta LM este paralelă cu latura BC a pătratului și egală cu jumătatea ei.

C. Herling, București

6812. Știind că a_1, a_2, a_3, a_4 sînt termenii unei progresii aritmetice, să se rezolve ecuația :

$$\frac{a_1 a_4}{x^2 - a_1 x + 1} + \frac{-a_2 a_3}{x^2 - a_2 x + 1} + \frac{-a_2 a_3}{x^2 - a_3 x + 1} +$$

$$+ \frac{a_1 a_4}{x^2 - a_4 x + 1} = 0,$$

exprimîndu-se rădăcinile în funcție de a_1 și a_4.

Udriște Constantin

---

* IX (6811 – 6815); X (6816 – 6835); XI (6836 – 6839). Soluțiile se primesc pînă la 30 iulie 1965.

6813. Să se rezolve ecuaţiile :

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Aax + a^2 = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 - Aax + a^2 = 0$$

Predescu Ştefan, Slatina

6814. Într-un triunghi dreptunghic în A se duc trisectoarele AA_1 şi AA_2, adică $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AA_2 = 30°$, A_1 şi A_2 fiind pe BC. Să se arate că

$$2\left(\frac{1}{AA_1^2} - \frac{1}{AA_2^2}\right) = \frac{1}{AC^2} - \frac{1}{AB^2}$$

Liviu Pirşan, student Bucureşti

6815. Să se efectueze produsul :

$$E^n = (x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x^2 - x - 1).$$
$$(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1).$$

Aplicaţie $n = 5$.

C. Berdan

6816. Să se reprezinte grafic funcţiile :

$$f(x) = |1 + |x|| - |1 - |x||,$$
$$g(x) = |1 + x| + |1 - |x||,$$
$$h(x) = |1 + |x|| - |1 - x|.$$

C. Ionescu-Ţiu

6817. Să se rezolve ecuaţiile :

$$8(1 - \sin x)(1 + \cos x) = 9\cos^2 x$$
$$8(1 + \sin x)(1 - \cos x) = 9\cos^2 x$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

6818. Să se arate că numărul $N = 7^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 43.2^{3n+1} \cdot 11^n$ este divizibil prin 53, iar numărul $M = 2n^6 - 7n^5 - 35n^4 + 25n^3 + 33n^2 - 18n$ este divizibil prin 60, unde n este un număr natural.

Florica H. Ionescu, Bucureşti

6819. Să se afle cel mai mic număr n pentru care expresia să fie

$$E = 54^n - 12^n - 9^n + 6^n + 2^n + n$$

divizibilă cu 35.

Al. Filipoiu, Buzău

6820. Se dă tetraedrul $ABCD$ şi în interiorul lui un punct I. Dreptele AI, BI, CI, DI taie feţele opuse în punctele A', B', C', D'. Să se arate că există inegalitatea

$$\frac{AA'}{AI} + \frac{BB'}{BI} + \frac{CC'}{CI} + \frac{DD'}{DI} \geqslant \frac{16}{3}$$

George Georgescu, student Bucureşti,

6821. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele pozitive x, y, z, t are loc inegalitatea :

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} + \frac{y^2+z^2+t^2}{y+z+t} + \frac{z^2+t^2+x^2}{z+t+x} + \frac{t^2+x^2+y^2}{t+x+y} \geqslant$$
$$\geqslant x+y+z+t$$

* * *

6822. Se dă ecuaţia :

$$\sin x \cos x\,(a \sin^2 x - 3\cos^2 x) + 2 = 13 \sin^2 x \cos^2 x - 7\cos^4 x$$

Să se determine valoarea parametrului a şi să se rezolve această ecuaţie cunoscînd că două din rădăcinile ei satisfac relaţia :

$$2 \sin(x_1 + x_2) + \cos x_1 \cdot \cos x_2 = 0$$

C. Săndulache, profesor Negreşti Iaşi

6823. Două drepte (D_1) şi (D_2), situate în planul (P) se taie în punctul O sub un unghi de 45°. În punctul O se ridică perpendiculara $OA = a$ pe planul (P) şi prin A se duce o paralelă la dreapta (D_2) pe care se ia segmentul $AB = a\sqrt{5}/\sqrt{2}$. Se proiectează apoi punctul B pe dreapta (D_1) în C şi se uneşte C cu A. Se cere :

a) Să se arate că triunghiul ABC este isoscel ; b) să se calculeze unghiul făcut de înălţimea vîrfului B din triunghiul ABC, cu planul (P).

E. Morfun

6824. Să se arate că :

$$x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$$

se divide prin $x^2 + x + 1$;

$3^{3n} \cdot 7^n - 5^{2n}$ se divide prin 41 ;

$4^{4n} - 3^{3n} \cdot 2^{2n}$ se divide prin 37.

n fiind un număr natural.

Gabriela Scheffel, Cîmpulung

6825. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi atunci există proprietăţile următoare :

a) Dacă $\operatorname{tg}A$, $\operatorname{tg}B$, $\operatorname{tg}C$ sînt în progresie aritmetică atunci şi $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ sînt de asemenea în progresie aritmetică ;

b) Dacă $\operatorname{cotg} A$, $\operatorname{cotg} B$, $\operatorname{cotg} C$ sînt în progresie aritmetică, atunci și $\cos 2A$, $\cos 2B$, $\cos 2C$ sînt tot în progresie aritmetică;

c) Să se demonstreze că aceste proprietăți sînt și reciproce.

I. Teodorescu, profesor Galați

6826. Să se afle relația dintre laturile unui triunghi ABC știind că între unghiurile lui există relația : $A = kB$, unde k este număr natural. Să se particularizeze pentru $k = 1, 2, 3, 4$. Să se arate că pentru $k = 3$ se obține $a^2c^2(a + b) = b\lambda^2$, unde $\lambda = a^2 - b^2 + c^2$. În legătură cu problema 5400.

I. Șiclovan, Petroșani

6827. Să se arate că :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2^k \operatorname{tg} 2^k a) + 2^n \operatorname{cotg} 2^n a = \operatorname{cotg} a$$

Acu Dumitru, Cluj și *Grecu Eftimie*, București

6828. Să se rezolve sistemul :

$$x^2 - y^2 = a$$
$$C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 + \ldots = b$$

N. Păun, profesor R. Vîlcea

6829. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 10°$, avem

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin(6x + 60°) \cos(6x - 30°) \leqslant 1;$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \sin(9x + 45°) \cos(9x - 45°) \leqslant 1;$$

$$-1 \leqslant \sin(9x - 45°) \cos(9x + 45°) \leqslant 0$$

C. Ionescu-Țiu

6830. Se dă un con de rotație avînd raza cercului de bază r și înălțimea h. Șase sfere egale cu centrele într-un plan paralel cu baza conului sînt tangente între ele, tangente exterior conului și tangente interior sferei circumscrise conului.

Să se calculeze în funcție de r și h, raza acestor sfere și distanța de la vîrful conului la planul centrelor lor.

Pentru simplificarea scrierii formulelor se poate introduce raza R a sferei circumscrise conului și generatoarea g a conului.

Adrian Gheorghiu

6831. Să se arate că dacă $0 < x < 180°$ avem :

$$\cos x < \cos\frac{x}{3} \cos\frac{2x}{3} \; ; \cos^2\frac{2x}{3} > \cos x \cos\frac{x}{3} \; ; \sin^2\frac{2x}{3} > \sin x \sin\frac{x}{3}$$

P. Dumitreasa, profesor Cluj

6832. Se dă o piramidă regulată $SABCD$ cu baza pătrată, înălțimea ei fiind h, iar latura bazei $2l$. Printr-un punct A' al muchiei SA se duce un plan perpendicular pe această muchie și fie B', C', D', respectiv intersecțiile lui cu muchiile SB, SC, SD. Se cere :

a) Să se exprime în funcție de segmentul $SA' = x$ aria patrulaterului $A'B'C'D'$.

b) Să se determine x astfel ca volumul piramidei $OA'B'C'D'$, unde O este centrul bazei $ABCD$, să fie egal cu cel al piramidei $SA'B'C'D'$.

a) Să se calculeze, în acest caz, volumul piramidei $SA'B'C'D'$.

Adrian Gheorghiu, București

6833*. Să se rezolve ecuația :

$$\sin 15x + 3\sin 11x + 5\sin 7x + 7\sin 3x = \\ = 2\sin 13x + 4\sin 9x + 6\sin 5x + 8\sin x$$

și să se verifice soluțiile obținute.

6834. Notăm cu a, b, c lungimile muchiilor unui paralelipiped oblic și cu d_1, d_2, ... d_6 diagonalele fețelor.

a) Să se stabilească egalitatea :

$$4(a^2 + b^2 + c^2) = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_6^2$$

b) Suma patratelor distanțelor de la centrul feței care are diagonalele d_1, d_2, la toate vîrfurile paralelipipedului este egală cu suma $d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2$.

c) Volumul paralelipipedului este egal cu :

$$a.b.c.\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

unde α, β, γ sînt unghiurile pe care le fac muchiile între ele, luate două cîte două.

Corneliu Georgescu, Craiova

6835. Să se demonstreze că între elementele unui triunghi ABC există relația :

$$\frac{a \operatorname{tg}\frac{A}{2} + b \operatorname{tg}\frac{B}{2} + c \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}} = 4R$$

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

V. Bobancu, București

---

* Problema 6834* înlocuiește problema 6767 care este identică cu problema 6741.

6836. Fie cercul cu centrul $\Omega\,(o,\ b)$ care taie axa absciselor în punctele $A(a,\ 0)$ şi $A'\ (-a,\ 0)$, precum şi familia de elipse ce au ca axă mare coarda AA'.

a) Să se determine acea elipsă din familie, pentru care tangenta dusă în punctul unde prima bisectoare taie elipsa este perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul A. b) Să se găsească locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de o dreaptă variabilă ce trece prin centrul cercului pe elipsa găsită la punctul a).

Grigore Bănescu, profesor Cîmpina

6837. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\sqrt[2n]{2n\,\pi} > \frac{e}{1+\ln n}$$

unde $n \geqslant 2$, întreg.

Gh. Oprea, absolvent Filiaşi

6838. Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi oarecare ABC luăm punctele N, respectiv M, astfel încît să existe relaţia : $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = k$. Să se demonstreze că punctul O de intersecţie a dreptelor BM şi CN se află pe paralela EF la BC, care împarte laturile AB şi AC în raportul k. (În legătură cu problema 6026).

Şerb Ion, elev Lugoj

6839. Să se stabilească domeniul maxim pe care pot fi definite funcţiile :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{ln\,(x^2+2x-14)}{x^2-16}} \text{ şi } f_2(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2+2x-14)}$$

Ioan M. Popescu, Bucureşti

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII*

E : **2293.** O brigadă de tractorişti ară un teren în 3 zile astfel : în prima zi ară 2/5 din tot terenul, a doua zi ară 5/7 din cît a arat în prima zi şi încă 10 ha, iar în a treia zi 9/11 din cît a arat a doua zi şi încă 10 ha. Să se afle aria terenului arat.

Alexandru Filipoiu,, Buzău

E : 2294. Combinatul chimic de la Craiova va produce anual o cantitate de azotat de amoniu de 3 ori mai mare decît cea de poliacetat de vinil, iar producţia de lacuri va reprezenta 1/15 din cea de azotat de

* V (E : 2293–2296) ; VI (E : 2297–2299) ; VII (E :2300–2303), VIII (E : 2304–2306). Soluţiile se primesc pînă la 30 iulie 1965

amoniu. Să e determine producţia anuală pe fiecare sortiment ştiind că producţia de azotat de amoniu şi de poliacetat de vinil luată la un loc este de 400 000 tone.

Gh. Căpitan, profesor Anina

E : 2295. O brigadă a produs în luna mai de 26/25, iar în luna iunie de 28/25 mai multe piese decît în aprilie. Ştiind că în mai s-au produs 8086 piese şi că o piesă costă în medie 20,10 lei, să se afle încasările obţinute din vînzarea pieselor produse în cele trei luni.

Octavian Ursulescu, elev Bucureşti

E : 2296. Să se calculeze puterea în kilowaţi a hidrocentralei de la Bicaz, ştiind că hidrocentrala care se va instala pe Argeş va avea cu 10 000 kilowaţi mai mult decît cea de la Bicaz şi că raportul puterilor celor două centrale este 21/22.

Ioan Bucur, profesor Sibiu

E : 2297. Care este cel mai mic număr de 8 cifre care este compus din cifre diferite şi se poate divide cu 36?

Olimpiada matematică R.D.G., 1964

E : 2298. Un număr $N = 30x0y03$ se divide prin 13, unde x şi y sînt cifre. Care sînt toate aceste numere N?

Olimpiada matematică R.D.G., 1964

E : 2299. Să se calculeze expresia :

$$\frac{\sqrt{0{,}75 + 2{,}(3) + 2{,}1\,(3) : 0{,}12 - 1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{7}{18}}}{\sqrt{\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^3}{3\cdot 2^3\cdot 5^2\cdot 1{,}(6)}\cdot\frac{5}{9} : \frac{2}{3}\cdot\frac{2\frac{1}{2}-1}{3\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{16}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{36}}$$

Ştefan Parlapan, Galaţi

E : 2300. Se dă un trapez dreptunghic $ABCD$ în care înălţimea AD este egală cu suma bazelor $AB + CD$. Mediatoarea laturii BC întîlneşte latura AD în E. Să se arate că triunghiul BEC este dreptunghic — isoscel.

Demeny Zoltan, Aiud

E : 2301. Patru detaşamente de pionieri s-au angajat să planteze de-alungul unui drum pomi fructiferi. Detaşamentele aveau următorul număr de pionieri : 23, 24, 28 şi 25.

În prima zi au plantat 2/5 din lungimea drumului, în a doua zi 2/3 din rest şi a treia zi restul drumului de 800 metri. Pomii au fost plantaţi pe ambele părţi ale drumului. Să se calculeze cîţi pomi a plantat fiecare

detaşament, ştiind că pomii au fost plantaţi la distanţa de 4 metri, iar numărul pomilor plantaţi este direct proporţional cu numărul pionierilor fiecărui detaşament.

Corban C. Aurelian

E : 2302. La o şcoală de 8 ani, 16% din numărul elevilor fruntaşi la învăţătură au mers în diferite tabere. Din aceştia 3/4 au mers la munte, iar restul la mare. Ştiind că elevii fruntaşi la învăţătură reprezintă 3/8 din totalul elevilor şcolii şi că restul elevilor sînt cu 100 mai mulţi decît numărul celor fruntaşi la învăţătură, să se afle cîţi elevi au mers în tabere la munte şi cîţi la mare.

Nelu I. Dobre, Merei, Buzău

E : 2303. Să se arate că dacă a şi b sînt numere reale pozitive, atunci $4a^2 - 7ab + 5b^2 > 0$.

E : 2304. Să se construiască un patrulater cînd se dau două laturi opuse, cele două diagonale şi segmentul de dreaptă care uneşte mijloacele laturilor necunoscute.

D. Mîrzan, profesor Vîlcea

E : 2305. Dacă $a + b + c + d = 0$, atunci şi $a^2 - bc - bd - cd = b^2 - ac - ad - cd = c^2 - ab - ad - bd = d^2 - ab - ac - bc$

Gorea Aristide, Ploieşti

E : 2306. Să se arate că dacă $x + y + z = 0$, avem :

$$xy(x + y) = yz(y + z) = zx(z + x),$$

$$x^2 + y^2 + xy = y^2 + z^2 + yz = z^2 + x^2 + zx,$$

$$\frac{x + y}{xy} - \frac{xy}{x + y} = \frac{y + z}{yz} - \frac{yz}{y + z} = \frac{z + x}{zx} - \frac{zx}{z + x}$$

C. Ionescu-Ţiu

CĂRŢI NOI

1. *Gh. D. Simionescu : Trigonometrie sferică.* Biblioteca Societăţii de ştiinţe matematice din R. P. R. nr. 66, Editura tehnică, Bucureşti, 1965.

Lucrarea reprezintă o expunere completă a trigonometriei sferice uzuale, avînd particularitatea că autorul face mai întîi un studiu geometric al unghiurilor triedre apoi stabileşte formulele fundamentale valabile în triedre, pe care le transcrie pentru triunghiurile sferice corespunzătoare.

Lucrarea conţine, de asemenea, aplicaţiile trigonometriei sferice în astronomie şi geodezie. Numeroase exerciţii, complet rezolvate sau numai cu răspunsuri, completează cartea.

Cuprinsul cărţii : I. Unghiuri triedre. II. Triunghiuri sferice. Relaţii între elementele unui triunghi sferic. III. Exprimarea unghiurilor în funcţie de laturi şi a laturilor în funcţie de unghiuri. Excesul sferic. Formulele lui Delambre şi Neper. IV. Aria triunghiului sferic. Diferite expresii ale excesului sferic. V. Raza cercului circumscris şi cercului înscris. Exerciţii. VI. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. VII. Rezolvarea triunghiurilor oarecare. VIII. Aplicaţii

practice ale trigonometriei sferice. IX. Aplicații ale trigonometriei sferice în astronomie. X. Aplicații ale trigonometriei sferice în geodezie. Anexă. Exerciții recapitulative.

2. *Agneta Vescan : Sumabilitatea seriilor.* Biblioteca Societății de științe matematice din R. P. R. nr. 67. Editura tehnică, București, 1965.

Lucrarea completează literatura matematică de analiză din limba română cu cele mai importante capitole din teoria seriilor divergente.

Sînt prezentate în lucrare principalele metode de sumare, prin medii, prin factori și prin transformări liniare. Expunerea metodelor este logic legată și gradată din punct de vedere al generalității.

Este utilă specialiștilor cît și acelora care doresc să se inițieze în studiul seriilor divergente.

De asemenea poate fi consultată cu succes și de elevii din ultimele clase ale școlilor medii, studenții din primii ani de la facultățile de matematică, fizică, institute tehnice, precum și de tehnicieni.

Cuprinsul cărții : I. Însumarea seriilor prin medii. II. Principiull factorilor de convergență. III. Însumarea seriilor prin transformări liniare. IV. Studierea diferitelor metode de însumare pe baza transformărilor liniare.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite pînă la 1 noiembrie 1964.

SUCEAVA. Șc. 8 ani cl. VII. Vizitiu C. (E : 2136, 38, 55, 58, 59, 69, 82), Cl. VIII. Olaru Maria (E : 2185, 90—98, 201—03, 06), Pelienci Mariana (E : 2136, 38, 39, 48, 55, 58, 63, 69, 82, 85, 90—94, 96, 201, 02, 06), Zavera Ionel (6398, 424, 60, 61, E : 2184, 91, 209). Cl. IX. Cozan Sergiu (6370, 89 ; E : 2154, 61, 62, 67, 68, 71, 79, 84, 87, 91).

SUSENII DE SUS. Șc. 8 ani cl. VIII. Popescu Alexandra (E : 2136, 38, 46, 47, 54, 59, 61).

TEACA (Mureș). Ș. m. cl. X. Kucsvan Olga (6418, 22, 59, 61, 82, 510, 22, 26, 27).

TECUCI. Ș. m. cl. VIII. Ciucă Gheorghe (E : 2143, 54, 55, 78, 80, 81, 83 ; 6420), Dumitru Adrian (E : 2164, 71, 79, 83, 91, 92, 94—96).

TELEGA. Cl. VII. Palada C. Valerică (E : 2184, 85, 91—96, 202).

TÎRGU JIU. Ș. m. cl. VII. Udrică Mioara (E : 2185, 91, 94, 210, 15, 16, 18). Cl. VIII. Dănoiu Pepile (E : 2169, 79, 82, 84, 85, 91, 92, 99), Droica A. Dan (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 91, 93, 95, 202, 06), Udrică Viorel (6358, 72, 75, 89, 69, 424, 69, 61 ; E : 2183), Cocheci Naria (E : 2154, 60, 67, 84, 209 ; 6367, 459, 61, 510, 19). Cl. IX. Abrămescu Emilia (E : 2184, 91, 93, 95, 96, 201, 02), Buzuru Valeriuca (E : 2144, 57, 59, 61, 82—84, 209, 6526), Crîng Nicolae (E : 2183, 209 ; 6444, 57, 59, 61), Ciocăzanu (E : 2154, 60, 61, 67, 209 ; 6367, 459, 510, 19), Cercetezeanu Mihaela (E : 2179, 80, 83, 84, 86, 88, 91 ; 6420, 24, 82), Ghițulescu Adriana (E : 2150, 54, 55, 60, 81, 83 ; 6356, 60, 67, 70, 72, 89, 93, 459, 61, 510), Isac Constantin (E : 2154, 60, 61, 63, 83, 84, 91 ; 6459, 61, 526), Mălăiuș Ilie (6356, 510, 26 ; E : 2154, 55, 60, 67, 71, 81, 84, 91, 200, 02), Popescu Ecaterina (E : 2154, 83, 84, 89, 91, 209 ; 6459, 61, 526), Pîrvulescu Sevastița (E : 2154, 55, 60, 67, 81, 86, 91, 209 ; 6356,67, 70, 72, 93, 459), Muja Victor (E : 2156, 59, 67, 69, 77, 83, 97, 99, 209 ; 6370, 522), Nițoiu Gh. (E : 2144, 59, 61, 209 ; 6526), Onescu Gh. Domnica (E : 2170, 73, 79, 83, 84, 91, 96, 6459, 61, 526), Stănculescu Mihai (E : 2137, 38, 45, 54, 60, 67, 83, 85, 91—93, 96, 97 ; 6367, 70, 75, 459, 61). Cl. X. Berculescu Dan (6451, 60, 61, 74, 75, 78, 83, 510, 12, 16, 19, 23), Cucanu Gh. (6421. 57, 59—61, 82, 510, 15, 19, 22), Duncea Florin (6367, 70, 72, 74, 75, 93, 459, 510, 22). Cl. XI. *Birsan Nicolae* (6416, 18, 20, 24, 27—29, 41, 56—63, 66, 67*t* 69, 80, 82, 84, 87, 92, 93, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—28, 31, 32, 36, 38, 44). Dalela Gh. (6410, 24, 55, 57, 59, 61, 62, 92, 510, 15, 22, 26), Pîrcălăbescu Viorel (6420, 55, 59, 61, 92, 510, 22, 23), Oprea Constantin (6420, 24, 55, 59, 61, 63, 66, 69, 92, 510, 22)

TÎRGU LĂPUȘ. Cl. XI. Bozga Liviu (E : 2154, 60, 61, 63 67, 70, 72, 77), Nechita Ileana (2154, 55, 60, 67, 83 ; 6375, 82, 89, 93, 98). Cl. X. Badea Nicolae (6457—62, 82, 505, 10, 19).

TÎRGU MUREȘ. Ș. m. cl. VIII. Vameș Vasile (E : 2185, 90, 94, 95, 200, 02, 06 ; 6460). Cl. IX. Palade Elena (6443, 44, 59, 61, 503, 07, 10, 16, 19, 26, 27, 44). Cl. X. Doboș Alexandru (6416, 21, 21, 59, 516, 19, 26, 27, 44), Oprișor Vasile (E : 2175. 81, 83, 209 ; 6366, 73, 74, 428, 57—63, 510),

TÎRGU NEAMȚ. Cl. VII. Vasiliu Doina (E : 2136, 38, 47, 69, 81, 91, 92, 93, 94, 95), Cornilă Cireșica (E : 2169, 85, 91—95), Luiza Marcela (E : 2169, 75, 85, 92—95), Muzulescu Gabriela (E : 2169, 70, 85, 90 92—95).

TIMIȘOARA. Ș. m. 1 cl. VIII. Teleagă Maria (E : 2169, 73, 80, 85, 91—93, 95, 201, 02, 06).

Ș. m. 2 cl. VII. Biroașiu Carmen (E : 2157, 59, 64, 69, 71, 85, 92—94,(, Demeter Hilldegard (E : 2158, 59, 69, 71, 79, 85), 92, 94), Dan Opriș (E : 2157—59, 69, 71, 82, 91—94), Mirea Mihaela (E : 2164, 69, 73, 79, 82, 85, 90, 92, 94), Hanna Margereta (E : 2157, 59, 63, 71, 79, 85, 91, 92, 94). Cl. X. Rusu Radu (6257, 58, 61, 62, 67, 71, 72, 80, 82, 92, 97, 301). Cl. XI. Anatol Adriana (6424, 61, 66, 98, 604, 10, 12, 15, 19, 23, 26), Baineonț Maria (6429, 66, 98,507, 10, 15, 16, 19, 22, 23), Bilvănescu Rucsandra (6422, 82, 92, 98, 504, 10, 12' 15, 16, 19, 22, 26), Deheleanu Dan (6456, 57, 59, 61—63, 67, 80, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 23, 26, 46), Doboșan Elena (6424, 66, 507, 10, 15, 19, 23, 25—27), Gyula Hortensia (6461, 66, 98, 507, 10, 12, 15, 16, 19, 22), Neagu Viorica (6422, 29, 61, 66, 98, 507, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25), Negrea Gabriela (6422, 29, 61, 66, 98, 507, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25, 27), Petri Norbert (6356—59, 67—73, 89, 93, 98), Rusu Radu (6356, 57, 59, 60, 66, 67, 70—73, 75, 89, 93, 400, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 28, 31, 33), Sehr Richard (6424, 58, 59, 61, 63, 82, 84, 92, 512, 15, 16, 19, 22), Strbu Victor (6422, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 17, 19, 22, 23, 26), Stern Miriam (6424, 507, 12, 19, 23, 26, 36).

Șc. 8 ani nr. 8 cl. VII. Halalai Lucreția (E : 2185, 91, 92, 95, 201, 02, 06).

Șc. 8 ani nr. 10. Lația Olimpia (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 92—94, 98, 201, 06), Mureșan Ivan (E : 2171, 85, 92, 94, 95, 202).

Ș. m. cl. X. Tosici Dorina (6467, 75, 79, 82, 92, 525—27, 29, 31, 36).

Ș. m. cl. XI. Scurtu Ilie (6457, 59—63, 66, 504, 07, 10, 12, 15).

Ș. m. 8 cl. XI. Roman Olga (6445, 46, 60, 61, 67, 510, 12, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 25).

Ș. m. 10 cl. IX. Mircioiu Nicoleta (E : 2183, 87, 209 ; 6420, 24, 25, 59, 61, 593, 10, 26, 27), Topan Călina (E : 2183, 87, 209 ; 6420, 24, 25, 59, 61, 503, 10, 26, 27). Cl. X. Fischer Odette (6420, 59, 61, 507, 10, 22, 24, 34, 36, 44), Saprofșoreanu Alina (6459, 61, 507, 10, 22, 25, 26, 34, 44), Iacob Cornelia (6420, 26, 36, 61, 507, 10, 22, 25, 27, 44), Milovan Liliana (6420, 57, 59, 61, 80, 510, 26, 34, 36, 44), Militaru Constantin (6420, 33, 59, 61, 510, 26, 36), Netedu Adriana (6420, 59, 61, 510, 25, 26, 32, 34, 36, 44).

TÎRGOVIȘTE. Ș. m. cl. IX. Huiu Dan (E : 2154, 55, 61—63, 67, 68), *Vartan Florin* (E : 2129, 31, 43, 49, 54, 55, 83, 25 59, 60, 75, 308, 14, 16, 25, 29, 30, 37, 38, 45, 56—60, 66, 67, 70, 72—74, 76, 80, 82, 88—90, 93, 98, 99 ; 6419, 24, 27, 31). Cl. X. *Enache Gheorghe* (6418—21, 24, 25, 31, 34, 44—46, 54, 57—62, 70, 75, 88, 89, 507, 10, 15—19, 22, 25—27), *Bratu Constantin* (6403, 06, 09, 10, 13—16, 18, 19, 28, 31, 36, 45, 48, 54—59, 61—64, 76, 80, 82, 87, 92, 98, 504, 05, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 26), Ștefănescu B. Călin (6406, 20, 24, 29, 44, 57, 60, 61, 510, 15, 16, 22). Cl. XI. Atanasiu Adrian (6357—59, 61, 74, 76—79, 90, 95, 97, 411, 18, 20, 22, 27, 29, 31, 36, 44, 45, 46, 56, 57, 59—61, 63, 79, 80, 82, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 46), *Niculescu Constantin* (6404—06, 09—13, 19—22, 24, 27, 32, 36, 39, 40, 42, 43, 45, 48, 52, 59, 61, 63, 67, 69, 71, 76, 84, 88, 97, 504, 05, 10, 12, 21, 24, 29).

TURNU MĂGURELE. Ș. m. cl. XI. Botea Titu (6446, 49, 56, 57, 59, 61, 63, 67, 82, 84, 92, 504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 39, 45, 46).

TRUSEȘTI. Ș. m. cl. X. Aionesei Ioan (6356, 58, 60, 67, 73, 75, 88, 89, 414, 15, 21, 24, 31), Carpiuc Dumitru ((6356—58, 60, 70, 73, 88, 89, 93, 421, 24, 31, 59), Gavril Ștefan (6356, 58—60, 67, 70, 73, 88, 89, 93, 421, 24, 59), Șchiopu Constantin (6421, 24, 59—61, 76, 87, 505, 07, 10, 16, 22), Simion Constantin (6356, 58—60, 67, 70, 72, 73, 88, 89, 424 59). cl. XI. *Achiței Ioan* (6405, 09, 11, 14, 16, 18, 20—22, 24, 28, 36, 41, 48, 49, 56—63, 56, 67, 69, 71, 80, 82, 84, 87—89, 92, 504, 05, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 34, 36), *Arcip Petre* (6409, 20, 25, 31, 36, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 55—64, 66, 67, 69—71, 74, 79, 80, 82, 84, 87, 88, 92, 93, 97, 504, 05, 07, 10, 12, 17, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 38, 39, 45, 46), *Butnaru Dumitru* (6414, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 45, 48, 58—64, 66, 67, 69, 80, 82, 84, 87, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 34, 38, 39, 57), Burciu Alexandru (6414, 16, 18, 20, 21*t* 24, 28, 41, 45, 58—63, 66, 67, 69, 84, 87, 88, 92, 504, 10, 12, 19, 22, 23, 26, 34, 36, 39), *Cosmanciuc Dumitru* (6403, 05, 06, 09, 11, 16, 18, 20, 21, 22, 25, 31, 34, 36, 41, 43—46, 48, 49, 55—64, 66, 67, 69, 71, 74——76, 80, 82, 84, 87, 88, 89, 92, 93, 97, 503——05, 07, 10, 12, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 38, 39, 44—46), Cornschi Ioan (6314, 38, 58—61, 66—68, 70—75, 86, 89, 98), *Mirza Mihai* (6403, 05, 09, 11, 14, 16, 20—22, 24, 25, 28, 31, 36, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 56—63, 66, 69, 71, 74, 80, 82, 84, 87, 88, 92, 97, 97, 503—05, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 36, 38, 39, 45, 46), *Noroc Constantin* (6356, 58, 62, 65, 67,70, 72, 74, 75, 77, 81, 86, 88, 93, 400, 03,05,

09, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 34, 36, 41, 45, 48, 49, 55—64, 66, 67, 69, 71, 80, 82, 84, 87, 88, 89, 92, 93, 96, 503—05, 07, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 38, 39, 44—46), *Turculeț Demostene* (6403—06, 09—11, 13—16, 18—22, 24, 25, 28, 31, 34, 36, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 54—64, 66, 67, 69, 71, 74—76, 79, 80, 82, 84, 87—89, 92, 93, 97, 98, 503—05, 07 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 25—28, 31, 34, 36, 38—40, 44—46), Vatmanu Dumitru (6416, 81, 20, 21, 24, 28, 41, 59—61, 63, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 34, 36), Vieru Mihai (6414, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 41, 45, 57, 64, 66, 67, 68, 80, 82, 84, 87, 88, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26, 36, 38, 39, 45).

TURDA. Cl. X. Bogdan Mircea (6420, 24, 57—62, 510, 15, 22, 23, 26), Ionat Ana (6424, 31, 57—59, 61, 510, 12, 19, 22, 23, 26), Lupescu Maria Ana (6457—62, 505, 10, 12, 22, 23, 26), Riessu Epaminonda (6457—61, 88, 510, 16, 19, 22, 23, 25, 27). Cl. XI. Olariu Adriana (6409, 11, 58, 59, 61—63, 504).

TURNU SEVERIN. Ş. m. 1 cl. VI. Tontoiu Dorin (E : 2169—71, 73, 79, 82, 91, 93, 95). Cl. IX. Popescu A. Constantin (6418, 20, 24, 43, 44, 54, 57—62, 76, 82, 89). Cl. X. Pană Ilie (6445, 57, 59—61, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 27), Vişan Ion (6444, 57, 59—61, 503, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 24, 25, 27, 40). Cl. XI. *Popescu Eleodor* (6402—22, 24—31, 33, 34, 36, 41—50, 54—69, 71—75, 77, 79, 80, 82—89, 92, 93, 96—99, 504, 05, 07, 10—17, 19—24, 26, 28, 30, 34, 36—39, 43—46, 54—58, 61, 63, 66, 67, 72—74, 76—79), Vulpescu Dan (6420, 57, 59, 61, 62, 82, 510, 15, 16, 22, 26, 39, 45).

Şc. 8 ani nr. 1 cl. VIII. Cruceru Pompiliu (E : 2169—71, 73, 79, 82, 84, 85, 91—93, 95), Bădescu-Iulian (E : 2169, 71, 79, 82, 92, 93, 95, 202), Georgescu Radu (E : 2169—71, 73, 79, 82, 85, 90—96), Stocker Elena (E : 2169—73, 76, 79, 82, 83).

Şc. 8 ani nr. 2 . Popescu Angela E : 2156, 58, 61, 64, 65, 68).

VĂLENII DE MUNTE (Ploieşti). Cl. VIII. Voiculescu Emil (E : 2184—87, 90—96, 201—03). Cl. XI. Alexe A. Constantin (6403, 05, 24, 41, 44, 45, 57, 59, 60—63, 97, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26).

VALEA LUI MIHAI. Cl. X. Vera Ioan E. (6389, 420, 31, 44, 45, 54, 58—62, 510, 15, 19, 22, 23, 26, 27, 36).

VINDORENI. Cl. VII. Sasu Constanţa (E : 2185, 90—94, 97, 99, 200, 02, 06).

VLAHI. *Poenaru Paraschiva* (6419, 20, 24, 34, 36, 43, 57—63, 510, 15, 19, 22, 23, 26—28, 32, 39 : E : 2169—209).

URZICENI. Ş. m. cl. IX. Georgescu Mihaela (6370, 89, 424, 59, 61 ; E : 2154, 60, 64, 74, 83), Barbu I. Aurelia (cl. XI (6409, 16, 57, 59, 61, 62, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22).

USUREI. Şc. elem. cl. VIII. Mecherel Viorica (E : 2153—55, 58—63).

EVIDENŢIAŢI

Pînă la **15** *decembrie* **1964** *s-au mai evidenţiat următorii rezolvitori de probleme din G.M. — B :*

1. **Chiţescu Ion** (cl. XI ş. m. 10, Bucureşti), 2. **Popescu Dumitru** (cl. X ş. m. 1 Oradea), 3. **Ioniţă Georgeta** (cl. VIII ş. m. 39 Bucureşti), 4. **Răduinea Nicolae** (cl. X ş. m. 3 Constanţa), 5. **Lungulescu Bogdan** (cl. IX ş. m. 1 Piteşti), 6. **Frangu Octavian** (cl. XI ş. m. 2 Brăila), 7. **Biscă Octavian** (cl. XI ş. m. 1 Craiova), 8. **Pop Gheorghe** (cl. XI ş. m. 1 Turda), 9. **Rusu Alexandru** (absolvent Bistriţa), 10. **Memetea Ovidiu** (cl. X ş. m. 1 Oradea), 11. **Popa I. Eugen** (cl. IX ş. m. 3 Iaşi), 12. **Brinda Rodica** (cl. XI ş. m. Lugoj), 13. **Steriu Ştefan** (cl. XI ş. m. 5 Bucureşti), 14. **Kivu Ileana** (cl. XI ş. m. 12 Bucureşti), 15. **Filipoiu Alexandru** (cl. X ş. m. 1 Buzău), 16. **Crişan Victor** (student Bucureşti), 17. **Andrei Viorel** (cl. X ş. m. 1 Galaţi), 18. **Cărbunaru Constantin** (student Bucureşti), 19. **Birlog I. Cornelia** (cl. XI ş. m. Pucioasa), 20. **Voinea I. Gheorghe** (cl. XI ş. m. Plopeni-Ploieşti), 21. **Popoviei Cornel** (cl. X ş. m. 1 Timişoara), 22. **Aron C. Constantin** (cl. XI ş. m. Pucioasa), 23. **Stăneseu Constantin** (cl. X ş. m. 2Craiova), 24. **Văleanu Vladimir** (cl. VII ş. m. 28 Bucureşti), 25. **Sachelarie Dan** (cl. IX ş. m. 4 Ploieşti), 26. **Pătra Cristian** (cl. IX ş. m. 1 Craiova), 27. **Cojocaru Mariana** (cl. X ş. m. 2 Bucureşti), 28. **Stan Emil** (cl. XI ş. m. 1 Ploieşti), 29. **Sandu Darius** (cl. XI ş. m. 1 Bucureşti), 30. **Masean Marius** (cl. XI liceul militar Cîmpulung Moldovenesc), 31. **Năvligu Ioan** (cl. XI Oţelul Roşu Caransebeş), 32. **Alexandru Dimitrie** (cl. XI ş. m. 2 Iaşi), 33. **Filimon Nicolae** (cl. XI liceul militar Breaza), 34. **Jenea Aurel** (cl. XI ş. m. 1 Caransebeş), 35. **Alexandru Doru** (cl. IX ş. m. 1 Cîmpina), 36. **Lăzăreseu Vasile** (cl. XI ş. m. 2 Brăila), 37. **Pruiu Petre** (cl. XI liceul militar Breaza), 38. **Gherea Petre** (cl. XI ş. m. 1 Lugoj), 39. **Andrei Titus** (cl. XI ş. m. Pătîrlagele), 40. **Miulescu Cecilia** (cl. XI

Pucioasa), 41. **Lașiță Ileana** (cl. XI ș. m. 2 Sibiu), 42. **Aionesei Nicu** (cl. X Trușești), 43. **Bucur Liliana** (cl. XI ș. m. 2 Sibiu), 44. **Vasilescu Constantin** (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 45. **Magda Radu** (cl. X ș. m. 2 Sibiu), 46. **Silaev Silvia** (cl. XI ș. m. 1 Ploiești), 47. **Reghină Vasile** (cl. X ș. m. 1 Ploiești) 48. **Vasilescu Maria** (cl. XI Pucioasa), 49. **Mureșan Roman** (cl. X ș. m. Tg. Lăpuș), 50. **Turcu Ilie** (cl. XI ș.m. 1 Craiova,) 51. **Silaschi Ivan** (cl. XI ș m. 1 Lugoj).

Pînă la 15 decembrie 1964 s-au mai primit soluții bune la probleme din G.M.—B după cum urmează :

ADJUD. Ș. m. cl. VI. Bocăneț Paula (E : 2184, 91, 92, 95, 97, 98, 201, 02, 06), Crețu Dumitru (E : 2182, 85, 90, 91, 93, 201, 06), Donciu Viorica (E : 2184, 91, 92, 95, 97, 98, 201, 02, 06), Oriță Petru (E : 2184, 90, 91, 93, 97, 201, 02, 06), Cl. VII Calalb Gheorghe (E : 2186, 91—93, 98, 99, 202, 10), Petroiu Eugen (E : 2184, 85, 91, 92, 95—97, 201, 02), Savin Liliana (E : 2183, 85, 91, 92, 95, 98, 201, 02, 06). Cl. VIII. Apostol Constantin (E : 271-73, 78, 82, 97, 99), Dragomir Luminița (E : 2170, 71, 82, 85, 92, 98, 99), Giovanni Georgeta (E : 2185, 92, 93, 96, 99, 202, 06), Popescu Elena (E : 2171, 82, 85, 93, 98, 99, 206).

AIUD. Ș. m. cl. XI. Molnar Iuliana (6445, 61, 63 ,66, 515, 16, 19, 23, 26, 42, 54, 61, 63), Szöcs Andrei (6445, 49, 54, 56, 59, 60, 61, 63, 66, 86, 88, 92, 504, 10).

ALBA IULIA. Ș. m. cl. IX. Oargă Gheorghe (6356—68, 67, 70, 73, 74, 89; E : 2154, 55, 60, 67).

ALBOTEȘTI (Bacău). Șc. 8 ani cl. VII. Badea Manuela (E : 2198, 200—03, 06—08).

AGNITA. Ș. m. cl. XI. Ștefănescu Dan (6459, 61, 63, 66, 84, 92, 504, 07, 10, 15, 19, 22, 36).

ARAD. Șc. 8 ani nr. 14 cl. VIII. Stoenescu Grigore (E : 2184, 85, 90, 92, 303, 15, 17, 18).

Ș. m. 1 cl. VIII. Munteanu Voicu (E : 2185, 86, 92, 9, 499, 203, 15). Cl. IX. Balla Ioan (6458—61, 510, 27, 34, 36).

S. m. 2 cl. VIII. Achim Otilia (E : 2185, 92, 94, 96, 98, 99, 203, 15), Biticu Mihaela (E : 2186 m 92, 94, 96, 98, 203, 05, 15), Boișcoiu Voicu (E : 2184, 85, 90—96, 201, 02), Decis Florin (E : 2710—73, 79, 82, 84, 85, 90—93, 95, 96), Dumitrescu Didina (E : 2185, 92, 96, 98, 99, 203, 15), Ionescu Silvia (E : 2185, 92, 94, 96, 98, 203, 15), Jivan Ioan (E : 2185, 86, 94, 96, 98, 203, 15), Nedelea Gabriela (E : 2193, 96, 98, 99, 202, 03, 09), Latiș Marius (E : 2184, 85, 90, 99, 202, 10, 17), Petrișor Ioan (E : 2185, 92, 94, 96, 98, 99k 203, 15), Stoica Florica (E : 2185, 92, 94, 96, 98, 203, 06, 15).

S. m. 3 cl. X. Popovici Mircea (6457—61, 507, 10, 16, 19, 25—27, 36, 61), Vereș Traian (6458, 61, 507, 10, 16, 19, 25, 26, 36, 5,457).

S. m. 5 cl. X. Budean Teodor (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 31, 34, 36).

AVRIG. S. m. cl. X. Ionescu Maria (6443—47, 57, 59—61, 75, 92), Zamfirescu Daniela (6459, 61, 510, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 54, 61, 63).

BACĂU. S. m. 1 cl. VIII. Olteanu Mierla (E : 2169, 71, 82, 84, 87, 91—96), Knoll Raul (E : 2184—86, 90—96). Cl. X. Ciochină Silviu (6444, 46, 57, 59, 61, 75, 82, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 23), Ghelberg Emil (6454, 57, 59—63, 507, 10, 16, 19, 22, 61, 63). Cl. XI. Eremia Ioan (6458—61, 503, 04, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 79), Hrișcu Dan (6409, 61, 504, 10, 12, 13, 15—19, 22, 23).

S. m. 2 cl. XI. Buruiană Marcel (6405, 09, 31, 41, 49, 54, 56—63, 75, 80, 86, 90, 92, 504, 10), Jäger Tiberiu (6457, 59, 61—63, 80, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 23), Simsensohn Artur (6444, 57, 59—63, 65, 66, 75—77, 80, 82, 91, 94).

BAIA MARE. Sc 8 ani cl. V. Bond Ioan (E : 2190, 91, 93, 95, 96, 98, 201).

Ș. m. 1 cl. IX. Sabou Ioan (6458—62, 510, 16, 22, 26). Cl. X. Oprea Elexandru (6457—59, 61, 63, 507, 10, 12, 15, 1,7 19, 22, 54, 61), Cl. XI. Barbos Doina (6459, 61, 63, 80, 92, 504, 10, 15, 22, 36, 61, 63), Botoș Clara (6443, 49, 56, 57, 80, 92, 512, 19, 54, 61, 63), Breban Petronela (6461, 80, 92, 504, 07, 10, 12, 16, 19, 38), Krausz Oscar (6445, 49, 59, 61, 63, 76, 80, 82, 504, 10, 15, 22), Marcovitz Vasile (6457, 59, 61—63, 504, 10 ,12, 15, 16, 19, 22), Mehler Erika (6420, 24, 28, 59, 61, 63, 82, 92, 504, 10, 15, 36), Nica Doina (6456, 59, 61, 67, 80, 82, 92, 504, 07, 10, 15, 16 ,19, 22), Onisei Octavian (6458, 59, 61, 66, 80, 88, 92, 504, 10, 38, 55), Orpea Dan (6449, 61, 67, 82, 92, 504, 07, 10 ,12, 15, 16, 19, 22, 36), Prie Octavian (6458, 59, 61, 64, 66, 80, 88, 92, 504, 10, 38, 55), Sîrbu Gheorghe (6461, 67, 82, 93, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 36), Ungureanu Mihai (6459, 66, 92, 504, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 36, 38).

S. m. 3 cl. IX. Apșan Dan (6446, 45, 55, 58, 60—62, 82, 98).

BALȘ (Oltenia). Sc. 8 ani cl. VIII .Cleciu Ion (E : 2185, 90, 91, 92, 96, 206, 15, 17—19), Crișan Dumitru (E : 2185, 90—92, 95, 96, 206, 10, 15, 17, 19).

BEIUȘ (Clșana). S. m. 1 cl. IX. Gavruță Pașcu (6445, 59—62, 89, 92, 98, 504, 10, 16, 19, 25—27 Cl. X. Gavril Teodor (6445, 57, 59—63, 75, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36), Giga Silvia (6451, 59, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27), Laza Miron (6443—46, 57—63, 65, 71, 76, 79, 90, 510, 12).

Ș. m. 2 cl. XI. Diaconu Adrian (6457, 59, 61—63, 67, 73, 76, 82, 92, 510, 12, 26, 39).

BISTRIȚA (Cluj). Absolvenți: Buta Grigore (6455, 58, 64, 66, 67, 73, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 26, 36, 38, 39, 44, 48, 54), *Rusu Alexandru* (6444—46, 49, 52—67, 70, 74—77, 80, 81, 87, 91, 92, 96, 504—27), Verveagă T. (6444, 46, 56, 63, 65, 68, 80, 87, 89, 504, 37, 54, 55, 57, 66, 71, 74, 76).

Și m. cl. X. Fucă Sergiu (644,6 55, 58—63, 510, 19, 22), Lupșa Nicolae (6454, 59—61, 63, 75, 80, 510, 16, 19), Mihăilaș K. (6445, 46, 61, 507, 10, 16, 18, 19, 22, 25—27, 36). Cl. XI. Buliga Vasile (6457, 59—61, 63, 66, 72, 80, 92, 510, 12, 15, 22, 46), Negrușa Ioan (6409, 24, 28, 58—61, 63, 92, 504, 10, 12, 15), Patca Teodor (6456, 59, 61, 82, 84, 92, 510, 12, 15, 22, 23, 54, 61), Titieni Remus (6444, 45, 48, 57—63, 67, 82, 92, 536).

BÎRCA (Oltenia). Ș. m. cl. VIII. Popa Ștefan (E: 2170, 84, 85, 91—93, 95, 96, 98, 200, 06, 11, 13, 16, 18). Cl. XI. Crînguș Florea (6444, 56, 57, 59, 60—62, 80, 92, 510, 15, 19, 22, 26, 45), Poenaru Nicolae (6446, 57, 59, 61, 62, 92, 510, 12, 15, 22, 23, 26, 39, 45, 58, 61).

BÎRLAD. Ș. m. 2 cl. VIII. Duda Doina (E: 2169, 85, 90, 91, 93—95, 98, 200, 01, 02, 04, 06). Cl. XI. Mereuță Magdalena (6444, 54, 56—63, 75).

Ș. m. 3 cl. VIII. Crăescu Tigeliu (E: 2185, 91—96, 201—03, 06, 07), Minciună Adrina (E: 2197—209).

Complexul școlar cl. X. Dumitriu Dănuț (6443—45, 59, 60, 61, 67, 76, 510, 22, 25, 31).

BOLINTINUL DIN VALE (București), Ș. m. cl. X. Tudor Mariana (6423, 24, 48, 80, 92, 504, 05, 10, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 36, 38).

BOTOȘANI. Șc. muzică cl. VIII. Tincu Laurențiu (E: 2185, 91, 92, 95, 201—04, 06—08).

Ș. m. 1 cl. X. Lazarovici Hary (6418, 20, 24, 27, 44, 58—61, 503, 10, 16, 26, 28).

BOZOVICI (Banat). Ș. m. cl. VII. Ciosa Ana (E: 2185, 91, 92, 94, 98, 206, 10, 15, 17), Ignea Anișoara (E: 2190, 95, 98, 202, 10, 15—18). Cl. IX. Cleșnescu Iancu (6457—59, 61—63, 92, 504, 10 ,15), Vălușescu Ilie (6454, 59—63, 504, 07, 10, 15, 16, 22, 27, 36, 37).

BRAD (Hunedoara). Șc. 8 ani cl. VIII. Cordonescu Gabriel (E: 2191, 92, 95, 201, 03, 06, 18).

Ș. m. cl. X. Drig Simion (6459—61, 510, 16, 19, 25—27, 36, 63, 67), Fornade Cornel (6457—61, 63, 82, 507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 44). Cl. XI. Ghilea Adrian (6459, 61, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 22, 23, 26).

BRĂILA. Șc. 8 ani nr. 4 cl. VIII. Cărbunaru Mihai (E: 2184, 85, 90—93, 95, 98, 99, 200, 02, 03, 06).

Ș. m. 2 cl. XI. Barash Maria (6456, 57, 59—61, 63, 66, 67, 69, 71, 76, 82, 84, 92), *Frangu Octavian* (6305, 09—11, 14, 19, 20, 22, 24, 41, 44—46, 49, 54—63, 66, 71, 74, 76, 80, 82, 84, 86—88, 92, 93, 503, 04, 07, 10,12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 44), Grossu George (6445, 54—63, 66, 67, 69, 71, 84, 88, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 17, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 36, 46, 61, 63), *Lăzărescu Vasile* (6444, 45, 54—60, 62, 66, 67, 71, 74, 76, 80, 82, 84, 88, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 38, 44, 46, 61, 63), Racicovski Nicoleta (6445, 46, 59—63, 67, 71, 88, 504, 07, 10, 12, 15, 06, 19, 22, 61, 63).

Ș. m. 3 cl. IX. Bucur Camelia (E: 2186, 212, 19; 6459, 61, 510, 25—27, 63).

BRĂNEȘTI (București). Ș. m. cl. XI. Dinescu Gabriela (6405—07, 09, 11, 13—15, 20, 24, 31, 41).

BRAȘOV. Șc. 8 ani nr. 3 cl. VIII. Slușaru Ileana (E: 2185, 91—95, 96, 98, 201, 06, 11, 13, 15—18).

Șc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Vătui Lucian (E: 2169—73, 76, 79, 82).

Șc. 8 ani nr. 12 cl. VI. Guțu Anca (E: 2184, 85, 87, 90—95).

Șc. 8 ani nr. 13 cl. VIII. Pîndaru Constantin (E: 2171, 85, 91, 93, 95, 99, 202, 06).

Ș. m. 4 cl. VI. Constantinescu Silvia (E: 2169, 70, 73, 93, 97, 98, 202, 06, 10, 17), Dițescu Dan (E: 2169—71, 82, 91—93, 95, 97—99, 206), Gal Patricia (E: 2169—71, 91, 93, 97, 99, 206), Galea Maria (E: 2169—71, 82, 91, 93, 97, 99, 206), Pavel Floric (E: 2169, 70, 82, 91, 93, 97, 99, 206), Popovici Elena (E: 2169—71, 82, 91, 93, 97, 99, 206). Cl. VII. Bașag Georgeta (E: 2169, 73, 85, 91, 92, 94, 201, 06), Olteanu Sonia (E: 2169, 73, 79, 82, 85, 90—93, 95, 201, 02, 06, 10, 15—17). Cl. X. Cotora Gheorghe (6444, 57, 59—63, 75, 82, 87, 554, 58, 59, 67).

BREAZA. Ș. m. Aurel Vlaicu cl. IX. Liceul militar cl. X. Voiculeț Leonida (6454, 57—62, 65, 76, 79, 510, 16, 22, 23—27, 61), Cl. XI. Camen Gheoghe (6458—61, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 19, 22), *Filimon Nicolae* (6405, 11, 14, 16, 20—22, 24, 28, 33, 36, 41, 43—64, 49, 56—63, 71, 80, 83, 88, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 39, 46), *Pruiu Petre* (6443, 45, 46, 48, 56, 57, 59, 61—63, 65—67, 71, 74—76, 79, 82, 84, 87, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 46), Răducanu Petre (6459, 61, 66, 82, 504, 10, 12, 15, 22, 36, 61, 63), Sandu Ion (6416, 20, 24, 28, 41, 43, 55—61, 63, 871, 80, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 39), Știucă Ioan (6456, 57, 59, 61, 63, 80, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 26, 36, 63), Toma Ioan (445, 46, 49, 56—63, 66, 67, 69, 82, 86, 87, 92, 93, 97, 504, 10, 12, 15, 16, 19,

22, 23, 26, 36, 61, 65, 67, 79), Tudorică Alex. (6446, 56, 59—61, 63, 66, 92, 504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 26, 36, 54, 61, 63).

BUCUREȘTI. Studenți: *Cărbunescu Constantin* (fac. matematică) (6403—07, 10—15, 18, 20, 22, 24, 28, 29, 37, 57—59, 61—63, 65, 66, 76, 77, 80, 82, 86, 87, 91, 92, 504—11, 14—16, 22, 23, 26). *Crișan V. Victor* (fac. matematică) (6416, 18, 19, 22, 24, 25, 27—29, 32, 3, 39, 42, 46, 51, 52, 67—72, 75—79, 82, 83, 87, 88, 91—94, 96—99), Călina Ion (IPB) (6410, 11, 13—15, 24, 31, 37, 38, 45, 56, 58, 61, 63, 66, 67, 70, 76, 82, 84, 87, 91, 92, 504, 05, 09—13, 22, 23), Iliescu Dumitru (IPB) (6445, 54, 56—63, 65, 67, 76, 92, 503—07, 10, 11, 1, 419, 20—24, 26, 39, 45). Absolvent. Florescu Dumitru (6456, 62, 63, 76, 79, 92, 510, 12, 15, 16, 19, 22 25).

Șc. 8 ani nr. 50 cl. VI. Ianuș Gheorghe (E: 2169, 71—73, 79, 82, 90—93, 95—97, 201, 02, 06).

Șc. 8 ani nr. 56 cl. VI. Voinescu Radu (E: 2191—93, 95, 202, 06, 15, 17).

Șc. 8 ani nr. 71 cl. VIII. Sergiescu Vlad (E: 2184, 85, 90—96, 209), Vasiliu Alexandru (E: 2169, 71—73, 76, 78, 79, 82), Vasiliu Radu (E: 2190—203, 06).

Șc. 8 ani nr. 108 cl. VI. Stoian Toma (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 91, 93, 98). Cl. VII. Bivolaru Carmen (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 92, 206, 15), Gruia Vladimir (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 87, 91, 92). Cl. VIII. Oprică Rodica (E: 2184, 87, 90, 93—97), Șerban Corina (E: 2182, 93, 96; 6469, 71, 73, 78, 79).

Șc. 8 ani nr. 146 cl. VII. Bădescu Smaranda (E: 2184, 98—202, 06, 07; 6503, 16, 22, 28). Cl. VIII. Atanasiu Traian (E: 2184, 85, 90—96).

Șc. 8 ani nr. 166 cl. VI. Cernescu Gabriela (E: 2184, 85, 90—95, 202).

Șc. 8 ani nr. 171 cl. VI. Bănulescu Cornel (E: 2171, 79, 82, 85, 94, 99, 202, 04).

Șc. 8 ani nr. 178 cl. VII. Dumitrescu Dan (E: 2169, 71, 79, 82, 90—92, 94, 95).

Școala medie nr. 1 N. Bălcescu, cl. IX. Brăileanu Ana (E: 2186, 87, 6443—45, 48, 55, 57, 58—62). Croitoru Stibina (6510, 25—27, 54, 61, 63, 99, 609, 15).

Ș. m. 2 cl. XI. Ionașcu Răzvan (6467, 76, 82, 92, 6504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 61, 63).

Ș. m. 3 cl. XI. Teodorescu Dumitru (6457—63, 66, 67, 82, 510, 15, 22).

Ș. m. 5 cl. VIII. *Manolache Nicolae* (E: 2184—97; 99—202, 04, 06, 09; 6444, 45, 58—62, 79, 82, 97, 98, 510, 17, 23, 25—27), Mănăiloiu Florence (E: 2169, 71, 73, 79, 80, 85, 206), Rușinoiu Carmen (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 92, 206). Cl. IX. Pleșoianu Ana Maria (E: 2186, 87, 209; 6418, 20, 24, 29, 59—61, 526, 27). Cl. XI. Kirmaier Eduard (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 57, 58, 61, 63), *Steriu Ștefan* (6443—50, 52, 54—64, 66, 67, 69—72, 74, 76, 80, 82, 84, 86—89, 92, 93, 96, 99, 501, 02).

Ș. m. 6 cl. VII. Weiner Irina (E: 2169, 71—73, 79, 82, 85, 91—96, 202, 08). Cl. XI. Ghinghină Octavian (6456, 57, 59, 61—63, 92, 504, 10, 15, 16, 19, 22 ,26, 61, 63).

Ș. m. cl. VII. Redlinger Doina (E: 2184, 85, 90—95, 202, 06). Cl. VIII. Bîrlădeanu Irina (E: 2169—71, 73, 79, 80, 82), Nichita Anca (E: 2202, 10, 11, 13, 15—19). Cl. IX. Redlinger Iliana (E: 2186, 87, 89, 209; 6457—761, 82, 503, 10, 19, 26). Cl. XI. Tică Radu (6444, 48, 54, 55, 57, 59—62, 66, 71, 75, 76, 82).

Ș. m. 8 cl. VIII. Cinteză Mircea (E: 218,, 86, 87, 91, 203, 04, 07—09, 11, 13, 19), Tănăsescu Sanda (E: 2184—312).

Ș. m. 10 cl. VI. Corici Ion (E: 2169—73, 76, 79, 82, 98, 200), Gafița Gabriel (E: 2170, 73, 85, 91—95, 206). Cl. XI. *Chițescu Ion* (6503, 06, 07, 11, 12, 14—17, 19—24, 31, 34—38, 42, 43, 46, 53—55, 57—59, 61, 63, 65—68, 70—72, 74, 79, 80, 82—84, 86, 87, 93, 95, 097, 98, 601, 02, 05, 07, 09, 10, 12, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, P).

Ș. m. 11 cl. IX. Pascaru Aurel (E :2174, 75, 83; 6419, 24, 29, 54, 57, 59, 61, 62). Cl. X. Cleja Sanda (6444, 59, 61, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27, 34, 44), Lutașu Marius (6444, 57, 59, 60, 61, 510, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 60, 61, 63), Vasiliu Șerban (6443—47, 57—61, 70, 71, 74, 76, 78, 82, 88). Cl. XI. Bunea Corneliu (6414, 19, 28, 29, 44, 45, 47, 58, 60—62, 67, 82, 92, 504, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 27, 36, 45), Cantiș Victor (6424, 28, 29, 41, 57, 59—61, 63, 67, 80, 82, 92), Georgescu Nicolae (6409, 19, 20, 24 ,28, 29, 59, 63, 504, 10, 16, 25, 26, 32, 36), Todiriciu Brînduța (6418, 19, 63, 65, 67, 77, 80, 82, 504, 15, 17, 22).

Ș. m. 12 cl. XI. *Kivu Ileana* (6444, 45, 48, 49, 56, 57, 59—63, 75, 80, 82, 84, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 25, 29, 39, 44, 47, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 66, 73, 79).

Ș. m. 13 cl. IX. Arapu Bogdan (E: 2171, 79, 83, 84, 87, 91; 6420, 24, 44, 57, 61). C. X. Udran Mihaela (6580, 83, 84, 86, 99, 601, 07, 09, 15, 18).

Ș. m. 17 cl. X. Botez Dan (6444, 45, 46, 56, 62, 64, 69, 70, 79, 89, 99, 510, 34), Schoffer Silviu (6406, 11, 13, 14, 16, 19, 24, 28, 44, 45, 56, 56—63, 67, 75, 80, 83, 84, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 36, 45), Suciu Paul (6404, 11, 16, 18—20, 24, 25, 27, 28, 57, 59, 60).

Ș. m. 22 cl. X. Necea Aurel (6443, 45, 46, 55, 57, 59, 60, 62, 63, 65).

Ș. m. 23 cl. X. Zaharia Dragoș (6507, 10, 12, 15, 1, 19, 22, 23, 25—27, 34, 61, 63).

Cl. XI. Rădulescu Valentin (6448, 49, 56—61, 66, 69 ,80, 84, 86, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 39, 54, 61, 63, 67), Rozorea George (6446, 59, 61, 63, 84, 92, 503, 07, 10, 12, 16, 19).

Ş. m. 26 cl. IX. Stoica Valentin (6443, 44, 57—61, 522, 23, 25, 26). Cl. X. Ciuceanu Teodor (6503, 04, 06, 07, 11, 14, 19—21, 24, 27, 36, 39, 41, 45).

Ş. m. 27. Cl. XI. Minea Daniela (6457, 59, 61, 62, 82, 504, 10, 12, 16, 19, 22, 26).

Ş. m. 28 cl. VII. Arsene Vladimir (E : 2169—71, 79, 82, 85, 91, 93), Capatos Raluca (E : 2185, 92—94, 98, 202, 10, 15, 17, 18), Ceuca Dan (Eτ : 2169—71, 73, 82, 85, 92, 93), Constantin Petre (E : 2184, 87, 90—95), Valter Dan (E : 2184, 91—94, 96, 215, 18), *Văleanu Vladmir* (E : 2184—202, 06—11, 13—19; 6467, 59—62, 510, 16, 19, 22, 26).

Ş. m. 32 cl. VI. Dumitrescu Anca (E : 2169—71, 73, 79, 82, 84, 90, 91). Cl. X. Atanasiu Irina (6459, 61, 63, 507, 10 ,16, 19, 22, 25—27), Mihai Gheorghe (6445, 46, 52, 58—61, 63, 67, 510, 16, 22, 24), Profeta Horia (6444, 58—61, 63, 75, 87, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27).

Ş. m. 36 cl. XI. Jula Maria (6444, 48, 57—61, 66, 67, 69, 70, 74, 82, 86, 92, 503, 04, 07, 12, 15, 16, 19, 25—27, 29, 35, 36, 38, 40, 49, 51, 54, 56, 60).

Ş. m. 39. cl. VIII. *Ioniţă Georgeta* (6405, 09, 11, 16, 22, 2,428, 29, 44—46, 54, 57, 59—64, 86, 503—05, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 43 ; E : 2169—76, 78—87, 90—202, 06, 08), Nicolae Cristian (E : 2153—55, 59—63, 68, 89), Pruncu Paula (E : 2185, 91—93, 95, 98, 202, 06), Sarca Violeta (E : 2185, 93—95, 98, 202, p3, 06, 10, 11, 15).

BUDA BLĂGEŞTI (Bacău). Sc. 8 ani. Ghinea Aurica (E : 2192—94, 96, 97, 203, 15).

BUFTEA (Bucureşti), Ş. m. cl. VIII. Costache Raliţa (E : 2083, 84, 97—100, 08—10, 18, 21, 22).

BUZĂU. Sc. 8 ani nr. 1 cl. VI. Andreescu Gabriel (E : 2185, 91—94, 96, 206, 10, 11, 15—17).

Ş. m. 1 cl. VII. Croitoru Viorica (E : 2185, 90, 92, 206, 10, 15—18), Grigorescu Adriana (E : 2185, 90—93, 98, 201, 17, 18). Cl. VIII. Barcan Olivia (E : 2191, 93, 94, 202, 11, 13, 16, 17), Văcanu Constanţa (E : 2193, 96, 206, 11, 13, 16—18). Cl. IX. Ifrim Paul (6459, 61, 62, 503, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 53, 62, 71). Cl. X. *Filipoiu Şt. Alexandru* (6411, 13, 19, 29, 34, 45, 48, 49, 55—63, 65—67, 71, 82, 84, 87, 92, 97, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27), Marinescu Marian (6424, 29, 44—46, 61, 71, 75, 80, 82, 89, 507, 25, 26), Penea Teodor (6421, 24, 44, 59, 61, 503, 10, 16, 19, 26, 27). Cl.XI. Andreescu Liviu (6424, 28, 59—61, 67, 84, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 28, 39), Murgescu Mihai (6459, 60—63, 65, 69, 79, 503, 04, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25—27, 36), Păltenea Cornel (6531, 34, 36, 39, 44, 45, 54, 55, 61, 74, 79).

Ş. m. 2 cl. X Iuseim Orhan (6443, 44, 57, 59—61, 92, 503, 04, 07, 10, 15, 22, 25—27, 36).

BUZIAŞ. Ş. m. cl. VIII. Adamescu Nicolae (E : 2185, 91—94, 96, 201, 06), Bordeianu Doina (E : 2185, 91, 93, 99, 206, 16—18), Ticleanu Dorina (E : 2169, 73, 82, 85, 91, 99, 206).

CĂLĂRAŞI. Ş. m. cl. IX. Farmache Constantin (6443, 44, 55, 57, 59—61, 507, 10, 22, 25), Mihăescu Tudor (6443, 57—61, 75, 510, 26, 54, 61), Miţa Gheorghe (6418—20, 24, 43, 44, 57—59, 61, 62, 82, 503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27), Sorici Ion (6459, 61, 82, 510, 22, 25—27, 53, 54, 63 ; E : 2209), Vasile Eugen (6418—20, 24, 29, 31, 43, 44, 57—61, 82, 503, 07, 10 ,19, 21, 26, 27). Cl. XI. Badea Petru (6456, 59, 61—63, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 26, 36, 39, 57).

CALIENI (Galaţi). Şc. 8 ani cl. VIII. Baloşin Maria (E : 2184, 85, 94, 96, 203, 11, 15, 17), Ţigănuş Vasilica (E : 2185, 90, 92—95, 97, 99, 206, 15, 19).

CARACAL. Şc. 8 ani cl. VIII. Chirimbu Aurel (E : 2185, 92, 94, 95, 202, 03, 06, 15, 17).

CARANSEBEŞ. Ş. m. 1 cl. IX. Ştefănescu Mircea (6455, 57, 59—61, 63, 84, 92, 504, 07, 11, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 39, 43, 61, 63). Cl. XI. Covăsală Paul (6449, 54, 56—58, 60, 63, 67, 74, 80, 84, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 26, 39, 54, 58, 61, 63, 71, 72), *Jenea Aurel* (6405, 34, 36, 40, 45—47, 49, 54—58, 61, 67, 69, 70, 71, 75, 80, 84, 88, 90, 96, 98, 99, 504, 05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 34, 39, 44, 56), Man Carol (6456—58, 60, 66, 67, 74, 80, 84, 93, 504, 10 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 39, 54—58, 61, 63).

Ş. m. 2 cl. X. Brebu Ion (6457, 59—63, 76, 79, 510, 16, 22, 25), Franţ Rodica (6457, 59—61, 63, 510, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63), Magheti Ioan (6457, 59—63, 65, 510, 19, 22, 25—27), Muschici Maria (6510, 16, 19, 25—27, 57, 59—61), Petrescu Magdalena (6444, 57, 59—63, 510, 16, 19, 22, 26).

CETATE-CALAFAT. Ş. m. cl. VIII. Movilă Vlad (E : 2185, 87, 91, 93—96, 202). Cl. IX. Bistriceanu Constantin (6445, 54, 55, 59, 61, 62, 82, 507, 12, 22, 25, 27). Chilom Constantin (6445, 54, 55, 59, 61, 62, 82, 86, 86, 507, 12, 22, 25, 27, 36, 34), Cioclov Domnica (6445, 57, 59, 61, 62, 82, 507, 12, 15, 19, 22, 25, 27, 36).

CIPĂU (Mureş). Absolvent Stan Ioan (6459, 61, 63, 66, 504—06, 10, 11, 14, 16, 18—22, 24, 26, 39).

CÎLNIC (Oltenia). Șc. 8 ani cl. VII. Ciocîrlie Marioara (E: 2184, 91, 93, 95, 96, 202, 10, 16). Cl. VIII. Cîlniceanu Ion (E: 2169, 71, 73, 82, 91, 93, 203, 06).

CÎMPIA TURZII. Ș. m. cl. X. Codrescu Radu (6443, 44, 46, 54, 57, 59—63, 82, 503, 07, 19). Cl. XI. Bretoiu Alexandru (6443, 44, 59—63, 507, 10, 25, 27, 63), Paleoca Valer (6444, 59, 61, 62, 507, 10, 19, 22, 25, 26, 61, 63), Sibian Voichița (6444—46, 48, 59, 61—63, 71, 80, 92, 510, 19, 26), Surdu Aurel (6405, 09, 11, 14, 19, 20, 22, 28, 36, 43, 61, 63, 82).

CÎMPINA. Ș. m. 1 cl. IX. *Alexandriu Doru* (6444, 57—63, 82, 96—98, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 25—28, 31, 34, 39, 53, 54, 58—61, 63—67; E: 2186, 87, 203, 07, 09), Mărășescu Adrian (6459—61, 516, 27, 5,4 61, 63; E: 2187, 209, 19), Văcăroiu Ioana (6459—61, 507, 10, 19, 25—27; E: 2186, 209, 19). Cl. X. Bîrsan Horia (6445, 57—61, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 27), Chițu Nicolae (6445, 59—61, 501, 07, 10, 16, 19, 22, 26), Comănescu Sergiu (6457, 59—61, 92, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 36, 61), Cucu Lucia (6445, 46, 58—761, 507, 10, 19, 22, 25, 65), Lăscae Maria (6501, 07, 10, 16, 22, 25, 27, 36, 45, 59, z1), Matei Nicolae (6445, 58, 59, 61, 501, 10, 16, 19, 22, 25, 61), Moldoveanu Florica (6446, 59, 61, 501, 07, 10, 16, 22, 25, 27, 36), Olteanu Luminița (6445, 58—61, 501, 07, 10, 16, 19, 22, 26, 61), Palada Mihail (6457—62, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 61), Pipera Violeta (6445, 58—61, 507, 10, 16, 19, 22, 61, 63), Rădulescu Cristina (6445, 58—61, 510, 16, 19, 22, 28), Tănase Gabriela (6445, 46, 58—61, 501, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 61, 63), Toboc Petre (6445, 58—61, 501, 07, 10, 16, 19, 22, 25).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Ș. m. Dragoș Vodă cl. IX. Popescu Ovidiu (6503, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25—27, 31). Cl. X. Iliescu Cristina (6445, 46, 57—61, 63, 67, 510, 15, 16, 19, 22, 23), Sologhie Teodor (6459—61, 63, 80, 92, 504, 10, 26, 36, 54, 61, 63), Tanu Gheorghe (6459—61, 63, 67, 80, 92, 504, 10, 26, 36, 54, 61, 63, 67).

Liceul militar, cl. X. Albu Aurel (6457, 59, 61, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 36, 61, 63), Boancă Justinian (6458, 59, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 61, 63), Filipoiu Ion (6457, 59—62, 75, 507, 10, 16, 19, 22, 26, 27, 54, 61, 63), Isopescu Alexandru (6457, 59, 61, 507, 10, 16, 19, 22, 26, 36, 61, 6)3, Merea Gheorghe (6457—59, 61, 507, 10, 15, 19, 22, 26, 34, 36, 61, 63), Meludin Vasile (6457, 59, 61, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 61, 63), Mostofelei Constantin (6457, 59, 61—63, 507, 10, 15, 16, 19, 21—23, 25, 63), Mototolea Fănică (6457, 59, 61, 62, 65, 92, 507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26). Cl. XI. Aghierghițoaie Ilie (6459—61, 63, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 19, 23, 26), Bodea Alexandru (6458—61, 63, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 19, 23, 26, 61, 63), Cimpoaie Cornel (6458—61, 63, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 23, 26 ,63), Ciofoaie Vasile (6445, 59, 61, 62, 76, 507, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 39), Ciomodolea Maricel (6416, 20, 24, 28, 31, 55, 67, 92, 405, 07, 10, 12, 15), Colaric Alexandru (6416, 20, 24, 27, 28, 41, 57, 59—63, 66, 504, 10, 12, 15, 16, 19, [22, 25, 26), Cosma Ion (6428, 58, 59, 51—63, 66, 67, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25), Crăciun Alexandru (6405, 11, 26—28, 36, 41, 43, 45, 59, 61—63, 66, 70, 73, 82, 84, 86, 87, 92, 93, 504, 10, 12, 15, 19, 22), Fetică Emil (6457, 59—63, 66, 82, 92, 504, 10, 26, 67), Grigore Vasile (6420, 45, 56, 59, 61, 63, 66, 84, 92, 504, 10, 12, 16, 26, 34, 35, 41), Hent Matei (6456—59, 61—63, 92, 507, 10, 12, 15, 16), Henyeres Andrei (6456, 58—63, 80, 92, 504, 10 19, 22, 25, 26, 36, 61, 63, 67), Ivanov Dumitru (6422, 24, 28, 29, 57, 59—63, 66, 92, 504, 10), Mamo Cristian (6504, 07, 10, 12, 16, 26, 34, 36, 38, 44, 54, 61—63, 67), *Mascan Marius* (6416, 21, 24, 27, 41, 43—45, 56—63, 66, 67, 80, 84, 92, 93, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 21, 22, 24—26, 34, 40, 44, 46), Opirșan Th. (6408, 09, 20, 24, 27, 34, 44, 67, 82, 92, 507, 10, 12, 15), Rudenco Corneliu (6420, 24, 28, 43, 45, 56—63, 66, 84, 92, 504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 3, 36, 38, 39, 44, 46, 57, 58, 61, 63, 67).

CLUJ. Șc. 8 ani nr. 7 cl. VI. Racovițean Georgeta (E: 2155, 90, 92—96, 201).

Șc. 8 ani nr. 14 cl. VI. Fără nume (E: 2169, 70, 76, 82, 85, 90—92).

Student Petkes Grigore (fac. matematică) (6445, 53, 57, 58, 60, 65, 67—70, 76, 82, 87, 88, 549, 51, 58, 63).

Ș. m. 4 cl. VIII. Balosu Virgil (E: 2185, 91—93, 95, 200, 02, 03, 06, 10, 13, 15, 16, 18), Hudrea Vasile (E: 2183—85, 92, 202, 03, 06, 18), Lascu Gheorghe (E: 2184, 85, 91—95, 201—03, 06, 10, 11, 13, 17—19), Sinca Aurelian (E: 2169—7, 176, 79, 82, 84, 90—93, 95, 99, 200, 02). Cl. IX. Bartoș Ioan (6459—62, 505, 10, 16, 19, 22, 26, 53, 67). Cl. XI. Călugăreanu Grgore (6321, 25, 27, 34, 40, 41, 443—45, 52, 55, 58—61, 63, 65—68, 70, 71, 79, 80, 82, 84, 87—89, 92, 94).

Ș. m. 5 cl. VII. Comșa Doru (E: 2169—73, 76, 79, 82, 84, 95). Cl. VIII. Ardeleanu Adriana (E: 2186, 94, 96, 98, 201, 11, 15, 18). Cl. IX. Grigore Corneliu (6420, 57, 59—62, 510, 16, 19, 22, 25, 26; E: 2174, 83, 86, 87, 209).

Ș. m. 6 cl. X. Mecea Vasile (6454, 55, 57—61, 50., 10, 19, 54, 61).

Ș. m. 7 cl. X. Kovacs Ladislau (6459, 61, 63, 65, 82, 510, 15, 19, 22, 26, 61).

Ș. m. 8 cl. VII. Coldea Adrian (E: 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 90—96), Miclescu Lucian

(E : 2185, 87, 91—95), Oroş Mariana (E : 2185, 92, 94, 96, 99, 201, 16—18). Cl. VIII. Gheţianu Radu (E : 2185, 93, 99, 202, 06, 10, 15, 17), Fischer Mariana (E : 2169, 82, 86, 91, 92, 94, 97, 206), Man Augustin (E : 2193, 95, 96, 200—02, 06, 16, 17), Măscaşiu Mariana (E : 2185, 201—03, 11, 13, 17, 18), Moşneagu Lucian (E : 2190, 97, 99, 201, 06, 15, 17; 6526), Teuşan Ovidiu (E : 2170, 85, 90—93, 95, 98, 99, 01, 02, 06, 11, 15, 17). Cl. IX. Damian Dorin (6459—61, 510, 16, 19, 22, 25, 27, 61, 68), Farkaş Ana (6459, 61, 503, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27k 39), Lazăr Aurel (644-, 44, 59—61, 510, 22, 26; E : 2186, 87, 89, 209), Oroş Lucian (6459—61, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27), Weisz Petru (6120, 24, 34, 43, 57—62, 76, 82, 88, 510k 15, 16, 19, 22, 25—27, 34). Cl. X Farkaş Petru (6445—49, 56, 74, 80, 88, 96, 97, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22, 23, 25—27, 56, 74, 80, 88, 96, 97, 503, 04, 07, 10, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 30, 34, 36, 39, 42—46), Popovici Eugen (6544, 55, 57—61, 63, 71, 82), Trif Damian (6443, 44, 57, 89, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 36). Cl. XI. Cristina Voichiţa (6459, 61, 92, 504, 07, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 36), Weisz Gheorghe (6405, 11, 16, 18, 20, 24, 28, 31, 33, 41, 4501).

Ş. m. 10 cl. VI. Oprişiu Adrian (E : 2169, 70, 92, 93, 95—98, 201), Mărgineanu Elena (6459, 61, 63, 72, 92, 510, 12, 14—16, 22, 36).

Ş. m. 12 cl. VII. Mihalte Delia (E : 2169—71, 73, 79, 82, 84, 92, 97, 201, 06).

Ş. m. 15 cl. VII. Iancău Marian (E : 2184, 85, 87, 91—95).

COLILIA (Bucureşti. Ş. m. cl. VIII. Iositescu Georgeta (E : 2185, 86, 91—93, 96—98, 202, 06), Nicolaie Ana (E : 2185, 86, 91—93, 95, 96, 201, 02, 06), Simion Constantin (E : 2185, 86, 91—98, 201, 02, 06), Stanciu Victoria (E : 2186, 91—93, 97, 98, 200—02, 06).

COMĂNEŞTI (Bacău). Absolvent Pătraşcu Nicolae (6409—12, 44, 54, 63, 67, 69, 72, 73, 75, 76, 86, 89).

CONSTANŢA. Şc. 8 ani nr. 17 cl. VIII. Dinu Dan (E : 2171, 79, 82, 86, 91, 92, 94, 96), Mitran Daniel (E : 2171, 79, 82, 86, 91, 92, 94, 96), Porcişteanu Vasile (E : 2171, 79, 82, 86, 91, 92, 94, 96), Teţan Vasilica (E : 2171, 79, 82, 91—95).

Ş. m. 1 cl. X. Nistorescu Raul (6444, 75, 503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 29, 31), Vaituş Anca (6443, 45, 46, 49, 67, 71, 92, 97, 99, 50, 53, 56, 58, 61, 63, 67, 73).

Ş. m. 3 cl. VII. Iruc Nita (E : 2184, 90, 91, 93, 95, 99, 200, 06). Cl. X. *Roduinea Nicolae* (6400, 05, 09—12, 14, 18, 20, 24, 33, 34, 40, 41, 46, 56, 57, 59,60—63, 66, 67, 69, 71, 87, 89, 50, 92, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22—24, 26, 34, 36, 38, 39, 45, 46, 51, 54—57, 61, 63, 65, 74, 79).

CORABIA. Ş. m. cl. XI. Delu Maria (6459, 61, 63, 66, 67, 73, 82, 557, 61, 63, 65, 66), Drăgui Florea (6457, 59—62, 63, 66, 67, 76, 80, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 34, 39, 44, 54, 61, 67), Fulea Eugen (6424, 59, 61, 63, 71, 87, 507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 36).

COSOBA (Bucureşti). Şc. 8 ani cl. VII. Constantin Maria (E : 2169, 71, 82, 91, 92, 95, 202), Dumitru Ion (E : 2169, 71, 82, 91, 92, 95, 98, 202), Ghiţă C. Maiar (E : 2169, 71, 82, 91, 92, 95, 98, 202), Nicolae Ioana (E : 2169, 71, 82, 91, 98, 202), Zubac Maria (E : 2169—71, 82, 91, 92, 95, 98, 202).

CRAIOVA. Ş. m. 1 cl. IX. Badea George (6424, 57, 59, 61, 82, 507, 10, 26; E. 2181, 86, 87, 89, 209), Dragoiă G. (6459, 61, 510, 25—27, 61, 63; E : 2186, 207, 09, 19), Florian Horia (6424, 44, 59, 61, 82, 503, 07, 10, 22, 25, 26, 34, 54, 58; E : 2175, 81, 83, 86—89, 209), *Pâtra Cristian* (6444, 57, 59—63, 66, 76, 82, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 25, 25—27, 43, 54, 55, 58, 6,1 63, 67, 72 : E : 2186, 87, 89, 207, 09, 12, 19), Popescu Leonard (6424, 59, 61, 82, 510, 26; E : 2174, 75, 86, 87, 209), *Turcu Ilie* (6447, 49, 65, 77, 80, 91, 92, 97, 504, 06—11, 14—19, 20—27, 29, 36, 39, 04, 43, 44, 46, 49, 51, 53—55, 58, 61, 63, 67, 68, 72; E : 2207, 09), Vlăduţ Victoria (6459, 82, 510, 22, 27, 40, 58, 61 : E · 2186, 89 ,207, 09). Cl. X. Pascu Doina (6416, 20, 21, 24, 27, 57, 59—61, 63, 65, 69, 82). Cl. IX. *Biscă Octavian* (6443—50, 54—63, 65—67, 69—76, 79, 80, 82—84, 86—89, 91, 92, 97—501), *Sandu Darius* (6444, 46, 48, 50, 54—63, 65, 67, 69, 71, 76, 80, 82, 87, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15—19, 22 ,23 25, 39, 45), Roşu Anca (6416, 20, 24, 3, 59—61, 63, 92, 504, 10, 19 ,22, 23, 39).

Ş. m. 2 cl. X. Buică Mircea (6454, 57—63, 510, 19, 22, 25, 26), Buşe Gabriela (6454, 58—61, 503, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 27), Georgescu Dan (6455, 57, 59, 61—64, 82, 507, 10, 19, 22, 26), Petrescu Ion (6446, 59, 61, 63, 65, 67, 71, 76, 82, 87, 92, 97, 98). Cl. XI. Babarada Ion (6443, 44, 48, 54, 57—59, 61—63, 66, 67, 82), Bîrlădeanu Emilian (6459, 61, 66, 80, 82, 86, 87, 92, 503, 0,4 10, 16, 19), *Coiocaru Mariana* (6406—63, 65—67, 76, 80, 82, 84, 87, 92, 97, 98, 503, 0,4 07, 10, 12, 16—19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 46, 61, 63), *Stănescu Constantin* (6443—47, 49, 50, 54—64, 66, 67, 70, 71, 74—76, 80, 82, 84, 87, 89, 92, 96, 97, 99, 503, 04, 10, 15, 16, 19).

Ş. m. 3 cl. IX. Telega Floarea (6446, 55, 59, 61, 2, 83, 86, 510; E : 217 . 81). Cl. XI. Diaconescu Mihaela (6456, 57, 59—63, 92, 510, 12, 15, 61).

Ş. m. 4 cl. XI. Mitran Marieta (6459, 61, 63, 66, 82, 92, 504, 10, 12, 22, 26, 61, 63 .

CURTEA (Făget-Banat). Șc. 8 ani cl. VIII. Meza Maria (E: 2178, 80—83, 91, 92, 94, 96).

CURTICI. Ș. m. 1 cl. VII Dan Floarea (E: 2191—94, 210, 15, 16—19), Faur Petru (E: 2190—93, 202, 06, 10, 16—19), Galiș Ioan (E: 2190—93, 202, 06, 16—18), Ispravnic Rodica (E: 2191—94, 202, 10, 15—17, 19), Radu Petru (E: 2190—93, 202, 06, 16—19), Vati Florica (E: 2184, 89, 91—94, 215, 17, 18, 22).

DEJ. Șc. 8 ani nr. 1 cl. VIII. Peter Dan (E: 2185, 91, 96, 202, 15—18).

Ș. m. 2 cl. X. Smărăndescu Cecicli (6455, 57, 59, 61—63, 507, 90, 16, a,l 25—27).

DITRĂU (Mureș. Ș. m. cl. XI Andrei Ambroziu (6454, 55, 58—62, 66, 92, 510, 22, Szabo Arpad (6454, 55, 58—62, 66, 92, 510, 22. i

DRĂGĂȘANI. Șc. 8 ani cl. VII Diaocnu Mihai (E: 21 5, g1, g3, 215—19), Vasile Dragos (E: 21 5, 91—93, 206, 10, 15—18. Cl. VIII. Oltu Mihai (E: 219, 200—03, 06, 11, 17, Popescu Mircea (E: 2185, 92—96, 215, 15, 16.

FĂGĂRAȘ. Ș. m. cl. X. Grovu Nicolae (6424, 31, 57—62, 2, 50o, 10, 16,19, 22, 25, 26), Otrocol Gheorghe (6444—46, o5, 503, 15, 22, 23, 25—2o, 36, 39, 61, 63). Cl. XI. Man Octavian (6455, 5—62, 503, 10, 12, 15, 16, 1g, 21, 22, 24).

FĂGET. Ș. m. cl. IX. Sava Petru (6402, 43, 44, 57, 59, 61, 62, 2, 89, 500, 10, 15, 16, 19, 26, 34.

FĂLTICENI. Ș. m. 1 cl. VIII. Asaftei Tiberiu (E: 2170, 71, 2, 5. 91—96).

Ș. m. 2 cl. X. Coitoru Gh. (6459—62, 92, 504, 06, 10, 12, 15, 22, 26, 36. Cl. XI. Nichita Vasile (6459—63, 82, 504, 10, 12, 15, 22, 26, 36, 39.

FELDRU (Năsăud-Cluj). Șc. 8 ani cl. VIII. Marinescu Oltea (E: 21 5, 91—94, 96, 202, 03, 06, 08, 10, 11, 13, 15, 1o, 18.

FETEȘTI (București. Ș. m. cl. XI. Tudorache Niculina (6459, 61, 92, 504, 0o, 10, 12, 16, 19, 22, 36, 46).

FÎNTÎNELE (Suceava. Șc. 8 ani cl. VIII. Surugiu Elena (E: 21 5, 92—94, 86, 206, 13, 15—18.

FOCȘANI. Sc. 8 ani nr. 3 cl. VIII. Beloiu Gabriel (E: 21 6, 90—93, 96, 21o, 18).

Ș. m. Unirea cl. VII. Baner Alexandru (E: 2171, 73, 79, 2, 5, 91—94, 206. Cl. X. Vatră Fănică (6320, 59—61, 510, 12, 15, 16, 1g, 22, 26. Cl. XI. Alexandrescu Rodica (6409, 28, 59, 61, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 22), Predescu Teodora (6405, 18, 28, 5o, 60—63, 90, 92, 510, 15, 22.

FRASIN (Suceava). Șc. 8 ani cl. VIII. Ghivuță Silvia (E: 2169—73, 79, 82, 84, 87, 90—96).

FURCENI (Galați). Șc. 8 ani. Mîscă Corneliu (E: 2192—95, 97, 98, 201, 06).

GALAȚI. Șc. de 8 ani nr. 21 cl. VI. Giurgian Valeriu (E: 2192, 98, 99—202, 06, 10, 13, 15—17). Cl. VII. Neagu Dana (E: 2169, 72, 73, 79, 91—93, 98). Cl. VIII. Caraghiosu Angela (E: 2175, 79, 82, 85, 91—93, 96, 200, 02, 08, 10, 11, 13, 17, 18), Ionescu Mariana (E: 2191—93, 95, 96, 202, 13, 15—17), Tomulescu Luiza (E: 2186, 91, 98, 202, 11, 15, 18), Voicu Elena (E: 2170, 71, 73, 79, 82, 85, 92, 96).

Șc. 8 ani nr. 22 cl. VII. Seciureanu Daniela (E: 2169, 71—73, 82, 85, 92, 95).

Șc. 8 ani nr. 23 cl. VII. Thiel Valeriu (E: 2171, 82, 85, 91—93, 96, 98). Cl. VIII. Carșote Stela (E: 2185, 87, 92—94, 96, 98, 203, 04, 07), Danilov Dumitru (E: 2185, 92, 93, 96, 98, 213, 17, 1i8).

Șc. 8 ani nr. 27 cl. VI. Susai Paul (E: 2191, 95, 97, 98, 201, 02, 06).

Ș. m. cl. X. Anghene Adrian (6445, 57, 59—63, 76, 510, 19, 23, 26, 43, 54, 63), Bejan Adrian (6444, 503, 07, 10, 16, 19, 25—27, 53, 61, 63), Dragomir Dan (6459—61, 63, 92, 504, 10, 12, 19, 23, 26, 43), Ionescu Doina (6444, 503, 07, 10, 16, 19, 25—27, 53, 61, 63), Munteanu Viorel (6459—62, 507, 10, 16, 19, 23, 26, 27, 54, 61, 63), Scurtu Nicolae (6420, 24, 31, 45, 61, 76, 510, 12, 22, 57). Cl. XI. Adămița, Elena (6457, 59—62, 92, 504, 07, 10, 15, 16, 19, 26, 36, 42), *Andrei Viorel* (6443—46, 49, 56—63, 66, 67, 69, 71, 76, 82, 85, 87, 89, 92, 97, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 13, 15—19, 22, 23, 25—28, 30, 36, 39, 43, 44, 46), Boroș Gheorghe (6457, 59, 61, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 36), Neacșu Dumitru (6463, 67, 76, 92, 504, 10, 12 15, 16, 19, 20, 43, 45), Petruș Valeriu (6461, 63, 66, 76, 92, 93, 504, 10, 12, 15, 22), Raica Nicolae (6405, 16, 18, 20, 24, 28, 41, 49, 54, 57, 59—63, 66, 536, 54, 61, 63).

Ș. m. 4 cl. VI. Ariton Petrică (E: 2184, 85, 90—206). Cl. XI. Ene Adrian (6443—45, 48, 59—61, 67, 76, 82, 92, 504, 36), Iacobovici Raul (6443, 45, 59, 61—63, 66, 67, 76, 82, 92, 512, 23), Neguț Sorin (6443, 45, 48, 59—63, 66, 67, 76, 510, 19), Petrescu Octavian (6411, 18—21, 24, 27, 28, 36, 43, 45, 48, 57, 59—63, 66, 67, 76, 82, 92, 510, 32, 36).

Ș. m. 5 cl. IX. Lupoaie Marian (6459—62, 526, 32; E.: 2184, 86, 89, 91, 209). Cl. X. Anghelescu Gabriela (6459—63, 76, 82, 87, 503, 07, 10, 16, 19), Cernișor Vasile (6459—61, 63, 76, 79, 82, 87, 510, 16, 19, 27), Cl. XI. Găitan Marcela (6459, 61, 503—05, 07, 10, 12, 15, 19, 22), Neacșu Dumitru (6463, 67, 76, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 20, 43, 54), Podaru Vasile (6449, 56—63, 67, 76, 80, 82, 92), Robea Georgeta (6424, 50, 55, 57, 58, 61, 505, 10, 12,

15, 19, 22), Susai Amalia (6503—05, 07, 10, 12, 15, 18, 19, 22, 39, 45, 64), Tănase Teodora (6461, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 19, 22, 36, 45, 46, 59).

Ş. m. 6 cl. VII. Răduţ Lulu (E : 2184, 85, 91—94, 202, 05). Cl. X. Lungu Costică (6457, 59, 61—63, 507, 10, 12, 15, 16, 22, 54).

GĂLĂŢENI (Bucureşti). Şc. 8 ani cl. VIII. Corbu Veronica (E : 2184, 85, 90, 92—96).

GĂTAIA (Banat). Ş. m. cl. VII. Bocşa Adalbert (E : 2185, 91—93, 95, 206, 15, 17), Ghilezan Mihai (E : 2185, 92, 93, 95, 202, 10, 15, 17, 18). Cl. IX. Buia Ion (6453 59, 510, 25—27, 54, 60—62, 70; E : 2207, 09), Ciovică Ilie (6443, 59, 61, 62, 507, 10, 19, 25, 27, 54; E : 2187, 207, 09). Cl. X. Dima Ion (6455, 57, 59—62, 507, 10, 19, 26, 43, 61). Cl. XI. Petruţ Emill (6445, 46,, 55—59, 61—63, 66, 69, 76, 8,4 92), Zipcsek Iosif (6444, 48, 57, 59, 63, 66, 96, 504, 12, 19, 22, 38).

GHERLA (Cluj). Ş. m. cl. XI. Bozga Dorel (6458—61, 67, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 16, 22, 23), Roman Cornel (6467, 71, 92, 97, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16).

GIURGIU. Ş. m. 1 cl. X. Manea Adrian (6459, 61, 79, 507, 10, 19, 25, 26, 34, 54, 61). Cl XI. Oprea Ştefan (6454, 56, 57, 59—62, 64, 66, 67, 80, 82, 84, 92, 93, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26—29, 36, 45), Rada Mircea (6444, 48, 66, 67, 71, 75, 512, 16, 19, 23, 36, 46).

Ş. m. 2 cl. XI. Măcăneaţă Miron (6405, 11, 22, 31, 36, 41, 49, 57, 63, 66, 80, 84, 92, 503, 04, 07, 10, 15, 19, 22, 26, 39), (Răbîncă Emil (6418, 24,28, 40, 41, 76, 98, 526, 516, 61, 63, 67, 79).

GOHOR (Galaţi). Şc. 8 ani cl. VII. Chirvăsiţă Geta (E : 2183, 92, 93, 98, 206, 10, 11, 15—18).

GURA BĂRBULEŢ (Ploieşti). Şc. 8 ani nr. 2 cl. VIII. Butaru Daniel (E : 2185, 91—94, 98, 200, 01).

HALEŞ (Buzău). Şc. 8 ani cl. VI. Marinescu Elena (E : 2185, 90—93, 95, 96, 202). Cl. VII. Petre Ion (E : 2185, 91—96, 202). Cl. VIII. Pîrlog Nicolae (E : 2185, 91—96).

HĂNEŞTI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VII. Călin Angela (E : 2169, 71, 86, 91, 92, 96), Vătămanu Lilia (E : 2169k 71, 80, 82, 85, 91, 92, 96), Zbanţ Mioara (E : 2169, 71, 80, 82, 85, 91—94, 96, 201). Cl. VIII. Filică Ana (E : 2169, 71, 82, 85, 91, 92, 95, 96), Mutuzac Elena (E : 2182, 83, 85, 91—94, 96, 201; 6459, 61, 510, 22).

HAŢEG. Ş. m. cl. XI. Maftei Nicolae (6443, 44, 54, 57—62, 76, 82, 503, 07, 10, 21).

HOREZU (Argeş). Ş. m. cl. VIII. Hangiu Ştefan (E : 2153, 56, 58, 59, 61, 73, 82, 85, 91). Cl. X. Buşe Marcu (6503, 15, 23, 28, 36, 53, 5,4 58, 59, 61—63, 69, 71).

HUNEDOARA. Ş. m. 1 cl. VIII. Ciotescu Ion (E : 2169, 71, 79, 82—84; 6424, 59, 61). Cl. IX. Pauşan Doru (E : 2186, 87, 89; 6457, 59, 61, 510), 22, 25, 26, 61, 63). Cl. X. Căpăţînă Octavian (6419, 20, 27, 29, 44, 5,4 55, 57—63, 72, 82, 98, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 39, 45, 61, 63, 67, 71), Constantinescu Dan (6420, 24, 59—62, 507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26), Ignătescu Radu (6445, 59, 60, 62, 510, 15, 16, 22, 54, 61, 63, 71),. Cl. XI. Belu Emil (6419, 57, 62, 82, 91, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25, 27, 36, 66, 72), Căpăţînă Ioan (6413, 16, 20, 24, 28, 41, 43, 44, 54—63, 66, 72, 82, 91, 92, 98, 99, 504, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 36, 38, 39), Lupu Alexandru (6416, 20, 67, 82, 92, 504, 07, 10, 15, 16, 19, 36, 39, 62).

Ş. m. 2 cl. VIII. Lup Iosi (E : 2171, 79 83, 84, 91, 209; 6459).

HUŞI. Ş. m. cl. IX. Bursuc Gheorghe (6457, 59—62, 503, 10, 16, 25, 26, 28, 29). Cl. X. Darie Viorel (6455, 57, 59, 61, 62, 82, 507, 10, 16, 19, 22, 27, 36 , Diaconu Aurel (6444, 57—69, 61, 62, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 29, 36).

IAŞI. Şc. 8 ani nr. 7 cl. VI. Munteanu Ionel (E : 2171i73, 76, 79, 82, 84, 91— 93, 95, 98). Cl. VII. Drăgan Gheorghe (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 91—93, 95, 98, 206), Drişcu Radu (E : 2169, 71, 79, 93, 95, 204, 06), Hörer Silvia (E : 2171, 73, 79, 82, 92—94, 99, 202, 11), Stavrache Mioara (E : 2171, 73, 79, 82, 85, 92, 93). Cl. VIII. Avramovici Bebe (E : 2186, 91—93, 99, 202, 03, 07, 18), Vexler Elias (E : 2185, 91, 95, 98, 99, 200, 03, 06).

Şc. 8 ani n. 14 cl. VII. Achim Ecaterina (E : 2185, 90—93, 95, 98, 216, 17), Stancu Viorel (E : 2184, 90, 95, 97, 98, 200—02, 06, 10, 12). Cl. VIII. Topor Vasile (E : 2169—71, 73, 76, 79, 82, 85, 91—93, 95).

Ş. m. 1 cl. VII. Mînzucu Magda (E : 2171, 73, 79, 84, 85, 87, 90, 91, 93, 95, 200, 02, 10, 11, 15—17), Mîrtz Puiu (E : 2185, 92—94, 98, 213, 15—17), Pancu Costel (E : 2184, 85, 91—9,4 98, 201, 15).

Ş. m. 2 cl. VIII. Knabe Valerica (E : 2185, 92—94, 96, 201, 09), Ocneanu Mihaela (E : 2169, 70, 71, 73, 79, 82, 85, 92). Cl. XI. *Alexandru Dimitrie* (645, 09, 20, 24, 28, 29, 36, 41, 44—46, 48, 79, 55—64, 66, 69, 76, 84, 92, 96, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 27), Angelescu Ioana (6457, 59, 61, 63, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26, 3o, 36, 38).

Ş. m. 3 cl. VI. Simionescu Tudor (E : 2185, 92, 96, 96, 98, 206, 15, 16). Cl. VII. Receanu Dănuţ (E : 2171, 82, 85, 90, 92, 94, 95, 202), Stănel Dumitru (E : 2171, 73, 82, 85, 91, 92, 206), Teodorescu Horia (E : 2185, 91, 94, 202, 04, 14, 15, 18). Cl. VIII. Avram Ioan (E : 2185, 90, 91, 93, 94, 97, 206),

Enăşescu Ancuţa (E : 2184, 85, 87, 80—94, 96). Cl. IX. Donea Dragoş (6444, 59, 61, 82, 507, 10, 16, 19, 25—27, 32, 54), Juracovski Vasile (E : 2186, 87, 209, 19; 6459, 61, 82, 510, 16, 26, 54, 61, 63, 67), *Popa Eugen* (6443—46, 48, 49, 52, 55—57, 59—63, 66, 69, 76, 82, 84, 92, 94, 97—99, 505, 06, 10—12, 14—17, 19—24), Surdu Mihai (6459—61, 82, 510, 16, 22, 26, 27, 61, 63). Cl. X. Aizicovici Sergiu (6420, 21, 24, 27, 31, 75, 82, 504, 10, 19, 22, 25), Macovei Gh. (6459—61, 510, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 54, 58, 60, 61, 93). Cl. XI. Rădulescu Sorin (6405, 11, 19, 20, 2,428, 41, 59, 61, 63, 87).

Ş. m. 4 cl. VI. Porcescu Liliana (E : 2170, 71, 73, 82, 84, 85, 95). Cl. VII. Duda Adriana (E : 2185, 92, 98, 210, 13, 15, 16, 18), Lăpuşneanu Lenuţa (E : 2198, 210—15, 17), Mistreanu Gabriela (E : 2185, 92—95, 202, 06, 11, 15), Pavelescu Iolanda (E : 2184, 85, 91—95). Wechsler Paula (E : 2185, 92, 210, 11, 1 —18). Cl. VIII. Săveanu Sanda (E : 2179, 82, 84, 85, 91—94, 96, 98). Cl. IX. Şerban Elena (6454, 55, 57, 59—62, 75, 519, 22, 26).

Ş. m. 7 cl. VI. Agapie Florin (E : 2185, 93, 206, 10, 11, 15—17), Amarinesei Carmen (E : 2185, 91—94, 202, 06, 10, 16, 19), Bălan Valerica (E : 2185, 91, 93, 206, 10, 11, 13, 15—17), Cernan Mihaela (E : 2189, 92—93, 206, 10, 15), Chebac Constantin (E : 2185, 92, 206, 10, 13, 15, 17), Crulicovski Adriana (E : 2185, 91, 93, 95, 98, 206, 13, 15), Jurea Octavian (E : 2192, 93, 210, 11, 15, 17, 13), Păduraru Gabriela (E : 2185, 91—93, 206, 10, 13, 15), Popescu Gheorghe (E : 2183, 91, 93, 202, 06, 10, 17), Psait Ecaterina (E : 2184, 85, 91—95, 202, 06, 10, 11, 13, 15, 16, 17). Cl. VIII. Adomnicăi Minodora (E : 2185, 90—93, 98—200, 06, 10, 11, 15—18), Barbă Georgeta (E : 2185, 91, 94, 95, 98, 99, 202, 06), Caufman Clara (E : 2185, 90—93, 95—89, 202, 10, 11, 15—19). Cl. IX. Breaur Neculai (6444, 57, 59—62, 75, 82, 89, 510, 25).

Ş. m. 8 cl. VII. Hogea Valentin (E. :2185, 90—93, 95, 202).

INEU. Ş. m. cl. X. Pop Marius (6416, 18, 20 ,21, 21, 24, 24, 27, 28, 31, 44, 45, 47, 56—63, 67, 71, 75, 76, 80, 82, 84, 87—89, 92), Vlasiu Iulian (6454, 57—62, 510, 16, 19, 25—27, 61, 63), Cl. XI. Brîncoveanu Valeriu (6400, 05, 20, 25, 28, 36, 41, 46, 57, 59—63, 66, 71, 92), Cociuba Gheorghe (6457—62, 86, 92, 507, 10, 2, 15, 16, 19, 22), Dudaş Pavel (6446, 56—59, 61—63, 67, 86, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22), Pătruţ Popa Ion (6405, 20, 24, 28, 34, 41, 46, 49, 57, 59, 61—63, 67, 71, 92).

JIMBOLIA. Ş. m. cl. XI. Sandu Lina (6420, 37, 58, 61—63, 74, 92, 504, 07, 10, 15, 16).

LĂCUŢA (Oltenia). Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Andronescu Gabriela (E : 2185, 91, 92, 98, 206, 11, 13, 16—18).

LUGOJ. Şc. 8 ani. nr. 3 cl. VIII. Bloch Ioan (E : 2185, 91, 92, 96, 201, 06, 15, 17, 18).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VIII. Matei Mircea (E : 2185, 91, 92, 96, 210, 15, 17, 18).

Ş. m. l. cl. VIII. Dabă Valerian (E : 218,4 86, 91, 93, 95, 96, 202, 06; 6459). Cl. IX. Orbulov Petru (6455, 57, 60, 69, 75, 510, 19, 22, 26, 27). Cl. X. Frenţi Elena (6457, 59—61, 75, 82, 510, 19, 22, 28, 36, 63). Cl. XI. *Brînda Rodica* (6449, 54, 55, 57—66, 75, 80, 84, 86, 92, 504—07, 10—12, 14—27, 31, 36, 39, 41, 44, 46,) *Gherea Petre* (6410, 11, 14, 16, 20, 22, 24, 28, 41, 45, 55—63, 65, 66, 76, 82, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 38, 39, 46), Iacobescu Constantin (6414, 27, 34, 37, 38, 42, 45, 57, 59—61, 63, 65, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23), Iovănescu Iona (6445, 57, 59—63, 66, 76, 80, 82, 84, 92, 98, 510, 22), *Silaschi Ivan* (6414—16, 20, 22, 27—29, 34, 36—38, 41, 42, 45, 46, 57, 59, 61, 62, 65, 67, 76, 79, 80, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23).

MARGINA (Banat). Şc. 8 ani cl. VII. Unguraş Ion (E : 2185, 91—93, 213, 15—17). Cl. VIII. Bujoreanu Viorica (E : 2192, 94, 96, 99, 211, 13, 15).

MĂRGINENI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VIII. Piroi Ion (E : 2169, 71, 82, 85, 86, 91—93, 95, 96, 202, 06).

MATCA (GALAŢI). Şc. 8 ani nr. 1. Popa Lenuţa (E : 2185, 92, 94, 201, 06, 17, 18).

MEDIAŞ. Ş. m. cl. XI. Orban Elek (6405, 09, 11, 14, 19, 20, 24, 29, 31, 34, 56, 43, 44—46, 49, 54—63, 66, 67, 69, 70, 82, 84, 92, 93).

MEHADIA (Banat). Ş. m. cl. X. Vrăjitoru Isaac (6444, 57, 59—62, 510, 16. 22, 26, 34, 61, 63). Cl. XI. Ciortan Mihail (6457, 59, 61, 62, 72, 507, 10, 12, 16, 22, 26, 61), Miloş Iancu (6457, 59, 61, 62, 82, 86, 92, 507, 16, 22, 26, 61).

MEREI (Buzău). Şc. 8 ani cl. VI. Nicolae Victoria (E : 2169—71, 73, 79, 82, 92).

MOINEŞTI (Bacău). Ş. m. cl. VIII. Bocănescu Elisabeta (E : 2173, 82, 85, 91, 92, 202, 06), Ciocan Nicuşor (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 96, 201, 06), Corpuic Lidia (E : 2173, 82, 85, 91—93, 202, 06), Grecu Victor (E : 216,4 66, 73, 82, 85, 92—95, 98, 202, 06), Halea Elena (E : 2173, 82, 91—93, 202, 06), Nistor Marin (E : 2185, 91, 93, 95, 202, 06, 13), Pavel Aurora (E : 2173, 82, 85, 91—93, 202 ,06), Tănase Anişoara (E : 2173, 82, 85, 91, 93, 202, 06), Vrînceanu Gabriela (E : 2184—86, 90—93, 95, 96).

MORENI (Ploieşti). Ş. n. cl. VI. Andrei Elena (E : 2185, 91, 92, 98, 206, 13, 16).

Cl. VII. Oprescu Marian (E : 2185, 92—94, 210, 15, 16), Petrescu Magdalena (E : 2185, 91—94, 210, 13, 15, 16, 18), Sabău Dan (E : 2182, 91—93, 95, 98, 99, 201, 02, 06, 08, 10 ,11, 13, 16—18).

MOZĂCENI DEAL (Argeş). Ş. m. cl. XI. Badea Petre (6457, 59—62, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36).

MURGENI (Iaşi). Ş. m. Cîrjă Gheorghe (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 29, 34, 58, 61, 63), Enache Aurica (6420, 21, 24, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 29), Gîdei Valeriu (6420, 21, 24, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 29), Modiga Viorica (6421, 24, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 29). Cl. X. Popa Mihai (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 3,458, 61, 63).

NĂSĂUD. (Ş. m. cl. IX. Ceuca George (6444, 59—61, 97, 507, 10, 19, 22, 25—27, 54, 61, 63), Surtu Vasile (6459—61, 97, 507, 10, 19, 21, 25—27, 54, 58, 61, 63). Cl. X. Kiselstein Aurel (6476, 80, 87, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 34, 54), Vălean Aurora (6420, 24, 57, 59—61, 82, 510, 19, 22, 34, 36). Cl. XI. Morariu Ion (6457—59, 61—63, 84, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 46, 54, 61, 63).

NADLAC (Banat). Ş. m. I cl. VI. Bătăran Ştefan (E : 2169, 71, 79, 82, 84, 92, 96, 98, 210, 11, 13, 15—17).

NEGRENI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VI. Moraru Aurică (E : 2189, 210, 11, 13, 15—18).

NOVACI (Oltenia). Ş. m. cl. VII. Berbecel Dumitru (E : 2169, 70, 71, 73, 79, 82, 87, 90—93, 95, 206), Ciorogaru Nicolae (E : 2169, 70, 71, 73, 82, 85, 91, 92), Comănescu Valentin (E : 2169, 71, 73, 79, 82, 85, 87, 90—96, 206, 15), Porumbel Ionel (E : 2169, 70, 73, 76, 82, 87, 90—93, 95, 206, ,13). Cl. VIII. Dinescu Mihaela (E : 2185, 87, 90—96, 98, 206).

ONEŞTI (Bacău). Ş. m. 2. Galaczi Peter (E : 2185, 95, 96, 207, 09, 15), Ghioc Mariana (6445, 57—59, 62, 71, 510, 16, 19, 22, 25, 61), Mocanu Angela (6445, 57—59, 62, 71, 510, 16, 19, 22, 25, 61). Cl. X. Stativă Stelian (6459, 61, 63, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27). Cl. XI. Şerban Nicolae (6443, 45, 49, 56, 57, 65, 66, 67, 69, 80, 82, 84, 87, 92, 99).

OBREJA (Banat). Cl .VII. Băilă Petru (E : 2184, 85, 91—96).

OCNA MUREŞ. Gudov Adalbert (E : 2184, 91—93, 99, 201 ; 6459, 97, 98).

ODORHEI. Cl. XI. Kiss Peter (64o5, 49, 59, 61, 76, 84, 87, 504, 10, 15, 54, 63, 74), Hodag Erker (6445, 49, 56, 59, 61, 87, 504, 10, 12, 15, 18, 22, 5, 574), Lautzberg Rozalia (6449, 56, 58, 59, 61—63, 87, 504, 10, 12, 15, 18, 22, 54, 74), Lukaci Hajn al (6445, 49, 56, 59, 61—63, 76, 84, 504, 10, 12, 15).

OSTROVENI (Oltenia-Segarcea). Cl. VII. Filip O Stan. (E : 2169, 84, 85, 90—93, 95), Radu M. Virginia (E : 2169, 84, 85, 90—93, 95).

ORADEA. Ş. m. I cl. X. *Memetea Ovidiu* (6443—46, 48—50, 56, 68—63, 65, 67, 74, 75, 80, 82, 87, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—29, 31, 36, 38, 39, 43, 45, 46), *Popescu Dumitru* (6286, 323, 25, 26, 28, 29, 41, 42, 44, 56. 58—62, 65—75, 86, 89—91, 93, 403—07, 11, 14, 16, 20—22, 24, 25, 28, 29, 36, 39, 41, 43—49, 54—57, 70—72, 75, 76, 79, 80, 82, 89).

Ş. m. 2 cl. X. Mănucu Dumitru (6459, 61, 82, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 61, 63). Cl. XI. Ianşa Augustin (6457, 61, 82, 507, 10, 15, 23, 26, 39), Lucaş Teodor (6434, 59—61, 82, 507, 10, 16, 19, 22, 26, 61, 63).

OŢELUL ROŞU (Banat). Cl. IX. Tuican Floare (6420, 43, 54, 57, 59—62, 507, 16, 19, 22, 25—27). Cl. XI. Dobre Petru (6458—63, 92, 504, 10, 15, 22, 25, 26), *Năvligu Ioan* (6443—46, 49, 56—63, 67, 71, 73—76, 79, 82, 84, 87, 92, 93, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 80).

PANCIU. Cl. VII. Rusu Traian (E : 2197, 202, 06, 15—17, 24, 26, 27, 32), Vidraşcu Doina (E : 2185, 92, 94, 99, 204, 10, 11, 15—17), Cl. VIII. Pătrăşcanu Ana (E : 2185, 97, 98, 200, 10, 11, 13, 15—17).

PARVA (Năsăud). Cl. VIII. Cicedea George (E : 2184, 85, 90—93, 95, 96, 201——04, 06, 10, 13, 15, 17), Rus Anton (E : 2197, 201—04, 06, 10, 13, 15), Scurtu Vasile (E : 2197, 201—04, 06, 10, 13, 15).

PĂUNEŞTI (Bacău). Cl. VI. Neagu Viorica (E : 2181, 84, 95, 97, 202, 10, 15, 18), Novac Gh. Maria (E : 2173, 76, 79, 84, 90, 91, 93, 95, 97, 99, 215, 17, 19). Cl. II. Berbece Maria (E : 2185, 91, 93— 95, 97 201, 02, 06, 10, 15, 17—19), Bogdan Mariţa (E : 2184, 85, 91, 92, 95, 97, 201, 02, 10, 15, 17, 19), Gheorghiu Gabriela (E : 2184, 90, 94, 95, 97—99, 201, 02, 10, 15, 18, 19), Novac N. Maria (E : 2163, 69—71, 73, 82, 84, 85, 90, 91, 93, 97, 99, 215—17, 19), Rizuc Rodica (E : 2184, 90, 94, 97, 210, 11, 15, 17, 19).

PĂTÎRLAGELE (Cislău). Ş. m. cl. VI. Popescu N. Cornel (E : 2169, 71, 72, 85, 92, 95, 98, 202, 06). Cl. IX. Neacşu Dumitru (6454, 55, 57, 59, 61, 62, 82, 510, 15, 16, 19, 22), Poşoiu Constantin 6444, 4o, 56——64, 75, 82, 87, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 31, 34, 36, 37, 39, 46, 54, 61, 63), Toma Veronel (E : 2207, 6444, 57, 59—62, 507, 10, 16, 22, 27), Cl. X. Bancu Luigi (6457—63, 507, 10, 15, 16, 19, 23, 25—27), Popa Dumitru (6455, 57, 507, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36), Toma Florin (6444, 48, 57—63, 82, 507, 10, 12, 16, 22, 26). Cl. XI. *Andrei Titus* (6449, 54, 65—63, 66, 71, 74, 79, 82, 84, 92, 97,

MAGYAR KIR. ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS MŰSZAKI MÚZEUM 1863

36, 39, 46, 54, 56, 63), Pavel Dumitru(644 5, 49, 54—63, 66, 71, 76, 79, 82, 84, 92, 98, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 40, 46, 54, 51, 53).

PEREŞTI (Argeş). Cl. VIII. Popa A. Valentina (E : 2185, 93, 94, 95, 96, 98, 208, 15, 16).

PETROŞANI. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VIII. Ajder Adrian (E : 2198, 99, 202, 03, 06, 11, 15—18), Alexandru Emil (E : 2185, 86, 92—96, 98, 203, 05, 06, 10, 15—17), Bodor Emeric (E : 2185, 90—94, 96, 203, 15—18), Bojescu Iuliana (E : 2184, 85, 92, 94, 98, 203, 06, 14, 16, 18, 19), Bucşa Cornelia (E : 2184, 85, 90, 96, 206, 13, 15, 16, 18, 19), Cantacuzino Smaranda (W : 2184, 85, 86, 90, 92, 94, 95, 203, 06, 11, 15, 17, 18), Căpitanu Crăiţa (E : 2184, 85, 92, 94, 96, 98, 203, 06, 14, 15—19), Caraliu Lucia (E : 2129, 84, 85, 96, 210, 15, 16, 18, 19), Catană Marcalda (E : 2184, 85, 96, 201, 03, 06, 07, 14, 16, 18, 19), Cătuţoiu Mariana (E : 2192, 94, 95, 97, 98, 202, 05, 15—17), Cibu Mariana (E : 2184, 85, 92, 94, 96, 201, 03, 10, 18), Clia Dorina (E : 2184—86, 92, 95, 96, 210, 16, 18), Cioară Silvia (E : 2184, 85, 90—95, 98, 206, 10, 16, 18, 19, 6516), Cricovan Melania (E : 2185, 91, 96, 98, 203, 09, 16—19), Damianov Ileana (E : 2184, 85, 90, 91, 94, 96, 98, 203, 06, 07, 14—19), Daecălu Gheorghe (E : 2185, 91—93, 96, 201. 03, 06, 07, 18), Faira Mihail (E : 2193—95, 98, 202, 03, 11, 13, 15, 17), Ionescu Nicolae (E : 2192—95, 97, 98, 206, 11, 15—17), Istrate Beatrice (E : 2182, 93, 95, 98, 203, 05, 06, 10—18), Jomi Victoria (E : 2184—86, 899 91—96, 201, 02, 09, 11, 17—19; 6510, 16), Lazăr Lucia (E : 2129, 93, 95, 98, 202, 03, 05, 06, 10, 11, 15—18), Mihai Vasile (E : 2192, 94, 95, 97, 98, 202, 05, 06, 11, 14, 17), Mariana Angela (E : 2184, 85, 94—96, 203, 10, 15, 16, 18, 19), Munteanu Lidya (E : 2184, 94, 96, 98, 203, 06, 14—16, 18, 19), Mureşan Ana (E : 2194, 95, 98, 203, 06, 10, 11, 15—18), Pană Nicolina (E : 2184, 85, 90, 91, 93, 96, 98, 203, 06, 16—18), Paraschiv Ion (E : 2184, 85, 91, 96, 201, 11, 15—18), Pîrvu Gabriela (E : 2185, 87, 98, 203, 05, 06, 11, 15, 16), Pop Flavia (E : 2184, 85, 94, 98, 203, 06, 07, 14, 16—19), Prodanciuc Rodica (E : 2184, 85, 91—94, 96, 98, 203, 06, 10, 15—19), Roman Adrian (E : 2185, 87, 92, 94, 203, 06, 10, 11, 13—19), Ronai Adrian (E : 2185, 92, 94, 96, 98, 99, 203, 06, 11, 15, 17), Rusan Violeta (E : 2184, 85, 96, 201, 03, 06, 07, 14, 16, 18, 19), Sasu Adrian (E : 2193—95, 97, 98, 202, 06, 15, 17), Schelker Erich (E : 2185, 92, 96, 98, 203, 06, 07, 15, 18), Strochi Lucian (E : 2185, 92—95, 97, 98, 202, 06, 11, 13, 16, 17), Szolga Ecaterina (E : 2185, 86, 92, 94, 96, 201, 15, 18, 19), Ştefan Mircea (E : 2185, 86, 92, 94—96, 98, 203, 06, 10, 11, 14, 16—18), Thiszkes Ladislau (E : 2185, 90, 91, 93, 94, 98, 203, 06, 10, 11, 16—19), Vahnovan Valeria (E : 2192, 94, 95, 98, 203, 05, 06, 11, 16—18).

Ş. m. cl. X. Brumă Ana (6446, 57, 59—61, 63, 64, 510, 12, 16, 19, 29), Ciularu Angela (E : 6444, 45, 46, 59—61, 63, 66, 80, 507, 10, 22). Duşenco Adrian (6445, 55, 57—61, 510, 12, 15, 22, 26), Firescu Maria (6444, 46, 59—61, 63, 66, 80, 507, 10, 22). Joni N. Nicolae (6458, 60, 65, 66, 79, 82, 92, 93, 507, 14, 24, 25, 45), Lascu Paul (6444, 63, 65, 66, 510, 14, 16, 19, 20, 21, 24), Martinovici Mihai (6445, 57, 59, 61—63, 65, 66, 82, 507, 10, 15, 16, 22, 44, 58, 61, 63), Rug Alin (6445, 59—61, 63, 65, 66, 80, 503, 07, 10, 16, 61), Munteanu Constanţa (6460, 61, 63, 64, 66, 512, 16, 19, 22, 49), Rusu Dumitru (6445, 59—63, 66, 505, 07, 10, 16, 19, 61, 63), State Mariana (6444, 45, 59—61, 63, 66, 80, 507, 10, 22), Ocniu Teodora (6444, 45, 59—61, 63, 65, 66, 80, 503, 07, 10, 16, 19. 22, 61, 63).

PIANUL DE SUS (Hunedoara). Şc. 8 ani cl. VIII. Voina Ioana (E : 2026, 191—93, 96, 201, 03, 11, 13, 16, 19).

PIATRA NEAMŢ. Ş. m. cl. XI. Chiruţă Conszantin (6460, 61, 67, 69, 80, 82, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 36, 67).

PINCOTA (Banat). Ş. m. cl. IX. Chebeleu Petru (6455, 57—62, 82, 510, 16, 18, 26, 61).

PITEŞTI. Şc. 8 ani nr. 10 cl. VI. Minduţeanu Dan (E : 2192, 93, 97, 98, 202, 06, 20, 24, 32).

Ş. m. cl. IX. Lazăr Mircea (6459, 61, 92, 510, 19, 22, 26, 61, 63, 71, 85, 86, 606, 15), *Lungulescu Bogdan Eugen* (6404, 05, 10, 11, 13—16, 18, 20—22, 24, 27, 28, 31, 40, 43—46, 55, 57—63, 67, 69, 75, 76, 80, 82, 87, 89, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15—17, 22, 25—27, 29, 36, 39, 44). Cl. X. Popescu Florea (6457—62, 507, 10, 16, 19, 22, 25), Sava N. Ion (6444, 57—62, 507, 10, 16, 19, 22), Tănăsescu I Nicolae (6457—62, 507, 10, 16, 22, 19, 25).

Ş. m. 2 cl. VII. Anghel Sorin (E : 2184, 85, 91—94, 98, 202—, 06, 10, 13, 15—18).

PLENIŢA (Oltenia). Ş. m. cl. XI. Tocai A. Viorel (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 34, 601, 09, 15).

ERATĂ — La problema 6738 în loc de „că" se va scrie „în care caz".
— La problema 6739 în loc de ultimul egal se va scrie $\leqslant$
— La problema 6747 în loc de ultimul semn $\leqslant$ se va scrie $>$.
— La problema 6792 primul exponent este $(a+1)n+a$ în loc de $(a-1)n+a$.
— La problema E : 2280 în loc de $(a+b+c)$ se va scrie $(a+b+c)^5$

1965 JUL 14

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică, 1965.

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective. *Solicităm probleme interesante legate de practică.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise* pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă.* Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a, Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată pentru anul 1965 (12 numere). Prețul este de 2 lei exemplarul (24 lei anual).

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

I. P. „Informația" — c. 248

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) mai 1965

5

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI (II), nr. 5 — mai 1965

SUMARUL

	Pag.
1. Despre unele transformări geometrice de C. Ionescu-Bujor	193
2. Pierre Fermat de L. Ţene	200
3. Caleidoscop matematic de Dan Voiculescu şi Eugen Popa	204
4. Note matematice de E. Kiss şi B. Orban	207
5. Probleme rezolvate (6346, 6348, 6351, 6353, 6355, 6357, 6379, 6382, 6398)	208
6. Chestiuni de examen (6840—6886)	216
7. Probleme propuse (6887—6919)	223
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2307—2322).	228
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	230

ANUL XVI, 5 M A I

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.* profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Păvăţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ; *Ţene L.* profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 5 mai 1965

DESPRE UNELE TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

de *C. IONESCU-BUJOR*

Noțiunea de transformare geometrică ocupă un loc important în geometrie, în ultima sută de ani. Ea este folosită nu numai în diferite ramuri ale matematicii, dar și în unele teorii și aplicații din capitole ale fizicii, cum ar fi : optica, teoria relativității, în specialități tehnice cum sînt : aerodinamica, hidraulica.

1. *Simetria plană în raport cu o axă.* Fiind dată într-un plan P o dreaptă $x'x$, se știe că fiecărui punct M al planului îi corespunde un punct M_1, simetric în raport cu $x'x$. Punctul M_1 îndeplinește următoarele condiții (fig. 1) :

— este situat pe perpendiculara dusă din M pe $x'x$,

— distanța sa la dreapta $x'x$ este egală cu distanța punctului M la $x'x$.

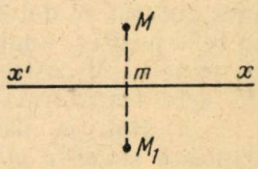


Fig. 1

Dacă punctul M este situat pe dreapta $x'x$, simetricul său M_1 în raport cu $x'x$ coincide cu M. Astfel, oricărui punct M al planului P i se asociază un punct M_1 în același plan, ceea ce se mai indică spunînd că *punctul M se transformă în punctul M_1 prin simetria plană determinată de axa $x'x$ sau că punctul M_1 este transformatul punctului M prin această simetrie.*

Operațiile (construcțiile geometrice) arătate mai sus, prin care se obține punctul M_1 corespunzător unui punct dat M, definesc o *transformare geometrică* numită *simetrie plană în raport cu axa $x'x$.* Simetria plană în raport cu o axă este o *transformare punctuală*, întrucît ea transformă un punct în alt punct.

Astfel, putem da următoarea definiție simetriei plane în raport cu o axă :

Simetria plană în raport cu o axă $x'x$ a planului P este o transformare punctuală determinată de axa $x'x$, prin care, fiecare punct M al planului P se transformă într-un punct M_1, astfel încît

— dreapta MM_1 este perpendiculară pe axa $x'x$ și

— punctele M, M_1 sînt egal depărtate de $x'x$.

Dreapta $x'x$ se numește *axa simetriei.* Fiecare dreaptă a planului P determină cîte o simetrie plană aplicabilă planului P. Deci, există o

infinitate de simetrii plane aplicabile unui plan P. Ele formează *mulțimea simetriilor plane ale planului P.*

2. *Alte transformări geometrice.* Putem asocia fiecărui punct M al planului P, alt punct M_1, adică putem transforma punctele M în puncte M_1 și în alte moduri, prin alte operații decît acelea care definesc simetria plană în raport cu o axă. Cu alte cuvinte, există și alte transformări geometrice punctuale în plan decît simetriile în raport cu o axă. Vom da două exemple: a) translația plană și b) rotația plană.

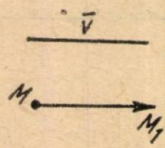


Fig. 2

a) *Translația plană este transformarea geometrică determinată de un vector dat* $\bar{v}$, *paralel cu planul P. Ea transformă un punct oarecare M (fig. 2) al planului P într-un punct* M_1, *astfel încît* $\overline{MM_1} = \bar{v}$.

Deci, pentru a construi transformatul unui punct M al planului prin translația T determinată de vectorul $\bar{v}$, se construește vectorul $\overline{MM_1}$ egal cu vectorul $\bar{v}$. Extremitatea M_1 a vectorului construit este punctul în care se transformă M prin T.

b) *Rotația plană este o transformare geometrică determinată de un punct O (centrul rotației) situat în planul P și de un unghi* α *(unghiul rotației). Ea transformă un punct oarecare M al planului P într-un punct* M_1 *(fig. 3), astfel încît:*

$$OM = OM_1 \quad \text{și} \quad \sphericalangle MOM_1 = \alpha.$$

Deci, pentru a construi transformatul unui punct M al planului prin rotația R determinată de centrul O și de unghiul α, se construește în sens pozitiv, unghiul MOz de mărime α (fig. 3) și se ia pe semidreapta Oz punctul M_1, astfel ca OM_1 să fie egal cu OM. Punctul M_1 este transformatul punctului M prin rotația R.

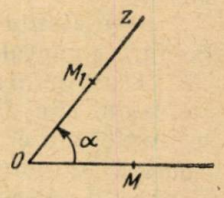


Fig. 3

c) Rotația plană de centru O și unghi π se mai numește *simetrie plană în raport cu centrul O.*

d) Se numește *transformare identică* a punctelor planului P, transformarea care face să corespundă fiecărui punct M al planului punctul M însuși. Transformarea identică se notează cu semnul 1.

Rotația plană de centru O și unghi zero este o transformare identică.

Nici o simetrie plană în raport cu o axă nu este transformare identică.

3. *Proprietățile transformatelor prin simetrie plană în raport cu o axă.*

a) *Transformatele punctelor unei drepte d a planului P prin simetria S de axă x'x formează o dreaptă* d_1. *Dreapta* d_1 *se numește transformata dreptei d prin simetria S.*

Dacă dreapta d intersectează axa x'x a simetriei S într-un punct O, transformata sa d_1 *conține punctul O și*

$$\sphericalangle (x'x, d) = \sphericalangle (d_1, x'x).$$

Dacă dreapta d este paralelă cu x'x, atunci și d_1 *este paralelă cu x'x.*

1) Să demonstrăm proprietatea în cazul cînd d interesectează axa $x'x$ în punctul O (fig. 4). Prin simetria S punctul O se transformă în el însuși. Fie A un punct al dreptei d și A_1 transformatul lui A prin simetria

S. Conform definiției simetriei plane, AA_1 este perpendicular pe $x'x$ și Aa egal cu aA_1, unde a este intersecția dreptelor AA_1, $x'x$. Rezultă că triunghiul OaA este egal cu triunghiul OaA_1, deci,

$$\sphericalangle (x'x, d) = \sphericalangle A_1Ox. \tag{1}$$

Să arătăm că transformatul M_1 al unui punct oarecare M al dreptei d aparține dreptei OA_1.

În adevăr, dacă M este situat pe semidreapta OA (ca în fig. 4) și dacă m este intersecția dreptelor MM_1, $x'x$ atunci MM_1 este perpendicu-

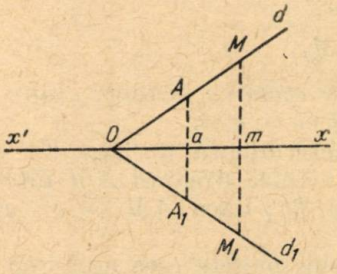


Fig. 4

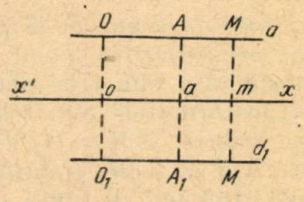


Fig. 5

lar pe $x'x$ și Mm egal cu mM_1, deci triunghiul OmM este egal cu triunghiul OmM_1, de unde

$$\sphericalangle (x'x, d) = \sphericalangle M_1Ox. \tag{2}$$

Din (1) și (2) deducem:

$$\sphericalangle A_1Ox = \sphericalangle M_1Ox,$$

deci, semidreptele OA_1, OM_1 coincid, iar M_1 aparține dreptei OA_1.

Analog se arată că M_1 aparține dreptei OA_1, cînd M este luat pe prelungirea dincolo de O a semidreptei OA.

Consecință. Din egalitatea triunghiurilor (OaA; OaA_1) și (OmM; OmM_1) deducem că

$$AM = A_1M_1.$$

2) Să demonstrăm proprietatea enunțată pentru cazul cînd d este paralelă cu $x'x$.

Considerăm pe dreapta d punctele O, A și fie O_1, A_1 transformatele acestor puncte prin S (fig. 5). Astfel OO_1 și AA_1 sînt perpendiculare pe $x'x$, de unde rezultă că:

$$OO_1 \text{ este paralelă cu } AA_1 \tag{4}$$

și notînd o, a intersecțiile dreptelor OO_1, AA_1 cu $x'x$, rezultă

$$Oo = oO_1;\ Aa = aA_1 \tag{5}$$

Din ipoteză și din (4) deducem că patrulaterul $OoaA$ este dreptunghi, deci

$$Oo = Aa.$$

Ca urmare, avînd în vedere și egalitățile (5),

$$oO_1 = aA_1. \tag{6}$$

Din (4) și (6) rezultă că patrulaterul oO_1A_1a este dreptunghi, deci O_1A_1 este paralelă cu d și O_1A_1, d sînt egal depărtate de $x'x$. Mai rămîne să arătăm că punctul M_1, transformatul prin S al unui punct oarecare M al dreptei d aparține dreptei O_1A_1.

Raționînd asupra patrulaterelor $AamM$, aA_1M_1m cum am raționat mai sus asupra patrulaterelor $OoaA$, oO_1A_1a deducem $A_1M_1 \parallel d$.

Am arătat însă, *că* $O_1A_1 \parallel d$. Ca urmare, dreptele O_1A_1, A_1M_1 coincid, deci punctul M_1 aparține dreptei O_1A_1.

Consecință. Rezultă și $AM = A_1M_1$. (7)

b) *Distanța dintre două puncte este egală cu distanța dintre transformatele lor prin simetria plană în raport cu o axă.*

Considerăm simetria plană S, determinată de axa $x'x$ și notăm A_1, M_1 transformatele punctelor A, M. Dacă dreapta AM intersectează axa $x'x$, atunci $AM = A_1M_1$ (relația 3); dacă $AM \parallel x'x$, atunci de asemenea $AM = A_1M_1$ (relația 7).

Notă. Întrucît distanța dintre două puncte este egală cu distanța dintre transformatele lor prin orice simetrie plană se spune că *distanța dintre două puncte este invariant al mulțimii simetriilor plane în raport cu o axă.*

În general, se numește invariant al unei mulțimi de transformări punctuale, o mărime geometrică (distanța dintre două puncte, raport a două segmente de dreaptă, unghi, arie etc.) a cărei valoare nu se schimbă atunci cînd se aplică punctelor planului o transformare oarecare a mulțimii considerate.

c) Dacă A, B, C sînt trei puncte coliniare în planul P astfel ordonate încît punctul B este situat între A și C și dacă A_1, B_1, C_1 sînt transformatele punctelor A, B, C printr-o simetrie plană de axă $x'x$ situată în P, atunci A_1, B_1, C_1 sînt coliniare și B_1 este situat între A_1 și C_1.

Fie d dreapta care conține punctele A, B, C și d_1 transformata dreptei d prin S. Dreapta d_1 conține punctele A_1, B_1, C_1. Deoarece punctul B este cuprins între A și C avem $AC > AB$ și $AC > BC$. Dar, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; rezultă

$$A_1C_1 > A_1B_1;\ A_1C_1 > B_1C_1,$$

relații care exprimă că punctul B_1 este situat între A_1 și C_1.

d) *O semidreaptă Ou se transformă prin simetria S de axă $x'x$ într-o semidreaptă O_1u_1.*

Fie d dreapta care conține semidreapta Ou. Punctul O determină pe d două semidrepte Ou și Ou'. Prin S dreapta d se transformă într-o dreaptă d_1, iar punctul O se transformă într-un punct O_1 situat pe d_1. Punctul O_1 determină pe d_1 două semidrepte O_1u_1 și $O_1u'_1$.

Să arătăm că transformatele tuturor punctelor semidreptei Ou aparțin numai uneia dintre semidreptele O_1u_1, $O_1u'_1$ ale dreptei d_1.

Fie A un punct al semidreptei Ou și A_1 transformatul lui A prin S. Punctul A_1 aparține uneia din semidreptele O_1u_1, $O_1u'_1$. Să presupunem că aparține semidreptei O_1u_1. Considerăm un punct M pe Ou, cuprins

între O și A. Transformatul său prin S este un punct M_1 situat pe d_1 și cuprins între O_1 și A_1 (a se vedea 3°, c), deci, situat pe semidreapta O_1u. Considerăm apoi, un punct N pe semidreapta Ou, exterior segmentul OA, ceea ce înseamnă că A este cuprins între O și N. Prin S, punctul N se transformă în N_1 situat pe d_1, astfel încît A_1 este cuprins între O_1 și N_1. Rezultă că și punctul N_1 aparține semidreptei O_1u_1. În concluzie, punctele semidreptei Ou se transformă în puncte ale semidreptei O_1u_1.

e) *Unghiul este invariant al mulțimii simetriilor plane.*

Fie date în planul P, unghiul uOv și simetria S de axă $x'x$ (fig. 6). Prin S semidreptele Ou, Ov se transformă în semidreptele O_1u_1, O_1v_1. Se cere să arătăm că unghiurile uOv, $u_1O_1v_1$ sînt egale.

În acest scop, considerăm pe Ou, Ov punctele A, B. Prin S aceste puncte se transformă în punctele A_1, B_1 situate pe semidreptele O_1u_1, O_1v_1. Întrucît distanța dintre două puncte este egală cu distanța dintre transformatele lor prin simetria S (§ 3°, b) rezultă că

$$OA = O_1A_1;\ OB = O_1B_1;\ AB = A_1B_1.$$

Deducem egalitatea triunghiurilor OAB, OA_1B_1 și astfel,

$$\sphericalangle uOv = \sphericalangle u_1O_1v_1.$$

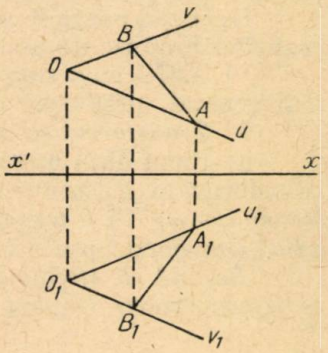


Fig. 6

Consecințe. Demonstrația dată ne arată că: *Transformatul unui triunghi dat prin simetria plană în raport cu o axă este un triunghi egal cu cel dat.* Ca urmare, *aria triunghului este invariant al mulțimii simetriilor plane.*

Întrucît un poligon se poate descompune în triunghiuri, prin diagonale duse din același vîrf și cum transformatul unui triunghi prin simetrie plană în raport cu o axă este un triunghi egal cu cel dat, rezultă că transformatul unui poligon prin simetria considerată este un poligon egal cu cel dat.

f) *Transformatele punctelor unui cerc (C) situat în planul P, prin simetria plană S de axă $x'x$ din planul P, sînt situate pe un cerc (C_1) egal cu cercul (C). Centrul cercului (C_1) este transformatul cercului (C) prin S.*

Fie O centrul cercului (C) de rază R și M un punct oarecare al cercului. Prin S punctele O, M se transformă în O_1, M_1 și avem $O_1M_1 = OM$, deci $O_1M_1 = R$.

Rezultă că transformatele punctelor cercului (C) prin S sînt la egală distanță de O_1, deci sînt situate pe un cerc (C_1) de centru O_1 și rază R.

4. *Produse de transformări.*

a) Fie date în planul P, dreptele x'_1x_1; x'_2x_2. Considerăm simetriile plane S_1, S_2 determinate de axele x'_1x_1, x'_2x_2 aplicate planului P.

Uneori este necesar să se aplice punctelor M ale planului P simetria S_1, care le transformă în puncte M_1, apoi să se aplice punctelor M_1 simetria S_2 care le transformă în puncte M_2 ale planului P. În acest caz,

punctele M sînt transformate în M_2 prin succesiunea de simetrii S_1, S_2 sau, cum se mai spune, prin *produsul dintre simetria* S_1 *şi simetria* S_2. Acest produs de simetrii se notează prescurtat S_2S_1. Schimbînd ordinea în care sînt luate simetriile în produs, adică aplicînd punctelor M întîi simetria S_2, apoi transformatelor acestora simetria S_1, deci, aplicînd produsul de simetrii S_1S_2, punctele M nu se mai transformă în punctele M_2, ci în alete puncte M'_2.

Dacă după ce punctele M au fost transformate în puncte M_2 prin produsul S_2S_1, aplicăm punctelor M_2 o altă simetrie plană S_3 de axă x'_3x_3, punctele M_2 se transformă în M_3. În acest caz, punctele M au fost transformate în punctele M_3 prin produsul dintre simetria S_1, simetria S_2 şi simetria S_3, produs care se scrie $S_3S_2S_1$.

Operaţia poate fi continuată cu alte simetrii plane (sau cu aceleaşi), realizînd produse de n simetrii (unde n este număr natural.

b) Astfel cum sînt definite produsele de simetrii plane, se definesc, mai general, produsele de transformări punctuale plane oarecare.

5. *Transformarea inversă a unei transformări punctuale.*

a) Fiind dată o transformare T, prin care un punct oarecare M se transformă în M_1, *se numeşte transformare inversă a transformării* T (*inversa transformării* T) *o transformare notată* T^{-1} *care transformă pe* M_1 *în* M, *adică transformă punctele obţinute prin* T *în cele iniţiale.*

Rezultă că efectul produsului de transformări $T^{-1}T$ *este acelaşi cu al transformării identice* 1, de aceea se scrie

$$T^{-1}T = 1$$

ceea ce se citeşte astfel : produsul de transformări $T^{-1}T$ este echivalent cu transformarea identică. De asemenea,

$$TT^{-1} = 1.$$

b) Transformarea inversă a unei simetrii plane S în raport cu o axă $x'x$ este însăşi simetria S, adică :

$$S^{-1} = S.$$

În adevăr, un punct oarecare M (fig. 1) se transformă prin S în M_1. Dar, avînd în vedere definiţia simetriei plane, rezultă că S transformă pe M_1 în M. Cum şi S^{-1} transformă pe M_1 în M, deducem că $S^{-1} = S$.

c) Considerînd definiţiile translaţiei, rotaţiei şi transformării inverse, cititorii vor justifica uşor următoarele proprietăţi :

1) Transformarea inversă a translaţiei plane T de vector $\overline{v}$ este translaţia plană de vector $-\overline{v}$;

2) Transformarea inversă a rotaţiei plane R de centru O şi unghi α este rotaţia de centru O şi unghi $2\pi - \alpha$.

6. *Despre produsul a două simetrii plane.*

a) *Produsul simetriei plane* S *de axă* $x'x$ *cu ea însăşi este echivalent cu transformarea identică*, ceea ce se scrie şi astfel :

$$S^2 = 1.$$

Intrucît (§5, b)

$$S = S^{-1} \qquad (8)$$

produsele transformării S cu S și cu S^{-1} sînt echivalente, deci

$$S^2 = S^{-1}S. \tag{9}$$

Operația prin care am trecut de la (8) la (9) se mai exprimă spunînd că am înmulțit în egalitatea (8), ambii membri la dreapta cu S. Dar $S^{-1}S = 1$, deci din (9) rezultă

$$S^2 = 1.$$

b) *Fie date simetriile plane S_1, S_2 determinate de axele paralele x'_1x_1, x'_2x_2 a căror distanță este l. Produsul S_2S_1 este echivalent cu o translație T determinată de un vector $\bar{v}$ perpendicular pe axele simetriilor, avînd sensul de la x'_1x_1 la x'_2x_2 și mărimea $2l$.*

Datele sînt reprezentate în fig. 7. Un punct oarecare M al planului determinat de axele simetriilor se transformă prin S_1 în M_1, astfel încît

$$MM_1 \text{ e perpendicular pe } x'_1x_1 \text{ și } Mm \text{ egal cu } mM_1 \tag{10}$$

Prin S_2 punctul M_1 se transformă în M_2, astfel încît

$$M_1M_2 \text{ e perpendicular pe } x'_2x_2 \text{ și } M_1m_1 \text{ egal cu } m_1M_2. \tag{11}$$

Dar, pentrucă x'_1x este paralelă cu x'_2x_2, deducem din (10) și (11) că punctele M, M_1, M_2 sînt coliniare și că

$$MM_2 = MM_1 + M_1M_2 = 2mm_1, \text{ unde } mm_1 = l$$

de unde rezultă că punctul M se transformă direct în M_2 prin translația definită în enunț. Astfel:

$$S_2S_1 = T.$$

Consecință. Aplicînd această proprietate produsului de simetrii S_1S_2 obținem că el este echivalent cu o translație de vector $2\overline{m_1m}$, deci cu T^{-1}, inversa translației T.

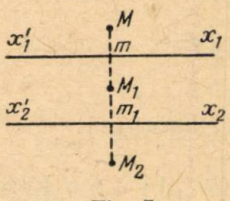


Fig. 7

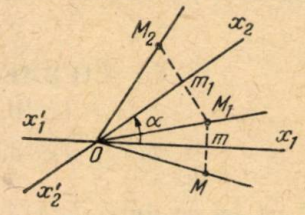


Fig. 8

c) *Fie date simetriile plane S_1, S_2 determinate de axele x'_1x_1, x'_2x_2 care sînt concurente în punctul O și formează unghiul α. Produsul S_2S_1 este echivalent cu o rotație R, de centru O și de unghi 2α.*

Datele sînt reprezentate în fig. 8. Prin simetria S_1 punctul O se transformă în el însuși, iar un punct oarecare M al planului determinat de axele simetriilor considerate se transformă în M_1. Astfel dreapta OM_1 este transformata dreptei OM prin simetria S_1 și (§ 3°, a):

$$\sphericalangle MOx_1 = \sphericalangle x_1OM_1, \text{ iar } OM = OM_1.$$

Punctul M_1 se transformă prin S_2 în punctul M_2 și la fel:

$$\sphericalangle M_1Ox_2 = \sphericalangle x_2OM_2, \text{ iar } OM_1 = OM_2. \text{ Rezultă că } OM = OM_2 \text{ și}$$
$$\sphericalangle MOM_2 = \sphericalangle MOM_1 + \sphericalangle M_1OM_2 = 2\sphericalangle x_1OM_1 + 2\sphericalangle M_1Ox_2 =$$
$$= 2\sphericalangle x_1Ox_2 = 2\alpha.$$

Aceste rezultate arată că punctul M_2 este transformatul punctului M prin rotația R de centru O și unghi 2α (fig. 9).

Consecință. Aplicînd proprietatea demonstrată produsului de simetrii S_1S_2, aceasta este echivalentă cu o rotație de centru O și unghi $2\pi - \alpha$, deci cu inversa rotației R.

d) Întrucît, astfel cum s-a arătat, translația plană este echivalentă cu produsul a două simetrii plane și rotația plană în raport cu un centru este de asemenea echivalentă cu produsul a două simetrii plane, se pot deduce proprietățile transformatelor prin translație și rotație plană din proprietățile transformatelor prin simetria plană în raport cu o axă, date la § 3°.

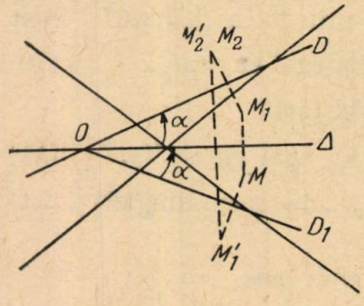


Fig. 9

Astfel, translațiile și rotațiile plane transformă o dreaptă într-o dreaptă, dreptele paralele în drepte paralele, cercul într-un cerc egal. Ele au ca invarianți distanța dintre două puncte, unghiul a două drepte, ariile triunghiurilor etc.

7. Pentru completarea cunoștințelor asupra transformărilor geometrice indicăm următorul material bibliografic:

C. Ionescu-Bujor, Elemente de transformări geometrice. Partea I, II, III, Editura Tehnică, București;

T. Roman, Simetria, Editura Tehnică, București;

Gh. D. Simionescu, Metoda vectorială în geometrie. Gazeta Matematică și Fizică, seria B, vol. XIV, nr. 3.

PIERRE FERMAT
(1601–1665)

de *LUCIA ȚENE*, profesoară București

În 1601, la un an după ce G i o r d a n o B r u n o fusese ars pe rug și în timp ce G a l i l e o G a l i l e i stabilea principiile dinamicii moderne și construia prima lunetă astronomică, la Beaumont de Lomagne lîngă Toulouse, se năștea într-o familie de tăbăcari P i e r r e F e r m a t, acela care avea să ilustreze cu numele său științele matematice și de la a cărui moarte se împlinesc 300 ani.

Vălul de întuneric al evului mediu fusese sfîșiat și Europa renăștea în lumina marilor adevăruri ce risipeau fumul superstițiilor și al misticismului. Artele înfloreau depășind modelele antice, C o p e r n i c denunța egocentrismul lui A r i s t o t e l și P t o l e m e u, M a g e l l a n demonstra pentru întîia oară practic sfericitatea pămîntului, iar K e p l e r stabilea eliptica orbitelor planetare.

În această efervescență scînteietoare, după ce și-a petrecut copilăria la Beaumont de Lomagne, Fermat studiază, conform vederilor și ambițiilor paterne, dreptul la Toulouse. După terminarea studiilor Pierre Fermat este numit consilier la curtea din Toulouse. Viața trece calmă, uniformă și poate de aceea unii istorici sînt ispitiți să remarce acest amănunt care contrastează cu viața tumultuoasă și trepidantă a lui Descartes și Pascal.

Dar, sub existența monotonă a consilierului de curte ardea un foc mistuitor : pasiunea pentru studiile matematice. Din această pasiune fierbinte aveau să izbucnească, vii și peste secole, flacările Calculului probabilităților și ale Teoriei numerelor.

Din arta lui Fermat de a generaliza ideile imprimîndu-le un caracter universal, de a studia o problemă sub toate aspectele prin aplicarea algebrei și geometriei, ieșeau cristalele pure ale unor expresii simple, dar care închideau în ele o infinitate de adevăruri. Toate acestea îl apropiau de marele său contemporan Descartes, al cărui admirator sincer era în ciuda faptului că adesea îi găsim războindu-se pe cîmpul de luptă al științei. Fermat numea acest conflict „mica mea dispută", iar Descartes îl intitula „mic proces matematic împotriva domului Fermat" *).

Deși spirit mai vast, mai cuprinzător, Descartes neglija și uneori ascundea cu intenție calea pe care mergea spre rezolvarea unor probleme, trasînd doar numai linii generale. Este cazul rezolvării grafice a ecuațiilor cu ajutorul unor construcții geometrice, unde Descartes a omis voluntar modul de găsire, după ecuațiile date, al curbelor folosite pentru determinarea rădăcinilor acestor ecuații.

Dimpotrivă, Fermat în lucrarea sa „Isagoge ad locos planos et solidos" (1637) a explicat amănunțit cum se pot obține în fiecare caz respectivele locuri geometrice.

Lucrarea de mai sus marchează o dată crucială, ea punînd bazele Geometriei analitice.

Polemizînd fără ostentație cu Descartes, și mai tîrziu, în 1660 într-o altă lucrare „De resolutione problematum geometricorum... disertatio tripartita", Fermat"... a arătat că în anumite condiții, mai ales în cazul unor ecuații de tip special, cum ar fi cele binome, ne putem mulțumi cu curbe de grad mai mic decît cele recomandate de Descartes" **).

Polemica dintre cei doi savanți a fost purtată fie prin lucrări, fie direct prin corespondență, după moda timpului. Se pare că ea a început în jurul anului 1637, cînd prin intermediul lui M. Mersenne, prieten al lui Descartes, Fermat a primit un exemplar din lucrarea „Dioptrique". Mersenne întemeiase la Paris un cerc de savanți care țineau întruniri științifice. Acest cerc în 1635, printr-o dispoziție a lui Richelieu, a devenit Academia din Paris, reorganizată de Colbert în 1666.

Scrisoarea lui Fermat către Mersenne privind volumul „Dioptrique" și conținînd critici și obiecțiuni a fost transmisă lui Descartes, care răspunse trimițînd lui Fermat lucrarea „Geometrie",

*) H. Wieleitner, Istoria matematicii.

**) H. Wieleitner, Istoria matematicii.

iar acesta răspunde de astă dată prin tratatul său în manuscris asupra maximelor şi minimelor.

Este cazul să menţionăm aici, că lucrările lui Fermat au văzut lumina tiparului după moartea sa, adunate în volumul „Varia opera mathematica", apărut la Toulouse în 1679, sub îngrijirea lui Samuel Fermat, fiul său, lucrare extrem de rară, reeditată la Berlin în 1861.

Afirmaţia lui H. Wieleitner în „Istoria matematicii" că „Fermat a fost cel mai mare matematician francez din secolul XVII nu ni se pare deloc neîntemeiată, dacă ar fi să luăm în consideraţie chiar numai cercetările sale din domeniul teoriei numerelor, ale căror rezultate şi-au depăşit cu mult contemporanii şi chiar succesorii.

În aceste cercetări Fermat a fost fără egal. De la Pitagora nimeni nu s-a ocupat atît de mult şi cu atîta succes de teoria numerelor. Din păcate cele mai importante din lucrările sale în acest domeniu ne-au parvenit fără demonstraţie, unele din ele fiind descoperite după moartea sa, notate pe marginea cărţilor.

„Fermat poseda fără îndoială — spune Chasles — o metodă minunată şi simplă care a rămas necunoscută în ciuda marilor perfecţionări". De aceiaşi părere este şi Libri, care presupune că Fermat „... cunoştea lucruri pe care noi le ignorăm şi pentru a ajunge la ele ne trebuesc metode mai perfecţionate decît cele pe care le cunoaştem".

„Metodele de care incontestabil dispunea acest mare matematician — spune Wieleitner — sînt învăluite într-o ceaţă străbătută doar de cîteva raze de lumină".

Rezultatele cercetărilor lui Fermat sînt cuprinse în corespondenţa cu savanţii timpului: Jacques de Billy, Sainte Croix, Saint Martin, Pascal şi mai ales cu Frenicle de Bessy. Ocupîndu-se de divizibilitatea numerelor, Fermat dă o metodă ingenioasă pentru aflarea tuturor divizorilor unui număr.

Una dintre cele mai importante probleme adresată tutur r matematicienilor este aceea a rezolvării în numere întregi a ecuaţiei :

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

unde a este un număr dat, care nu este un patrat perfect.

Dintr-o confuzie a lui Euler, problema este cunoscută sub numele de „ecuaţia lui Pell", deşi matematicianul Pell nu s-a ocupat niciodată de această problemă, paternitatea ecuaţiei fiind astăzi notorie, ea continuă să circule sub vechea denumire, în virtutea unui conservatorism nejustificat.

Reluînd unele teoreme antice referitoare la construirea unor triunghiuri dreptunghice cu laturi raţionale, Fermat notează pe marginea scrierilor anticului Diofant o serie de teoreme privind imposibilitatea unor egalităţi. Cea mai importantă şi care desigur a contribuit în mare măsură la celebritatea lui Fermat printre contemporani şi mai tîrziu, a fost „marea teoremă" care îi poartă numele şi anume, că ecuaţia

$$x^n + y^n = z^n$$

nu poate fi rezolvată în numere întregi ($n > 2$).

Nenumăraţi au fost savanţii care s-au străduit să demonstreze posibilitatea acestei egalităţi. Eforturile lor au fost încununate numai de

succese parțiale, marea teoremă a lui Fermat neputînd fi demonstrată nici astăzi, în general. De aceea, cunoscînd mijloacele reduse de care dispunea secolul al XVII-lea, pare ciudată afirmația lui Fermat care, pe marginea aceleiași cărți a lui Diofant, notează:

„Dispun pentru aceasta de o demonstrație cu adevărat minunată, dar marginile sînt prea înguste ca să o pot scrie aici".

Să fi fost oare Fermat posesorul acestei demonstrații? Răspunsul rămîne sub semnul îndoielii mai ales că în altă parte Fermat o demonstrează prin metoda reducerii nesfîrșite, pentru $n = 4$, metodă recomandată de Fermat și pentru demonstrarea ecuației

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

fapt care la rîndul său demonstrează că Fermat cunoștea soluția generală a ultimei ecuații.

Marea teoremă capătă o circulație și mai largă prin premiul de 100 000 mărci instituit pentru rezolvarea ei de P. Wolfskehl și de multe ori constituie subiectul de concurs al Academiilor și societăților științifice. Nume strălucitoare de matematicieni ca Euler, Legendre, Kummer, Lame, Cauchy ș.a. se leagă de laborioase cercetări, dar demonstrația teoremei în formă generală este căutată zadarnic. Euler, pe care multe probleme ale lui Fermat l-au condus la cercetări și descoperiri extrem de valoroase, reușește să demonstreze ecuația pentru $n = 3$. Lamé demonstrează în 1839 marea teoremă a lui Fermat pentru $n = 7$. În 1850 E. Kummer reușește și el să demonstreze teorema pentru $n \leqslant 100$, ceea ce îi aduce premiul Academiei din Paris. Cu anumite condiții restrictive Sophie Germain dă o demonstrație pentru $n < 100$. Urmînd condițiile puse de Sophie Germain, Legendre merge mai departe demonstrînd pentru $n < 197$. Rezultate parțiale la această teoremă au obținut Lebesgue și Cauchy.

Numele lui Fermat este strîns legat și de Calculul probabilităților, despre a cărui descoperire Laplace spunea că onoarea îi revine în egală măsură lui Fermat și Pascal.

Într-adevăr, cam prin 1653, Cavalerul Georges de Méré, moralist de înaltă ținută spirituală, dar care nu avea nimic comun cu științele matematice, propune lui Pascal următoarea problemă:

Cum se împarte echitabil între doi jucători de zaruri miza unui joc întrerupt, miză care la sfîrșitul jocului ar fi revenit jucătorului care ar fi însumat un anumit număr de puncte?

Problema nu era nouă și mai înainte Luca Pacioli (1494), Cardano (1539) și Tartaglia (1556) încercaseră fără succes studierea acestei probleme. Singur Cardano sesizase legătura ei cu analiza combinatorie, dar se oprise aci.

Pascal comunică problema, la rîndul său, lui Fermat și simultan, dar independent, ambii soluționează problema corect, însă în mod diferit.

Folosind triunghiul său aritmetic soluția lui Pascal era lipsită de supleță și nu putea fi extinsă decît cu multă greutate la cazul mai multor jucători. Cercetările lui Pascal au fost publicate în 1665 (anul morții lui Fermat). Soluția lui Fermat mai simplă, văzu lumina tiparului abia peste 114 ani, în 1779 cu ocazia reeditării operelor lui Pascal, cînd au fost publicate scrisorile respective ale lui Fermat.

Punînd bazele teoriei probabilităţilor şi analizei combinatorii Fermat şi Pascal deschid o eră nouă în istoria matematicii. Studiile şi cercetările în acest domeniu sînt continuate şi completate de cei mai de seamă matematicieni ai secolelor XVII şi XVIII. Avîntul considerabil al calculului probabilităţilor este determinat şi de aplicaţiile mereu extinse în viaţa practică, la calculul rentelor viagere, la prelucrarea rezultatelor observaţiilor, în studii demografice, astronomie etc.

Într-o lume unde mulţi se mulţumeau cu concepţia părintelui Cosma Indicopleustes, care susţinea că universul este o ladă în fundul căreia se găseşte pămîntul, iar pe capac îngerii mişcă soarele şi luna, Fermat lucra pentru satisfacţia personală şi pentru un cerc restrîns de savanţi, nebănuind sau neîndrăsnind să creadă că teoriile sale abstracte vor deveni o condiţie indispensabilă a vieţii noastre moderne, a avîntului ştiinţei şi tehnicei.

În biologie şi medicină, în economie şi lingvistică, în fizica atomică şi nucleară, precum şi în tehnica zborurilor cosmice, matematica pătrunde lărgindu-şi mereu cîmpul de aplicaţie şi sub acest aspect vom preţui mai just remarcabila moştenire pe care ne-a lăsat-o Fermat.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

I. Marea teoremă a lui Fermat

Pe marginea „Aritmeticii" lui *Diofant*, celebrul matematician francez *Pierre Fermat* a făcut următoarea însemnare, în limba latină: *Nici cubul în două cuburi, nici pătratul pătratului şi în general, nici o putere în afară de pătrat nu poate fi descompusă în suma a două puteri de acelaşi fel*; am găsit pentru aceasta, o demonstraţie uimitoare. Însă lărgimea manşetei nu-mi permite să o scriu aici.

Această afirmaţie despre nerezolubilitatea ecuaţiei $x^n + y^n = z^n$ în numere întregi, diferite de zero, pentru $n > 2$, a devenit celebră sub numele de *marea teoremă a lui Fermat*. Pînă în prezent nu a putut fi demonstrată decît în cazuri particulare. Astfel, *Euler* a arătat că ecuaţiile $x^3 + y^3 = z^3$ şi $x^4 + y^4 = z^4$ nu au soluţii în numere întregi nenule; apoi *Legendre* şi *Dirichlet* au demonstrat teorema lui Fermat pentru $n = 5$, iar *Lamé* şi *Lebesgue* pentru $n = 7$. *Sophie Germain* a dat o demonstraţie pentru $n < 100$ cu anumite condiţii restrictive referitoare la x, y, z, n iar în aceleaşi condiţii *Legendre* a extins demonstraţia pentru $n < 197$. *Kummer* a reuşit cu ajutorul unei teorii foarte subtile, să demonstreze că teorema lui *Fermat* ar putea fi eventual falsă numai pentru anumite valori excepţionale ale lui n. Astfel, a stabilit valabilitatea teoremei lui *Fermat* pentru orice n mai mic decît 100.

Redăm mai jos, demonstraţia lui *Euler* pentru $n=4$, astfel cum este prezentată într-un articol de *Hans Reichardt*, apărut în *„Mathematik in der Schule" 6/1964.*

Arătînd că ecuaţia $x^4 + y^4 = z^2$ nu este rezolubilă în numere întregi diferite de zero, *a fortiori* va rezulta că ecuaţia $x^4 + y^4 = z^4$ nu are soluţii în numere întregi diferite de zero.

Să presupunem, prin absurd, că ar exista totuşi o asemenea soluţie, unde x, y, z pot fi luaţi pozitivi şi primi între ei, doi cîte doi. Unul din numerele x sau y va fi par, fie y. În descompunerea :

$$x^4 = (z - y^2)(z + y^2)$$

factorii fiind primi întrei ei şi pozitivi deducem :

$$z - y^2 = u^4$$
$$z + y^2 = v^4$$
$$x = uv$$

unde u şi v sînt pozitivi, impari şi n-au divizori comuni. Rezultă :

$$2z = u^4 + v^4$$
$$2y^2 = v^4 - u^4 = (v^2 + u^2)(v^2 - u^2)$$

Asemănător ca mai sus obţinem :

$$v^2 + u^2 = 2s^2$$
$$v^2 - u^2 = 4t^2$$

unde s şi t sînt pozitivi şi primi între ei.

Din a doua ecuaţie deducem :

$$v + u = 2a^2;\ v - u = 2b^2;\ t = ab$$

cu a şi b pozitivi şi fără divizori comuni, deci,

$$u = a^2 - b^2;\ v = a^2 + b^2$$

Introducînd aceste valori în $u^2 + v^2 = 2s^2$, găsim o nouă ecuaţie de tipul celei de la care am pornit :

$$a^4 + b^4 = s^2$$

unde a, b şi s sînt iarăşi întregi şi strict pozitivi. Dar :

$$z = a^8 + 6a^4 b^4 + b^8 = s^4 + 4a^4 b^4 > s^4 \geqslant s > 0.$$

Noii ecuaţii îi putem aplica acelaşi procedeu şi repetînd la infinit obţinem un şir de ecuaţii ale căror numere z formează un şir infinit descrescător de numere întregi pozitive, ceea ce este imposibil.

Contradicţia la care am ajuns dovedeşte că ecuaţia $x^4 + y^4 = z^2$, şi cu atît mai mult ecuaţia $x^4 + y^4 = z^4$ nu este rezolubilă în numere întregi pozitive şi diferite de zero.

Principiul acestei demonstraţii, folosirea faptului că nu există un şir strict descrescător de numere întregi pozitive, poartă numele de *reducere nesfîrşită* şi se datoreşte lui *Fermat*, care l-a aplicat în multe chestiuni dificile din teoria numerelor.

Dan Voiculescu, elev, Bucureşti

II. Pătrate între cuburi și cuburi între pătrate perfecte

1. Se observă că între două pătrate perfecte consecutive se poate întîmpla să nu avem nici un cub perfect, de exemplu între 9 și 16, sau între 16 și 25; de asemenea se poate întîmpla să avem un cub; între 4 și 9 avem pe 2^3, între 25 și 36 pe 3^3 etc. Să vedem dacă între două pătrate perfecte consecutive putem avea două cuburi, ar trebui să avem:

$$a^2 < b^3 < b_1^3 < (a+1)^2$$

Extrăgînd rădăcina pătrată de peste tot avem:

$$a < b^{1+1/2} < b_1^{1+1/3} < a+1$$

sau:

$$(a+1) - a > b \cdot b_1^{1/3} - b \cdot b^{1/2}$$

$$1 > b_1 \cdot b_1^{1/2} - b \cdot b^{1/2}$$

Dacă arătăm că $bb^{1/2} - b \cdot b_1^{1/2}$ este mai mare ca 1, atunci evident și $b_1 b_1^{1/2} - bb^{1/2}$ va fi mare ca 1. Dar:

$$b_1 b_1^{1/2} - b \cdot b_1^{1/2} = b_1^{1/2}(b_1 - b) > 1$$

căci $b_1^{1/2} > 1$ deoarece $b_1 > 1$, iar $b_1 - b > 1$, deci între două pătrate perfecte putem avea cel mult un cub perfect.

2. Problema s-ar putea pune mai general, și anume să studiem dacă între două puteri consecutive de ordinul k putem avea două puteri de ordinul $(k+1)$. Analog, ar trebuie să avem:

$$a^k < b^{k+1} < b_1^{k+1} < (a+1)^k$$

Extrăgînd rădăcina de ordinul k de peste tot ar trebui ca

$$(a+1) - a > b_1^{1+1/k} - b^{1+1/k}$$

$$1 > b_1 \cdot b_1^{1/k} - b \cdot b^{1/k}$$

Asemănător, demonstrăm că $b_1 \cdot b_1^{1/k} - b \cdot b_1^{1/k}$ este mai mare ca 1 fiindcă $b_1^{1/k}$ este mare ca 1 ($b_1 > 1$), iar $b_1 - b \geqslant 1$, deci cu atît mai mult $b_1 \cdot b_1^{1/k} - b \cdot b^{1/k} > 1$, deci între două puteri consecutive de ordinul k există cel mult o putere de ordinul $(k+1)$. Pentru $k = 2$ obținem cazul tratat la punctul 1.

3. Problema s-ar putea pune și mai general: să vedem dacă între a^k și $(a+n)^k$ pot exista $(n+1)$ puteri de ordinul h (evident $h > k$). Ar trebui să avem:

$$a^k < b^h < b_1^h < \ldots < b_n^h < (a+n)^k$$

Extrăgînd de peste tot rădăcina de ordinul k și notînd: $h - k = m$ avem:

$$(a+n) - a > b_n^{1+m/k} - b^{1+m/k}$$

$$n > b_n \cdot b_n^{m/k} - b \cdot b^{m/k}$$

Ca și la punctele 1 și 2 vom demonstra că :

$$b_n \cdot b_n^{m/k} - b \cdot b_n^{m/k} > n$$

$$b_n^{m/k}(b_n - b) > n$$

Dar $b_n^{m/k} > 1$, fiindcă $b_n > 1$, iar $b_n - b \geqslant n$, deci putem enunța în definitiv, că între două puteri a^k și $(a+n)^k$ pot exista cel mult n puteri consecutive de ordinul h, unde $h > k$. Pentru $h = k+1$ și $n = 1$ se obține cazul tratat la punctul 2.

Eugen Popa, elev, Iași

NOTE MATEMATICE

APLICAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU TRIUNGHIUL ISOSCEL

În cele ce urmează vom stabili trei proprietăți geometrice generalizînd în același timp și o problemă publicată în G.M.—B.

Proprietatea 1. Fie ABC și DBC două triunghiuri isoscele cu baza comună BC. Printr-un punct arbitrar M al bazei BC ducem paralele la AC și DB care intersectează pe AB respectiv DC, în E și F. Dreapta EF taie pe DB și AC în H și I, iar dreapta BD intersectează latura AC în punctul G. Triunghiurile EMF și GHI sînt egale (fig. 1).

Demonstrație. Fie EE_1 o dreaptă paralelă cu BC; E', A', F', G' și I' proiecțiile punctelor F, A, F, G și I pe dreapta BC și G'' intersecția dreptelor EE_1 și GG'. Vom arăta mai întîi, că $GG'' = II'$.

Din asemănarea unor triunghiuri rezultă :

$$GG' = \frac{2AA' \cdot DA'}{AA' + DA'}; \quad \frac{EE'}{ME'} = \frac{AA'}{BA'}; \quad \frac{FF'}{CF'} = \frac{DA'}{CA'}; \quad \frac{II'}{CI'} = \frac{AA'}{CA'}$$

precum și

$$\frac{II' - FF'}{EE' - FF'} = \frac{CI' - BA' + ME'}{BA'}$$

Folosindu-ne de aceste relații obținem :

$$GG' = II' =$$

$$= \frac{AA' \cdot (2DA' \cdot BA' - DA' \cdot BE' - AA' \cdot BE')}{BA' \cdot (AA' + DA')}.$$

Aceasta înseamnă că triunghiurile $GG''E_1$ și $II'C$ sînt egale și deci $GE_1 = IC$. Însă atunci, $GI = E_1C = EM$ și cum unghiurile triunghiurilor EMF și GHI sînt egale două cîte două, rezultă egalitatea lor, ceea ce era de demonstrat.

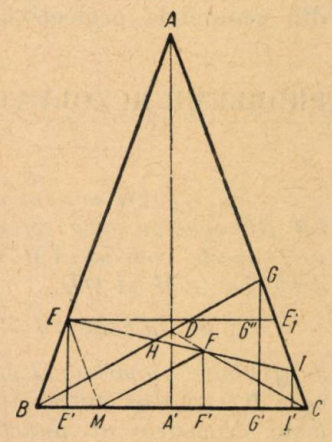


Fig. 1

Proprietatea 2. Considerăm cercurile O_1 și O_2, care se intersectează în punctele M și N. Fie MM_1 și MM_2 diametrele cercurilor O_1, respectiv O_2. O dreaptă variagilă care trece prin M intersectează a doua oară cercurile O_1 și O_2 respectiv în B și C. Paralela dusă prin B la MM_2 intersectează paralela prin C la MM_1, într-un punct P, care se mișcă pe dreapta M_1M_2 (fig. 2).

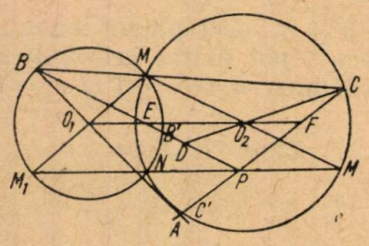


Fig. 2

Demonstrație. Să notăm cu A și D intersecțiile dreptelor BO_1 și CP respectiv CO_2 și BP, iar cu E și F intersecțiile dreptei O_1O_2 cu BP și CP. Observăm că triunghiurile BAC și BDC sînt isoscele cu baza comună BC, deci potrivit proprietății 1, rezultă că triunghiurile MO_1O_2 și EPF sînt egale. Deci, $PF = MO_1 = O_1M_1$ și $EP = MO_2 = O_2M_2$, adică patrulaterele O_1M_1PF și EPM_2O_2 sînt paralelograme. Prin urmare, O_1O_2 este paralelă și cu M_1P și cu PM_2. Deci, punctul P se află pe dreapta M_1M_2.

Proprietatea 3. Fie MM_1M_2 un triunghi oarecare, iar P un punct arbitrar pe latura M_1M_2. Considerăm cercurile O_1 și O_2 cu diametrele MM_1 respectiv MM_2. Paralela cu MM_2 care trece prin punctul P intersectează cercul O_1 în punctele B și B', iar paralela cu MM_1 trecînd prin punctul P taie cercul O_2 în punctele C și C' (fig. 2). Afirmăm că punctele M, B, C respectiv M, B', C' sînt colineare.

Demonstrație. Să presupunem că dreapta BM intersectează cercul O_2 într-un punct C_1 diferit de C. Conform proprietății 2, paralela prin C_1 la MM_1 intersectează paralela dusă prin B la MM_2 într-un punct Q situat pe M_1M_2. Însă paralela prin B la MM_2 intersectează pe M_1M_2 în P, deci, Q și P sînt confundate $\lightning$. Acest lucru înseamnă că punctele C și C_1 sînt confundate, ceea ce trebuia demonstrat.

Acest raționament se poate aplica și în cazul punctelor M, B' și C'.

Observații. 1. Proprietatea 3 este generalizarea problemei 1705 din G.M.F.—B. 6/1955. Dacă M este mijlocul laturii M_1M_2 obținem tocmai problema 1705.

2. Proprietățile 2 și 3 se mai pot demonstra folosind considerații din geometria proiectivă.

El. Kiss și *B. Orban*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6346

În cercul O se duce un diametru fix AB care se prelungește cu segmentul BC egal cu raza cercului. Se consideră punctul M mobil pe cerc și se prelungește coarda AM cu segmentul $MD = k \cdot AM$. Fie P intersecția dreptelor BM și OD.

a) *Să se arate că* $PM = \dfrac{k}{2k+1} BM$, *unde k este o constantă*; b) *să se afle locul geometric al punctului P*; c) *să se determine valoarea lui k pentru care BD, AP și perpendiculara din C pe AM sînt concurente și să se afle locul geometric al punctului lor de concurență.*

I. Șiclovan, profesor Petroșani

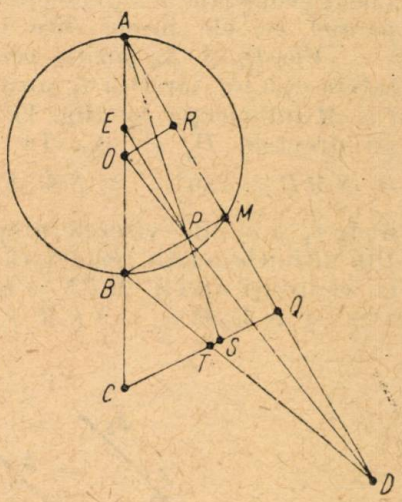
Soluție dată de *Chițescu Ion* elev Ș. m. 10 București. a) Ducem OR perpendiculară pe AM. Unghiul AMB este drept ca fiind înscris într-un semicerc. Deci OR este paralel cu BM și cum OR trece prin mijlocul O al laturii AB al triunghiului AMB avem $OR = \frac{1}{2} BM$ (1).

Pe de altă parte, triunghiurile DMP și DRO fiind asemenea (teorema fundamentală a asemănării) putem scrie : $\frac{DM}{DR} = \frac{PM}{OR}$ sau :

$$\frac{k \cdot AM}{k \cdot AM + \frac{AM}{2}} = \frac{PM}{OR}, \text{ adică } \frac{2k}{2k+1} = \frac{PM}{OR} \qquad (2)$$

Înlocuind (1) în (2) avem : $\frac{2k}{2k+1} = \frac{PM}{\frac{1}{2} BM}$ sau : $PM = \frac{k}{2k+1} BM$.

b) Ducem din P paralela PE la AM. Conform teoremei lui Thales avem : $\frac{AE}{AB} = \frac{PM}{MB}$ sau : $\frac{AE}{AB} = \frac{k}{2k+1}$ de unde $AE = \frac{k}{2k+1} AB$ = constant, deci, segmentul EB este fix. Cum unghiul EPB este drept locul geometric descris de P atunci cînd M este mobil pe cerc, este cercul de diametru $EB = \frac{k+1}{2k+1} AB$.



c) Fie CQ perpendiculara din C pe AM. AP taie CQ în S, iar BD taie CQ în T. Scriind că fasciculul de drepte concurente AC, AS și AQ determină pe dreptele paralele BM și CQ segmente proporționale avem : $\frac{PM}{MB} = \frac{QS}{QC}$ sau : $\frac{k}{2k+1} = \frac{QS}{QC}$ (3). Dar $\frac{QC}{BM} = \frac{3}{2}$ (din triunghiurile asemenea ABM și ACQ), deci (3) devine : $\frac{k}{2k+1} = \frac{2QS}{3BM}$ sau : $QS = \frac{3k \cdot BM}{2(2k+1)}$ (4).

Pe de altă parte, din triunghiurile asemenea DQT și DMB avem $\frac{QT}{BM} = \frac{DQ}{DM}$ (5) ; dar $DM = k \cdot AM$; $DQ = MD - MQ = k \cdot AM - \frac{AM}{2} = \frac{2k-1}{2} AM$; $\frac{DQ}{DM} = \frac{2k-1}{2k}$, astfel că relația (5) devine $QT = \frac{2k-1}{2k} BM$ (6) Pentru ca AP, BD și CQ să fie concurente trebuie ca $QS = QT$ (7). Înlocuim pe QS și QT din (7) cu valorile lor din (4) și (6) și avem : $\frac{3k \cdot BM}{2(2k+1)} = \frac{2k-1}{2k} BM$ sau : $\frac{3k}{2k+1} = \frac{2k-1}{k}$ sau : $3k^2 = 4k^2 - 1$ de unde $k^2 = 1$ și $k = \pm 1$. Are sens soluția $k = 1$.

În acest caz triunghiul ABD este isoscel. P fiind la intersecția medianelor BM și OD, rezultă că și AP este mediană în triunghiul ABD

și ca atare taie latura BD în mijlocul său S. Pe de altă parte, Q fiind mijlocul lui MD și având $BM \parallel CQ$ rezultă că CQ taie BD tot în mijlocul său, adică în S.

Unind O cu S avem $OS \parallel AD$ și cum AD și CQ sînt perpendiculare rezultă că $\sphericalangle OSC$ este drept pentru orice poziție a punctului M pe cerc (diferite de A și B). S descrie cercul de diametru OC adică un cerc egal cu cercul dat.

Problema 6348

Se dă un patrulater oarecare $ABCD$ și un punct M mobil pe dreapta AC. Fie N, P, Q, R proiecțiile punctului M respectiv pe dreptele AB, BC, CD, DA. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor NR și PQ.

P. Liviu, profesor Pucioasa

Soluția autorului. — Demonstrăm mai întîi, următoarea propoziție Locul geometric al intersecției a două drepte care se deplasează uniform paralel cu ele însele este o dreaptă.

Fie D_0 și Δ_0 poziția celor două drepte la momentul $t_0 = 0$ și M_0 intersecția lor, iar D și Δ poziția celor două drepte la un moment oarecare t și M intersecția lor (fig. 1). Notăm cu N și P proiecțiile punctului M pe dreptele D_0 și Δ_0. În patrulaterul inscriptibil M_0NMP avem $\sphericalangle NMP = 180° - \sphericalangle NM_0P =$ constant, iar $\frac{MN}{MP} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2} =$ const, unde v_1 și v_2 sînt vitezele dreptelor D și Δ în mișcarea lor de translație. Din ultimele relații rezultă că triunghiul NMP rămîne mereu asemenea cu el însuși deci $\sphericalangle MPN =$ const. În patrulaterul inscriptibil M_0NMP avem $\sphericalangle NM_0M = \sphericalangle NPM =$ const., deci locul lui M este o dreaptă.

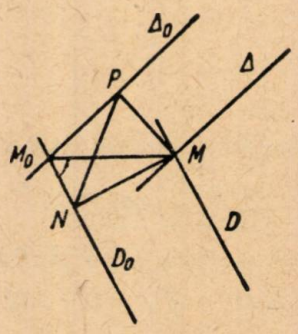


Fig. 1

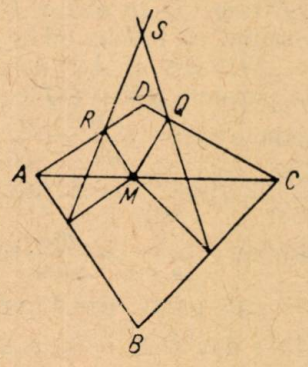


Fig. 2.

Presupunînd acum, că punctul M din enunțul problemei se deplasează uniform pe dreapta AC vom arăta că dreptele NR și PQ se deplasează uniform, paralel cu ele însele (fig. 2).

Într-adevăr, dreapta NR se deplasează paralel cu ea însăși, deoarece în patrulaterul inscriptibil $ANMR$, $\sphericalangle ANR = \sphericalangle AMR = 90° - \sphericalangle MAR =$ = const. Pe de altă parte, la intervale de timp egale dreapta MN ia poziții de paralele echidistante (deoarece determină pe secanta AC segmente

egale) care vor determina pe dreapta AB segmente egale. Rezultă că dreapta NR se deplasează uniform paralel cu ea însăşi. Acelaşi lucru se poate arăta despre dreapta PQ. Rezultă deci, conform propoziţiei de mai sus că locul geometric al intersecţiei dreptelor NR şi PQ este o dreaptă Se mai poate arăta că $\sphericalangle NSP = \sphericalangle D - \sphericalangle B$, deci, dacă $\sphericalangle D = \sphericalangle B$ dreptele NR şi PQ sînt paralele.

Problema 6351

Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi un punct O în spaţiu. Să se stabilească relaţia între ariile din spaţiu:

$$S^2_{ABCD} + 4(S^2_{AOC} + S^2_{DOB}) = 4(S^2_{AOD} + S^2_{AOB} + S^2_{BOC} + S^2_{COD}).$$

(Matematika v skole, Moscova 1964)

Soluţie dată de *Voiculescu Dan*, cl. VIII s.m. 21 Bucureşti. — Să notăm cu M centrul paralelogramului $ABCD$. Se formează patru tetraedre $OMAB$; $OMBC$; $OMCD$; $OMDA$. Să considerăm tetraedrul $OMAB$ şi să notăm cu α unghiul diedru al feţelor OMA şi OMB, iar cu β unghiul diedru al feţelor OAB şi MAB.

Conform unei formule cunoscute (v. de ex. articolul „Tetraedrul" de Gh. D. Simionescu, G.M.F. — B 5/1959),

$$S^2_{OMA} + S^2_{OMB} - 2S_{OMA}\cdot S_{OMB}\cos\alpha = S^2_{OAB} + S^2_{MAB} - 2S_{OAB}\cdot S_{MAB}\cos\beta \quad (1)$$

Scriem şi relaţiile analoge pentru tetraedrele $OMBC$; $OMCD$; $OMDA$ şi adunăm. Observăm în primul rînd că $S_{MAB}=S_{MBC}=S_{MCD}=S_{MDA}$; $S_{OMB} = S_{OMD}$; $S_{OMC} = S_{OMA}$. Deducem că suma produselor de tipul $S_{OAB}\cdot S_{MAB}\cos\beta$ este egală cu produsul dintre valoarea comună a ariilor S_{MAB}, S_{MBC}, S_{MCD}, S_{MDA} şi aria paralelogramului $ABCD$, deoarece $S_{OAB}\cos\beta$ este tocmai proiecţia ariei S_{OAB} pe planul lui $ABCD$. Dar valoarea comună a ariilor S_{MAB}, S_{MBC}, S_{MCD}, S_{MDA} este $\frac{1}{4}\,S_{ABCD}$.

Deoarece unghiurile diedre ale căror cosinuşi înmulţiţi cu produsele $2S_{OMA}\cdot S_{OMB}$ şi $2S_{OMB}\cdot S_{OMC}$ sînt suplementare şi $S_{OMA} = S_{OMC}$ rezultă că produsul analog lui $S_{OMA}\cdot S_{OMB}\cos\alpha$ în teraedrul $OMBC$ este de semn contrar cu $S_{OMA}\cdot S_{OMB}\cos\alpha$. Pe baza acestor considerente se vede că din sumarea relaţiilor analoge lui (1) va rezulta:

$$2(S^2_{OMA} + S^2_{OMB} + S^2_{OMC} + S^2_{OMD}) = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCD} + S^2_{ODA} +$$

$$+ 4\cdot\left(\frac{S_{ABOD}}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{S_{ABCD}}{4}\right)\cdot S_{ABCD}.$$

Dar $S_{OMA} = S_{OMC} = \frac{1}{4}S_{OAC}$ etc, deci,

$$S^2_{OAC} + S^2_{OBD} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCD} + S^2_{ODA} - \frac{1}{4}S^2_{ABCD}.$$

Înmulţind cu 4 această relaţie şi trecînd pe S^2_{BCD} în primul membru obţinem relaţia cerută.

Problema 6353

Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghi avem :

$$\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 2\pi$$

(Matematika v skole)

Soluție dată de *D. Voiculescu*, elev București. — Avem :

$$\Sigma(\sin A + \operatorname{tg} A) = \Sigma\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} + \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}\right) =$$

$$= \Sigma 4 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}} > \Sigma 4 \operatorname{tg}\frac{A}{2} > 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

unde am ținut seama de faptul că $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}} > 1$ și că

$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} > \frac{\pi}{2}$ inegalitatea din urmă bazîndu-se pe faptul

că pentru $0° < \alpha < \frac{\pi}{2}$ avem $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$.

Problema 6355

Considerăm pe un cerc punctul mobil A și punctele fixe B și C astfel încît unul dintre arcele subîntinse de BC măsurat în radiani, să fie inferior lui $\frac{2\pi}{3}$. Notăm cu h_a înălțimea din A a triunghiului ABC, și cu m_b și m_c segmentele de pe mediatoarele lui CA și AB, cuprinse în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că segmentul $\frac{m_b m_c}{h_a}$ este constant și maxim pentru $B \in [A, \pi - 2A]$.

Tudor Zamfirescu, student București

Soluția autorului. — Notăm cu O centrul cercului, cu B' simetricul lui B față de CO și cu C' simetricul lui C față de BO. Evident, dacă A sau $\pi - A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, punctele notate ale cercului se află în ordinea $CB'C'B$ pe el, iar dacă A sau $\pi - A = \frac{\pi}{3}$ atunci $B' \equiv C'$.

a) Dacă A este pe arcul CB', atunci :

$$m_b = \frac{b}{2}\operatorname{tg} A\,;\ m_c = \frac{c}{2}\operatorname{tg} B \text{ deci : } \frac{m_b m_c}{h_a} = \frac{bc}{4h_a}\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B =$$

$$= \frac{a}{4\sin A}\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \text{ sau, punînd } \frac{a}{4\sin A} = k \text{ (constantă)}\,;\ \frac{m_b m_c}{h_a} = k \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B.$$

b) Dacă A este pe arcul $B'C'$, atunci $m_b = \frac{b}{2} \operatorname{tg} A$;

$m_c = \frac{c}{2} \operatorname{tg} A$, deci : $\frac{m_b m_c}{h_a} = k \operatorname{tg}^2 A$.

c) Dacă A este pe arcul $C'B$, atunci $m_b = \frac{b}{2} \operatorname{tg} C$;

$$m_c = \frac{c}{2} \operatorname{tg} A \text{ deci : } \frac{m_b m_c}{h_a} = k \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C.$$

d) Dacă A este pe arcul BC, atunci $m_b = \frac{b}{2} \operatorname{tg} C$;

$$m_c = \frac{c}{2} \operatorname{tg} B \text{ deci : } \frac{m_b m_c}{h_a} = \frac{a}{4 \sin A} \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Unghiul A de la d) fiind suplementar unghiului A corespunzător primelor 3 puncte, putem scrie

$$\frac{a}{4 \sin A} = k, \text{ deci } \frac{m_b m_c}{h_a} = k \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Se constată pe baza valorilor aflate, că în cazul b), $\frac{m_b m_c}{h_a}$ este constantă şi că valoarea corespunzătoare acestui caz este maximă. Cazul b) corespunde intervalului de variaţie pentru B, măsurat în radiani, $[A, \pi - 2A]$.

Problema 6357

Într-un triunghi oarecare ABC se duce bisectoarea AA_1 (A_1 pe BC). Fie P şi Q simetricele punctului A_1 faţă de laturile AB şi respectiv AC. Paralele duse din Q la AB şi P la AC se întîlnesc în N. Să se arate că:

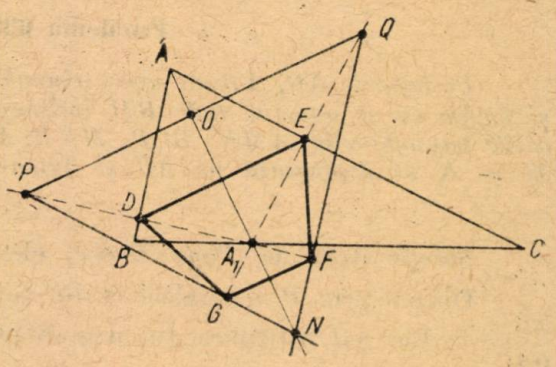
a) *AA_1 este mediatoarea segmentului PQ.*

b) *Notînd cu D şi F punctele unde dreapta PA_1 intersectează respectiv pe AB şi QN, iar cu E şi G punctele unde dreapta QA_1 intersectează respectiv pe AC şi PN, patrulaterul $DEFG$ este trapez isoscel.*

C. Piscali, Craiova

Soluţie dată de *Ralescu Dan*, cl. VIII S. m. 12 Bucureşti

a) Notînd cu O intersecţia dreptelor QP şi AA_1, observăm că triunghiurile PA_1O şi QA_1O sînt egale, avînd A_1O comună, unghiurile PA_1O şi QA_1O egale (au acelaşi complement) şi laturile A_1P şi A_1Q egale (simetricul unui punct de pe bisectoare). Deci unghiurile POA_1 şi QOA_1 sînt egale şi au 90° iar laturile OP şi OQ sînt egale. Rezultă că AA_1 este mediatoarea segmentului PQ.



b) Triunghiul NGF are două înălţimi concurente în A_1. Cea de-a treia înălţime trece prin A.

c) DE este linie mijlocie în triunghiul PA_1Q, deci este paralelă cu PQ.

Triunghiul NPQ este isoscel (ON este mediană și înălțime), deci și FG este paralelă cu PQ, deoarece orice antiparalelă într-un triunghi isoscel este paralelă cu baza.

Deci patrulaterul $DEFG$ este trapez.

Deoarece $GF \parallel PQ$ rezultă $NF = NC$ și cum $NQ = NP$, avem $PG = FQ$.

Problema 6379

Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghi oarecare ABC există inegalitatea

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C > 3 + \frac{3n}{2}$$

unde n este un număr natural oarecare.

Matematika v skole, Moscova 1964

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. — Vom demonstra inegalitatea cerută arătînd că $\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \geqslant 3\sqrt{3^n}$ și apoi că $3\,(\sqrt{3})^n > 3 + \frac{3n}{2}$.

Inegalitatea $x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, adevărată pentru x, y, z numere pozitive reale și identitatea ce există într-un triunghi

$$\Pi \operatorname{g} A = \sum \operatorname{tg} A \text{ ne dau :}$$

$$\Pi \operatorname{tg} A = \sum \operatorname{tg} A \geqslant 3\sqrt[3]{\Pi \operatorname{tg} A}, \text{ adică,}$$

$$(\Pi \operatorname{tg} A)^{2/3} \geqslant 3 \text{ sau : } \Pi \operatorname{tg} A \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Tot în baza inegalității $x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$ găsim :

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \geqslant 3\,(\Pi \operatorname{tg} A)^{n/3} \geqslant 3 \cdot (3\sqrt{3})^{n/3} = 3\,(\sqrt{3})^n.$$

$$\text{Dar, } 3\,(\sqrt{3})^n > 3\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geqslant 3\left(1 + \frac{n}{2}\right) = 3 + \frac{3n}{2}$$

unde am ținut seamă de formula binomului lui Newton.

Problema 6382

Pe laturile AC, AB ale unui triunghi ABC luăm două puncte M, N și notăm cu P punctul unde BM întîlnește pe CN, iar cu S_1, S_2, S_3, S ariile triunghiurilor AMN, BCP, MNP, ABC. Să se arate că atunci cînd M și N se deplasează pe AC și AB, avem $S_1S_2 = SS_3$.

G. G. Niculescu, student București

Soluție dată de *Popa Eugen*, elev Iași.

Ducem prin P o paralelă la BC care taie pe AB în Q. Să notăm $\frac{AQ}{QB} = k$. Fie AH înălțimea din A și E punctul unde taie pe PQ. Avem

evident $\frac{AH - HE}{HE} = k$, de unde $HE = \frac{AH}{k+1}$. Dar HE este egală cu înălțimea triunghiului PBC, deci $S_2 = \frac{AH \cdot BC}{2(k+1)}$. Dar $\frac{AH \cdot BC}{2} = S$, deci $S_2 = \frac{S}{k+1}$ și relația de demonstrat devine: $S_1 = (k+1)S_3$. Această relație se află demonstrată cu alte notații, în G.M. — B nr. 2/1964, pag. 64 în nota „Asupra problemei 5483". Deci relația cerută este stabilită.

Problema 6398

Să se rezolve ecuația:

$$a_1(a_2(a_3(\cdots(a_{n-1}x + b)_{n-1} + b)_{n-2} + \cdots + b)_1 = c$$

și să se demonstreze că dacă $c = 1$ *și* $a = \frac{1}{b+1}$ *soluția nu depinde de numărul parantezelor. Aplicație* $c = 1$, $b = 1963$ $a = \frac{1}{1964}$

Aurel Tuțescu, Craiova

Soluție dată de *Popa Eugen*, elev Iași, și *Bîscă Octavian*, Craiova

Împărțim ambii membri prin a și scădem b:

$$a_2(a_3(\cdots(ax + b)_{n-1} + b)_{n-2} + \cdots + b)_1 = \frac{c - ab}{a}$$

Repetînd această operație de încă n-2 ori obținem:

$$ax + b = \frac{c - ab - a^2 b \ldots a^{n-2} b}{a^{n-1}}$$

de unde:

$$x = \frac{c - ab - a^2 b \ldots a^{n-1} b}{a^n} = \frac{c - \frac{ab(a^{n-1} - 1)}{a - 1}}{a^n}.$$

Să arătăm că dacă înlocuim $c = 1$ și $a = \frac{1}{b+1}$, x nu mai depinde de n:

$$x = \frac{1 - \frac{\frac{1}{b+1} \cdot b\left(\frac{1}{(b+1)^{n-1}} - 1\right)}{-b}}{\frac{1}{(b+1)^n}} = \frac{1 - \frac{(b+1)^{n-1} - 1}{(b+1)^{n-1}}}{\frac{1}{(b+1)^n}} = b + 1.$$

Deci în acest caz x nu mai depinde de n. Cazul numeric satisface condiției, deoarece $c = 1$, și $a = \frac{1}{1963 + 1}$ deci îl calculăm pe x după formula: $x = b + 1$. Se obține $x = 1964$.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Olimpiada de matematică 1965 — centrul București. Etapa locală
Clasa a IX-a

6840. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu unghiurile drepte în A și B. Diagonalele AC și BD se intersectează în O. Paralela dusă prin O la baze taie laturile AB și CD respectiv în E și F.

a) Să se demonstreze că $\frac{FC}{FD} = \frac{EC}{ED}$.

b) Perpendiculara dusă pe BC, prin mijlocul său P, intersectează diagonalele AC și BD respectiv în M și N, iar perpendiculara dusă din O și BC intersectează pe BC în H. Să se arate că:

$$\frac{1}{PN} + \frac{1}{PM} = \frac{2}{OH}.$$

c) Să se demonstreze că dreapta RP trece prin O, R fiind punctul de intersecție al laturilor AB și CD.

Nicolae Bebea, profesor Tîrgoviște

6841. Se dă ecuația:

$$(m^2-m)\ x^3 + (3m^2-3m+1)\ (x-x^2) + m\ (1-m) = 0$$

unde m este un parametru real diferit de 0 și 1. Se cere:

a) Să se rezolve și să se arate apoi, că rădăcinile ei sînt în progresie geometrică.

b) Să se afle valoarea numerică a lui m, pentru care două din rădăcinile ecuației date sînt exprimate prin același număr. Care este în acest caz ecuația și care sînt rădăcinile ei ?

c) Scriind cele trei rădăcini de la punctul a), în ordinea din progresia geometrică, să se determine cel mai mic număr întreg și pozitiv q, care adunat la prima și ultima rădăcină să dea trei numere diferite, în progresie aritmetică. Se va ține seama că m este un parametru real.

Lucian Mănescu, prof. emerit R. Vîlcea

Clasa a X-a

6842. Fie S_n următoarea sumă, unde n este număr natural:

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$$

și să se demonstreze că $S < 2n^4$ a) pe cale directă, b) pe cale indirectă.

Emil Isac, profesor Tg. Jiu

6843. Se dă expresia:

$$E = a(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \sin x \cos x + b \sin^2 x \cos^2 x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}^2 x) + \\ + (c-2) \sin^4 x \cos^4 x (\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) + 2 (\sin^6 x + \cos^6 x).$$

Pentru ce valori ale lui a, b, c expresia nu depinde de x

Ilie Ionescu, profesor Pitești

6844. În vîrful B al triunghiului dreptunghic ABC, $(A = 90°)$ se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se ia un punct M. Se cere:

a) Să se arate că planul MAB este perpendicular pe planul MAC;

b) Dacă P și Q sînt proiecțiile ortogonale ale lui B pe MA și MC, să se arate că MC este perpendiculară pe planul BPQ;

c) Să se arate că dreapta PQ intersectează pe AC într-un punct fix, oricare ar fi poziția punctului M pe normala în B la planul ABC.

Miron Oprea, profesor Ploiești

Clasa a XI-a

6845. În raport cu două axe perpendiculare se consideră punctul fix $A\ (0, a)$ și punctele variabile $P\ (\alpha, 0)$ și $Q\ (\beta, 0)$, care se deplasează pe axa Ox, astfel încît $OP \cdot OQ = OA^2$.

a) Să se arate că bisectoarele unghiului A, din triunghiul APQ rămîn fixe atunci cînd P și Q variază.

b) Fie PP_1 și QQ_1 înălțimile vîrfurilor P și Q în triunghiul APQ. Să se arate că dreapta P_1Q_1 se deplasează rămînînd paralelă cu ea însăși.

c) Perpendiculara ridicată în P pe AP și perpendiculara ridicată în Q pe AQ se intersectează în M. Să se arate că locul geometric al lui M este format din trei drepte.

Emil Mortun, profesor emerit Pitești

6846. A) Se consideră șirul cu termenul general:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

a) Să se arate că șirul este descrescător; b) Să se calculeze limita șirului.

B) Se consideră funcția $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

a) Să se stabilească domeniul maxim pe care poate fi definită; b) Să se calculeze limita funcției în $f(x)$, în punctul O și să se deducă limita funcției $f(x)$ în punctul O.

* * *

Școli profesionale — anul I

6847 a) Să se efectueze:

$$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2} + \dfrac{1-x^2}{1-x^3}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2} - \dfrac{1-x^2}{1+x^3}}.$$

b) Să se verifice rezultatul pentru $x = -\frac{1}{2}$.

Grupul școlar auto, București

Școli profesionale — anul II

6848. Să se verifice identitatea:

$$\frac{a^3 - a^2b}{-a^2 - b^2 + 2ab} + \frac{ab^3 - ab^2}{(b^2 - a^2)(1 - b)} + \frac{a^2b - b^2a}{a^2 - b^2} = \frac{a^3b^2 + a^5}{b^4 - a^4}.$$

Tache Ștefan, profesor Cîmpina

6849. Să se afle aria triunghiului cu laturile de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$.

Grupul școlar Petrol-chimie, București

Școli tehnice de maiștri — anul I

6850. Se dă fracția:

$$F = \frac{4x^2 - 4x + 4xy - 2y + y^2 + 1}{4x^2 - 1 + 2y - y^2}.$$

a) Se cere să se simplifice fracția; b) Să se afle valoarea numerică a rezultatului pentru $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ și $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tache Ștefan, profesor Cîmpina

6851. Se dă triunghiul ABC și se notează cu O centrul cercului circumscris. Se duce diametrul AD și perpendiculara din B pe acest diametru, care intersectează pe AC în punctul E. Se cere:

a) Să se arate că $AB^2 = AC \cdot AE$; b) Să se calculeze segmentul DE cunoscînd laturile $AC = b$, $AB = c$ și raza cercului circum scris, R.

* * *

6852. Folosind definițiile funcțiilor trigonometrice, să se arate că în orice triunghi dreptunghic există relațiile:

a) $\operatorname{tg}^2 B + \cos^2 B = \operatorname{tg}^2 B \sin^2 B + 1$;

b) $\operatorname{ctg} B = \cos^2 B (\operatorname{tg} B + \operatorname{ctg} B)$.

Tache Ștefan, profesor Cîmpina

Școli tehnice de maiștri, anul II

6853. Se dă un con cu raza bazei de l cm și generatoarea egală cu diametrul cercului de bază. În acest con este înscrisă o emisferă tangentă la con, cu baza situată în planul bazei conului. Se cere:

a) Să se calculeze raza emisferei; b) Să se calculeze raza cercului de tangență dintre sferă și con; c) Să se afle raportul ariilor în care cercul de tangență împarte aria laterală a conului; d) Să se afle raportul ariilor, în care cercul de tangență împarte emisfera.

* * *

6854. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

* * *

Olimpiada de matematică 1965, Etapa locală — Centrul Timișoara

Clasa a IX-a

6855. Între termenii unei progresii geometrice avem relațiile: $32 (a_2 + a_7) = 825$ și $8 (a_4 + a_5) = 135$.

a) Să se afle primul termen a_1 și rația q; b) Știind că se obțin două progresii, să se afle cîți termeni trebuie să aibă progresia cu rația supra unitară pentru ca suma termenilor săi să fie 2059/32.

I. Gligor și *A. Baader*, Timișoara

6856. Fie O_1 și O_2 centrele a două cercuri secante în A și B. Tangenta în A la O_2 taie cercul O_1 în P, iar tangenta în A la O_1 taie cercul O_2 în Q.

a) Să se stabilească relația: $AP^2 \cdot BQ = AQ^2 \cdot BP$; b) Dreptele BQ și BP taie cercurile O_1 și O_2 respectiv în M și N. Să se arate că $PN = QM$ și $AP \parallel NQ$, iar $AQ \parallel MP$.

M. Haivas, Timișoara

Clasa a X-a

6857. Se dă polinomul: $P(x) = (b - a)x^n + 2^n a - b$.

a) Știind că $a = 1$, să se găsească valoarea lui b pentru care polinomul dat se divide cu $2 - x$ și să se afle în acest caz, cîtul; b) Pentru ce valori ale lui a și b, restul împărțirii polinomului $P(x)$, prin $x^2 - 3x + 2$ este egal cu $(2^n - 1)x$.

M. Haivas și *N. Negoescu*, Timișoara

6858. Se consideră triedrul tridreptunghic $Oxyz$, două puncte fixe B și C pe Ox, Oy respectiv, astfel ca $OB = b$ și $OC = c$ și un punct A mobil pe Oz. Fie P piciorul perpendicularei duse din O pe planul triunghiului ABC.

a) Să se afle locul geometric al punctului P; b) Fie M și N mijloacele laturilor AB și AC. Să se arate că perpendiculara în M pe planul xOz și perpendiculara în N pe planul yoz sînt concurente și să se afle locul geometric al punctului lor de intersecție.

I. Popescu, Lugoj

6859. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E = \left(\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} - \sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} + \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} - \sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}\right)^2.$$

M. Lupuțiu, Vești

Clasa a XI-a

6860. Pe segmentul de dreaptă AB se ia un punct variabil M și de aceiași parte a segmentului se construiesc patratele $AMNQ$ și $MBTS$.

a) Să se arate că dreapta QT trece printr-un punct fix ;

b) Dreptele AT, BQ și MN sînt concurente. Fie P punctul de concurență ;

c) Dreapta SQ intersectează dreapta AB în L. Să se arate că punctele L, N, T sînt coliniare.

I. Loziciu, Timișoara

6861. Se dă șirul :

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

a) Să se arate că șirul (a_n) este strict descrescător și mărginit și să se afle limita șirului ; b) să se afle limita șirului :

$$b_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n .$$

I. Popescu, Lugoj

Școli profesionale — anul I

6862. Se dau expresiile :

$$A = \frac{12x^2 - 12xy + 3y^2}{6xy :} : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2x}\right),$$

$$B = \frac{7x^2 - 3x(x-2y) - (2xy - y^2)}{2x + y}.$$

a) Se cere să se aducă expresia A la forma cea mai simplă ; b) Să se aducă expresia B la forma cea mai simplă ; c) Să se calculeze $A.B$.

M. Maghiaru și *E. Wiener*, Timișoara

6863. Dintr-o bucată de tablă în formă de semicerc, cu diametrul de 20 cm, se taie o piesă în formă de trapez, care să aibă ca bază mare diametrul și ca bază mică o coardă paralelă cu diametrul.

a) Știind că baza mică este egală cu înălțimea, să se găsească lungimile celor două laturi neparalele ale trapezului ; b) Presupunînd că grosimea plăcii este peste tot aceiași, să se găsească cît la sută din material se pierde la confecționarea piesei.

P. Drăgilă, Timișoara

6864. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}.$$

E. Wiener și *M. Maghiaru*, Timișoara

Școli tehnice de maiștri — anul I

6865. Să se efectueze calculele:

$$E = \frac{\left(\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}} \cdot \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}{(\sqrt[6]{a^5})^5} : \frac{\sqrt{\sqrt[4]{a^3}}}{(\sqrt[3]{a^2})^5}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}}}}.$$

6866. Dintr-un observator înalt de 255/7 m situat la 3855/7 m de o lizieră de salcîmi, se observă terenul din jur. Ce distanță de la marginea lizierei este ascunsă vederii observatorului, dacă liziera formează o perdea de 63/7 m înălțime?

Școli pedagogice, anul I

6867. Să se simplifice fracția:

$$\frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{c^3(a-b) + a^3(b-c) + b^3(c-a)}.$$

* * *

6868. În triunghiul oarecare ABC se prelungește latura BC cu segmentele BM și CN, astfel ca $BM = BA$ și $CN = CA$. Se cere:

a) Să se calculeze unghiul MAN în funcție de unghiurile B și C; b) Aplicație numerică: unghiul $B = 54°52'34'''$ și $C = 48°27'8''$.

Școli pedagogice, anul II

6869. Aria unui dreptunghi este S, iar diagonala d.

a) Se cer dimensiunile dreptunghiului. b) Aplicație numerică: $S = 12$ m^2, $d = 5$m. c) Din aplicația numerică, latura mai scurtă reprezintă primul termen, latura mai lungă numărul termenilor, iar diagonala rația unei progresii aritmetice. Să se afle ultimul termen și suma acestei progresii aritmetice.

6870. Se dă un triunghi oarecare ABC.

a) Prin I, intersecția bisectoarelor unghiurilor din C și B se duce paralela DIE la BC. Să se arate că avem relația $DE = BD + CE$;

b) Se duce înălțimea AF și se iau mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor BC, AC, AB. Să se arate că patrulaterul $A_1B_1C_1F_1$ este un trapez isoscel.

Olimpiada de matematică, 1965. Etapa locală. Centrul Cluj
Clasa a IX-a

6871. Fiind dată ecuația: $m(x^3 - x^2 + x - 1) = 5x(x - 1)$:

a) Să se rezolve această ecuație;

b) Fie x_2 rădăcina care nu depinde de m, a acestei ecuații, iar x_1 cea mai mică dintre celelalte două rădăcini (cînd $m > 0$). Știind că $x_1 : x_2 + \frac{1}{4} : x_3$ sînt trei numere în progresie aritmetică, să se afle numărul termenilor progresii geometrice, în care suma termenilor este egală cu 31 : 4 din prima rădăcină a ecuației date, ultimul termen este $\frac{2}{3}$ din rădăcina a doua, iar primul termen este egal cu cea de-a treia rădăcină.

c) Să se descompună în factori expresia conținută sub radicalii rădăcinilor și să se afle apoi mulțimea tuturor valorilor reale ale lui m, pentru care x_1 și x_3 sînt numere reale.

I. Bal, Cluj

6872. Într-un triunghi ABC se consideră mediana AD, bisectoarele unghiurilor ADB și ADC taie respectiv AB și AC în M și N.

a) Să se arate că MN și BC sînt paralele;

b) că are loc relația $\frac{1}{MN} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{2AD}$

c) să se construiască triunghiul ABC cunoscînd latura BC, raportul $AB/AC = k$ și mediana AD.

Clasa a X-a

6873. Fie: $S_1 = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$.

a) Să se demonstreze că $S_1 = \frac{2n-1}{n}$;

b) Cunoscînd valoarea sumei S_1, să se găsească suma:

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot p} + \frac{1}{p\cdot 2p} + \frac{1}{2p\cdot 3p} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,p\cdot np};$$

c) Să se deducă inegalitățile: $0 < S_2 < 1 < S_1 < 2$, pentru orice $n > 1$ și $p > 0$.

Nicolae Roșca, Brașov

6874. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = a$. Prin vîrful A și în afara planului pătratului se duce semidreapta Ax, care face cu AB și AD două unghiuri de cîte 60°.

a) Să se determine lungimea segmentului AS de pe dreapta Ax astfel ca triunghiul BSD să fie dreptunghic în S.

b) Un punct M se deplasează pe axa Ax și se notează cu N și P mijloacele segmentelor MB, respectiv MD. Să se determine locul geometric al segmentelor NP cînd M descrie semiaxa Ax.

Margareta Boer, Cluj

Clasa a XI-a

6875. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$s_n = \frac{a^{n-1} - 2b^{n-1}}{a^{n+1} + 2n^{n+1}},$$

unde a și b sînt numere reale cu $ab > 0$.

Margareta Boer, Cluj

6876. a) Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 3x}$$

b) Să se stabilească domeniul de existență a funcției

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x}}.$$

6877. Se dă un triunghi dreptunghic ABC (cu $A = 90°$) și două puncte fixe E și F pe bisectoarea unghiului A. Fie M și N punctele în care dreptele care unesc punctele E și F cu un punct variabil D de pe dreapta BC întîlnesc respectiv laturile AB și AC ale triunghiului ABC. Să se arate că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Școli pedagogice — anul I și cl. VIII serală

6878. Fie M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC; D și E simetricele lui M față de AB și AC. Să se arate că:

a) triunghiul ADF este isoscel ; b) $DE < AB + AC$; c) Să se determine poziţia punctului M pe latura BC, astfel ca triunghiul DME să fie isoscel.

6879. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$\frac{x}{ax - 2a^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a}\left(1 + \frac{3x + x^2}{3 + x}\right).$$

Şcoli profesionale — anul I

6880. Un acoperiş de tablă cu patru pante este format din două trapeze isoscele şi două triunghiuri isoscele. Acest acoperiş are dimensiunile : lăţimea 8 m, lungimea 20 m, înălţimea coamei (crestei) 3 m şi lungimea coamei 12 m.

a) Care este suprafaţa acoperişului b) Cîte bucăţi de tablă sînt necesare, dacă tabla are lungimea de 90 cm, lăţimea 70 cm. Nu se va ţine seama de pierderile de tablă care intervin în construirea acoperişului.

6881. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E = \left(\frac{x^2 - y^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{a^2 - b^2}{xy - y^2)}\right) : \left[\frac{a - b}{a}(x - y)\right].$$

Şcoli profesionale — anul II

6882. Un rezervor cilindric din metal are diametrul de 17 m şi înălţimea (generatoarea) de 2 m. Pentru consolidarea lui se montează în interior, o ramă din fier colţar. Rama se aşează înclinată faţă de baza cilindrului în aşa fel încît are forma unui patrat.

a) Să se calculeze latura acestui pătrat ; b) Să se găsească unghiul pe care îl face această ramă faţă de generatoarea cilindrului.

I. Şerban, Cluj

6883. Un atelier trebuie să confecţioneze 810 costume, iar un alt atelier trebuie să confecţioneze, în acelaşi interval de timp, 900 costume. Primul atelier a terminat comanda cu 3 zile mai devreme, iar al doilea cu 6 zile mai devreme decît termenul prevăzut. Să se determine cîte costume a confecţionat pe zi fiecare din cele două ateliere, dacă cel de-al doilea atelier a confecţionat cu cîte 4 costume, mai mult decît primul, în fiecare zi.

* * *

Şcoli tehnice de maiştri — anul I

6884. Fiind dată ecuaţia : $(m + 10)x^2 + 2\ (m-2)x + 6 = 0$:

a) Să se stabilească valorile parametrului m pentru care rădăcinile ecuaţiei sînt reale.

b) Să se afle valorile lui m pentru care rădăcinile ecuaţiei sînt egale şi de semne contrare.

c) Să se afle valorile parametrului m pentru care $\frac{1}{x_2^1} + \frac{1}{x_2^2} = 2$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

Şcoli tehnice de maiştri — anul II

6885. Un coş de moară de forma unui trunchi de piramidă regulată pătratică, care se continuă cu o prismă patratică a cărei bază este egală cu baza mică a trunchiului de piramidă, se construeşte din tablă. Se ştie că diagonala bazei mari este de 180 cm, iar diagonala bazei mici de 72 cm, înălţimea întregului coş fiind 160 cm.

a) Să se calculeze volumul acestui coş, ştiind că raportul dintre volumul trunchiului de piramidă şi cel al prismei de la baza trunchiului de piramidă este 8.

b) Să se calculeze cantitatea de tablă necesară pentru construcţia acestui coş.

6886. Să se calculeze :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

PROBLEME PROPUSE *

6887. Un triunghi ABC înscris într-un cerc de rază 4 cm are latura $AB = 4\sqrt{2}$ cm; $AC = 4\sqrt{3}$ cm și se cere: a) Să se afle unghiurile triunghiului; b) Să se calculeze lungimile tangentelor AP, BR, CT limitate la laturile triunghiului; c) Aria triunghiului.

Victor Marian, profesor Cluj

6888. Se dă ecuația: $x^2-(2m+1)x+5m-3=0$ cu rădăcinile x_1 și x_2 și se cere: să se calculeze expresia:

$$E(m) = x_1^3 + x_2^3 - 2m(x_1^2 + x_2^2) + m(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 10,$$

în funcție de m, fără a rezolva ecuația dată și să se arate că $E(m) < 0$, oricare ar fi m real.

Ioan Gligor, Timișoara

6889. Fie AA_1 bisectoarea din vîrful A a triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiului AA_1B și AA_1C intersectează pe AB și AC din nou în M și N. Să se arate că BM este egal cu CN.

* * *

6890. Notînd cu M și N intersecțiile unei drepte variabile (Δ) paralelă la diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ cu laturile AD, AB și cu M_0 și N_0 intersecțiile (NC, AD) și (MC, AB), să se arate că:

$$BN_0 \cdot BN + DM_0 \cdot DM = AB^2 + AD^2.$$

N. Păun, profesor Rm. Vîlcea

6891. Fie O un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, situat între B și C, iar A', B', C' trei puncte arbitrare respectiv pe dreptele OA, OB, OC. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca punctele A', B', C' să fie colineare este ca:

$$\frac{BC}{OA'} = \frac{CA}{OB'} + \frac{AB}{OC'}.$$

Generalizare în cazul cînd punctul O nu este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Ion I. Cristea

6892. Să se afle restul împărțirii $(a^b + b^a)$ prin produsul $a \cdot b$, unde a și b sînt două numere naturale consecutive $a < b$.

Emilian Semenescu, Baia de Aramă

6893. Dacă $n > 4$, atunci are loc inegalitatea:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Dan Voiculescu, elev București

---

* IX (6887–6891), X (6892–6902), XI (6903–6911), S (6912–6919), unde S indică probleme alese de perspicacitate pentru a fi în atenția rezolvitorilor. Soluțiile se primesc pînă la 30 august 1965.

6894. Să se demonstreze egalitatea:

$$1-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n+1)},$$

n fiind număr natural.

Aristide Leonte, Craiova

6895. Să se arate că dacă $10^\circ \leqslant x \leqslant 15^\circ$,

$$-1 \leqslant \sin(12x-60^\circ)\cos(12x+30^\circ) \leqslant -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \sin(18x+45^\circ)\cos(18x-45^\circ) \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin(18x-45^\circ)\cos(18x+45^\circ) \leqslant 0.$$

C. Ionescu – Țiu

6896. Se consideră ecuația:

$$x^2\sin\alpha+2x\cos\alpha+\sin\alpha=0$$

α fiind un parametru real.

a) Să se discute natura și semnele rădăcinilor; b) Să se stabilească ce valori ale parametrului satisfac relația

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=10$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

Aristide Leonte, Craiova

6897. Să se arate că:

$$\left[\frac{C_k^1+C_{2k}^2+\ldots+C_{nk}^n}{C_{k-1}^1+C_{2k-1}^2+\ldots+C_{nk-1}^n}\right]^n=\frac{C_k^1\cdot C_{2k}^2\cdot\ \ldots\ \cdot C_{nk}^n}{C_{k-1}^1\cdot C_{2k-1}^2\cdot\ \ldots\ \cdot C_{nk-1}^n}=\left(\frac{k}{k-1}\right)^n$$

$(k<1)$. Generalizarea problemei 3797.

* * *

6898. Se consideră un triunghi ABC în care unghiurile B și C satisfac relația $C-B=\pi/2$ (triunghi pseudodreptunghic). Să se demonstreze că înălțimea coborîtă din A pe BC este medie proporțională între segmentele pe care le determină pe latura BC. Dacă vîrfurile B și C rămîn fixe, iar unghiul B variază, să se arate că tangenta în A la cercul ABC păstrează aceiași direcție cînd A este mobil.

Corneliu N. Popescu, București

6899. Să se arate că:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^n}=3.$$

Gh. Mincinopski, student I.P.B.

6900. Se secţionează o piramidă triunghiulară oarecare $VABC$ cu un plan paralel cu faţa ABC, care taie muchiile în a, ,g c. Se proiectează a, b, c pe planul ABC în a', b', c'. Fie $A'(Bc' \cap Cb')$, B' $(Ca' \cap Ac')$ şi C' $(Ab' \cap Ba')$. Să se arate că perechile de triunghiuri $(ABC;\ a'b'c')$, $(ABC;\ A'B'C')$; $(A'B'C';\ a'b'c')$ sînt secţiuni paralele în trei piramide ale căror vîrfuri sînt pe aceiaşi dreaptă.

M. I. Focşeneanu

6901. Se dă un con de rotaţie avînd raza cercului de bază r şi înălţimea h Se aşează pe planul bazei acestui con şase sfere egale, înconjurîndu-l prin exterior, tangente între ele şi tangente conului. Să se calculeze raza acestor sfere în funcţie de r şi h, precum şi distanţa de la vîrful conului la planul centrelor sferelor.

Adrian Gheorghiu, Bucureşti

6902. Să se demonstreze că rezistenţa totală a n rezistenţe legate în serie este cel puţin de n^2 ori mai mare decît rezistenţa echivalentă a celor n rezistenţe legate în paralel.

Hărăguş Ştefan elev Lugoj

6903. Se dă un cerc O şi un punct F în planul său. Se ia un punct fix A pe cerc, iar prin F se duce o secantă variabilă care taie cercul în B şi C. Se cere locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

N. Petrescu, profesor Piteşti

6904. Dacă F' şi F sînt focarele elipsei (E) să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor înscrise în triunghiurile $F'FM$, M fiind un punct mobil pe (E).

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

6905. Să se reprezinte grafic :

$$y = \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x}.$$

C. Herling, student Bucureşti

6906. Să se arate că pentru orice număr natural k şi pentru orice n numere reale strict pozitive $a_1, \ldots, a_n$ care verifică relaţia $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, avem inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2^{-k}} \geqslant n^{2^{-k}} + 1.$$

Toma Albu şi *Tudor Zamfirescu*, Bucureşti

6907. Se dă triunghiul ABC. Fie P un punct în afara laturilor triunghiului dat. Se consideră fascicolul armonic $(BA,\ BC,\ BP,\ Bx)$ şi $(CA,\ CB,\ CP,\ Cy)$.

a) Dreapta AP taie BC în I; Bx taie AP în Q. Ce se poate spune despre punctele A, I. P, Q?

b) Să se arate că dreptele By, Cy şi AP sînt concurente.

Bacalaureat, Istanbul, iunie 1964

6908. a) Fiind dat într-un plan, un pol de inversiune I, un cerc (C) şi un punct A, să se studieze poziţia relativă a lui A_1 şi (C_1), inversele lui A şi (C) într-o inversiune de centru I, după poziţia relativă a lui A, (C) şi I.

b) Fie în plan, două cercuri fixe (C) şi (C') exterioare, (γ) cercurile care ating (C) şi (C') cu contacte de aceiaşi natură, (γ') cercurile care ating (C) şi (C') cu contacte de naturi diferite. Fie S punctul în care se ating cele două cercuri (γ) tangente. Se cere:

1° Mulţimea de puncte S cînd variază cele două cercuri (γ) tangente în S.

2° Să se arate că prin S trec două cercuri (γ') care se taie (şi care taie şi cercurile (γ) tangente în S) sub un unghi constant cînd S variază.

3° Să se arate că într-o inversiune de pol S, cele două cercuri (C'_1) şi (C'_1), inversele lui (C) au raze egale şi dau o figură care rămîne asemenea cu ea însăşi cînd S variază.

4° Puterea inversiunii fiind pozitivă şi aleasă pentru fiecare pol S aşa fel încît razele cercurilor (C_1) şi (C'_1) să aibă o valoare fixă dată r, se cere să se găsească mulţimile, (Ω) şi (Ω') ale centrelor ω şi ω' ale cercurilor (C_1) şi (C'_1) şi să se arate că $\omega\omega'$ trece printr-un punct fix, K.

5° Să se precizeze poziţia mulţimii de puncte S, din (Ω), (Ω') şi K. Să se calculeze lungimea lui $\omega\omega'$, cunoscînd centrele O şi O' şi razele R şi R' ale cercurilor (C) şi (C'), precum şi r.

Bacalaureat matem. şi tehn., Maroc iunie 1964

6909. Să se arate că dacă $ab + bc + ca = 0$, avem:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2,$$

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 2a^2b^2c^2(a + b + c)^2,$$

$$a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5 = -5a^3b^3c^3\ (a + b + c),$$

$$a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 = a^3b^3c^3\ [3abc - 2(a + b + c)^3].$$

C. Ionescu — Ţiu

6910. Fie A un punct fix în planul cercului (O) şi M un punct variabil pe acest cerc. Tangenta în M la cere întîlneşte mediatoarea segmentului AM în N. Din N se duce şi cealaltă tangentă NM' la cerc. Să se găsească locul geometric al mijlocului coardei MM'.

C. N. Tudor, asistent Bucureşti

6911. Să se demonstreze că şirul $\{x_n\}_{n\in N}$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$$

este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [1, 2]$. Generalizare.

Tomescu I. Ion, student Bucureşti

6912. Se dă un unghi zoz'. Fie Ox bisectoarea unghiului şi A, A_1 două puncte situate respectiv pe laturile Oz, Oz' ale unghiului, astfel încît $OA = OA_1$. Se duce dreapta $y'y$ paralelă cu Ox, astfel încît să întîlnească într-un punct O_1, prelungirea semidreptei Oz. Din punctul A_1 se

duce o perpendiculară pe dreapta Ox, pe care se ia în sensul de la Ox către $y'y$, un punct A_2, astfel încît A_1A_2 este egal cu dublul distanței dintre paralelele Ox, $y'y$.

Să se arate că dreptele OA_2, Oz' sînt paralele și că $OA = OA_2$. (A se vedea articolul „Despre unele transformări geometrice", în G.M. B, 5/1965).

C. Ionescu-Bujor

6913. Se dă în planul P o rotație R de centru O și unghi α și simetria S a cărei axă $x'x$ nu conține punctul O. Să se determine rotațiile R_1 de unghi α și centru pe $x'x$ și simetriile S_1, astfel încît $RS = S_1R_1$. (A se vedea articolul „Despre unele transformări geometrice", G.M. B, 5/1965).

C. Ionescu-Bujor

6914. Se dă parabola $y = ax^2 + bx + c$ care taie axa x'x în două puncte A și B. Să se arate că aria S limitată în arcul de parabolă și coarda AB este dată de relația $35a^4 S^2 = (b^2 - 4ac)^3$.

Journal de mathématiques élémentaires, Paris 1965

6915. Se dau două segmente AB și A_1B_1 care n-au nici un punct comun, iar O_1 și O_2 respectiv mijloacele lor. Să se arate că $2O_1O_2 < AA_1 + BB_1$.

Olimpiada matematică, Moscova 1953

6916. Cineva avea bani în bacnote de 3 lei și de 5 lei în total 50 de bacnote. O parte din acești bani i-a cheltuit pentru cumpărarea unor cărți și i-au mai rămas de două ori mai puține bacnote de cîte 3 lei și de 3 ori mai puține bacnote de cîte 5 lei, iar în total i-au rămas astfel, 19 bacnote. Cît au costat cărțile? Soluție aritmetică.

C. d. p.

6917. Enunțul unei probleme a fost modificat înlocuind unele cifre prin x, devenind astfel: S-au amestecat mere de două calități. Merele de o calitate costau xx lei, iar de cealaltă calitate x1 lei. Greutatea totală a amestecului era de x7 kg. Cît a costat un kg de amestec. Reconstituiți textul inițial al problemei.

C. d. p.

6918. Se arată că pentru orice număr întreg există un multiplu al lui care se scrie cu cifrele 1 și 0.

Olimpiada matematică, Kiew, 1955

6919. Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ și $b_1, b_2, \ldots b_n$, numere pozitive date și $x_1, x_2, \ldots x$ — variabile pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k} \right)^2 .$$

(În legătură cu problema 6690)

T. Gh. Oțel Mișacova, Odessa—U.R.S.S.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *

E : **2307**. O cooperativă agricolă de producție a vîndut 123 păsări (găini și pui) încasînd suma de 1 938 lei. Știind că pentru găini s-a încasat 23 lei de bucată, iar pentru pui 12 lei de bucată, să se afle cîte găini și cîți pui a vîndut cooperativa agricolă.

Virgil Ionescu, profesor Botoșani

E : **2308**. În planul editorial pe 1965 s-a prevăzut tipărirea unui număr de 716 tipuri de manuale. Numărul de manuale ce se vor tipări pentru învățămîntul superior întrece cu 14 dublul numărului de manuale pentru învățămîntul profesional și tehnic, iar numărul de manuale pentru învățămîntul de cultură generală întrece cu 23 dublul numărului de manuale pentru învățămîntul superior. Cîte tipuri de manuale sînt prevăzute a se tipări în 1965 pentru fiecare din cele trei forme de învățămînt?

Ștefan Marica, profesor Turnu Severin

E : **2309**. Să se calculeze :

$$\left\{\frac{9513 : 254\,{}^1/_4}{7,(36) : 0,(81)} + \left[\frac{\left(\frac{134}{171}\right) : \frac{1474}{171} + 268 : \frac{134}{11}}{0,3\,(6) + 0,(36) : \frac{36}{33}}\right]\right\} : \frac{154}{5476}.$$

Lidia Năstăsoiu, elevă Brad

E : **2310**. Să se afle numărul divizibil cu 3 și 5, care scris în baza 6 este format din 3 cifre semnificative, iar cifra sutelor este egală cu cifra zecilor.

V. Ionescu, Botoșani

E : **2311**. Se dă împărțirea următoare în care prin x s-au notat cifrele necunoscute :

$$\begin{array}{l|l}
1\,x\,x\,x\,x & x\,x\,7 \\ \cline{2-2}
\underline{x\,x\,x} & x\,4\,x \\
=5\,5\,x & \\
\underline{x\,0\,x} & \\
=x\,8\,x & \\
\underline{x\,x\,1} & \\
x\,x\,2 &
\end{array}$$

Să se reconstituie această împărțire.

N. Manolache, elev București

E : **2312**. Să se afle N din relația :

$$1234_5 + 2345_6 + 3456_7 = N_8$$

unde indicii indică bazele de numerație.

Nicolae Manolache, elev București

---

* V (E : 2307—2310), VI (E : 2311—2314), VII (E : 2315—2318), VIII (E : 2319—2322). Soluțiile se primesc pînă la 30 august 1965.

E : **2313.** Trei robinete pot umple un bazin astfel : primul împreună cu al doilea, în 2 ore și 24 minute ; primul împreună cu al treilea, în 3 ore, iar al doilea împreună cu al treilea, în 4 ore. În cît timp ar putea umple bazinul fiecare robinet în parte ?

Romeo Munteanu, student București

E : **2314.** Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Pe latura AC se iau punctele D și E ca să avem $AD = DE = EC$. Se prelungește BD cu un segment $DF = BD$ și BE cu un segment $BE = EG$. Să se afle a) raportul dintre ariile triunghiurilor BDE și ABC și b) raportul dintre BFG și ABC.

G. V. Nistor, profesor, Buzău

E : **2315.** Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cu perimetrul de 32 cm, iar $AB = 5/6\ BC$. Să se afle :

a) Laturile triunghiului ABC ; b) Raportul dintre lungimea cercului înscris și lungimea cercului circumscris triunghiului ABC ; c) Aria patrulaterului $O'BEC$ (unde O' este centrul cercului înscris, iar AE diametrul cercului circumscris).

G. V. Nistor, profesor Buzău

E : **2316.** În trapezul $ABCD$ se dau : $AB = 16$ cm $AD = 20$ cm, $DC = 9$ cm și înălțimea 12 cm. Să se calculeze latura BC, știind că AB și CD sînt bazele trapezului.

Romeo Munteanu, București

E : **2317.** Fie E și F punctele de intersecție ale perpendicularelor ridicate în mijlocul diagonalelor BD, AC, respectiv cu dreptele BA și CD ale unui dreptunghi $ABCD$, în care $BC = 2{,}5\ AB$. Să se demonstreze că :

a) DE și AF sînt perpendiculare ; b) Fie M mijlocul diagonalelor, iar N punctul de intersecție al perpendicularei MF cu AD și să se demonstreze că $MD^2 = MN \cdot MF$; c) Să se arate că DB este bisectoarea unghiului CDE.

Carpiuc Dumitru, elev Trușești

E : **2318.** O cooperativă a încasat într-o săptămînă o anumită sumă de bani : în prima zi o sumă ; a doua zi cu a lei mai puțin. Dacă a doua zi ar fi încasat cu b lei mai mult, atunci în primele două zile ar fi încasat $1/c$ din total. Știind că suma încasată în toată săptămîna plus suma încasată în prima zi și suma pe care a încasat-o a doua zi fac în total d, să se afle ce sumă a primit cooperativa în prima zi, a doua zi și toată săptămîna.

Aplicație. $a = 1000$; $b = 2\ 000$; $c = 5$, $d = 50\ 000$.

Văleanu Vladimir, elev, București

E : **2319.** Să se aducă expresia la forma cea mai simplă și apoi să se afle valoarea numerică pentru $a = -3\frac{1}{3}$; $b = -4\frac{1}{2}$:

$$E = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{8}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2}} - \sqrt{\frac{a}{3}} : \sqrt{\frac{3}{ab^2}} + \sqrt{\frac{5b}{3a}} \cdot \sqrt{\frac{ab^3}{135}}}{\sqrt{\frac{a^2-7a+12}{a-3}} : \sqrt{\frac{a^2-a-12}{a+3}} \cdot \frac{3a-2b}{36}}.$$

G. V. Nistor, profesor Buzău

E : **2320** ⊀ Să se arate că dacă are loc relația $3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, atunci are loc și relația :

$$\frac{1}{a(b-1)(c-1)} + \frac{1}{b(c-1)(a-1)} + \frac{1}{c(a-1)(b-1)} = 0$$

unde $a, b, c \neq 1$.

Marica Ștefan, Turnu Severin

E : **2321.** Să se calculeze expresia :

$$E = (a-c)\left(a + \frac{bc-ad)}{a-b-c+d}\right) - (b-d)\left(b + \frac{bc-ad}{a-b-c+d}\right)$$

punînd rezultatul sub formă de produs.

I. I. Stamate, Cluj

E : **2322.** Să se arate că dacă $ab + bc + ca = 0$, avem :

$$\frac{a^2b^2}{a+b} = \frac{b^2c^2}{b+c} = \frac{c^2a^2}{c+a},$$

$$\frac{a^2+b^2+ab}{a+b} = \frac{b^2+c^2+bc}{b+c} = \frac{c^2+a^2+ca}{c+a},$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ca}.$$

C. Ionescu-Țiu

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME. EVIDENȚIAȚI

(Urmare la soluții bune primite pînă la 1 ianuarie 1965).

PLOIEȘTI. Șc. 8 ani nr. 12 cl. VIII. Nițu Gabriel (E : 2185, 91—93, 95, 96, 217, 18). Șc. 8 ani nr. 21 cl. VI. Ionescu Sorin (E : 2184, 85, 87, 90—96, 216, 17), Moisescu Dorina (E : 2185, 91—93, 96, 202, 06, 10, 15), Munteanu R. Monica (E : 2185, 91—93, 206, 10, 15, 16), Zielinski Roxana (E : 2185, 90—95, 98, 201, 02, 16, 17). Cl. VIII. Andrei Drina (E : 2185, 92, 96, 98, 210, 11, 15, 17, 18), Antohi Lina (E : 2185, 98, 210, 11, 15, 17, 18), Anton Victor (E : 2184, 90, 91, 93—96, 216, 17), Baron Hortensia (E : 2198, 201, 02, 08, 15, 17, 32), Circioagă Teodora (E : 2198, 200, 02, 03, 20, 25, 32), Cristea Dobrița (E : 2185, 90, 91, 94, 97, 203), Cerbu Nicolae (E : 2184, 85, 91—93, 96, 2151, 18), Danielenco Ion (E : 2184, 85, 90—93, 95, 96, 210, 03, 06, 10, 15, 17—19), Drăgan Elvira (E : 2185,

92, 96, 98, 210, 11, 17, 18), Dragomirescu Argentina (E: 2191, 94—96, 202, 15, 16, 22, 27, 31, 32), Drancea Dragomir (E: 2185, 90, 91, 93, 96, 98, 99), Drăjneanu Ion (E: 2191, 92, 94, 95, 211, 16—18), Horas M. Dorin (E: 2184, 85, 90—93, 95—97, 201), Istrate Marlena (E: 2184, 85, 90—93, 96—98, 201, 02, 08, 15—17, 32), Luncaşu Adriana (E: 2185, 87, 81—94, 96, 202, 13, 15—18, 27, 31), Marcu Augustin (E: 2185, 204, 10, 11, 15—18), Negru Maria (E: 2184, 85, 90—93, 96, 97), Palugă Maria (E: 2185, 86, 92, 94, 96—98, 201, 02, 08, 11, 15, 18), Pătraşcu M. Adrian (E: 2185, 92, 94—96, 98, 202, 15), Roman Marian (E: 2184, 85, 90—93, 95, 96), Sorescu Gabriela (E: 2185, 87, 91, 93, 94, 96—204, 06, 11, 15), Stanciu Gheorghe (E: 2185, 92, 94, 96, 98, 99, 201—03, 06, 11, 14—18), Stoica Georgeta (E: 2210, 11, 13, 14, 16——19), Şerban Sonia (E: 2185, 92, 94, 96, 98, 99, 203, 06, 11, 13, 15, 16, 22, 37, 32), Ştefan Teodor (E: 2195, 92, 94, 96, 211, 15, 17, 18), Vlad Nicolae (E: 2184, 85,91, 93, 94, 98), Vrănceanu Virgil (E: 2210, 15—18, 24, 26, 32).

Ş. m. 1 cl. VI. Busuioc Costel (E: 2190, 92, 211, 17, 18, 19), Busuioc Radu (E: 2191, 92, 93, 95, 201, 02, 06), Ilie Beatrice (E: 2190, 92, 93, 98—200, 02, 06, 16), Florescu O. Radu (E: 2191—93, 201, 02, 11, 16, 17), Grigorescu Mhaela (E: 2192, 93, 95, 98, 99, 201, 10, 16), Solomon Ernest (E: 2198, 201, 06, 13, 15—17, 32). Cl. VII. Gafiţescu Liliana (E: 2197——203, 06). Cl. VIII. Birescu N. Cristina (E: 2184, 85, 87, 89—96, 98), Boaldă N. Nicolae (E: 2216, 18; 6457—69, 503, 15, 19, 22), Brenner Mircea (E: 2184—86, 80—96), Căpătoiu Mariana (E: 2184, 85, 90—83, 95, 97, 201, 02), Căsăndroiu C. Dănuţ (6420, 24, 58—61, 75, 503, 10, 19, 25—27, 32), Dobrescu Laurenţiu (E: 2170, 71, 73, 79, 82, 211, 13, 16—18), Niţescu Adrian (E: 2210, 11, 13—18), Popescu Maraiana (E: 2184, 88—91, 93, 96, 203, 18, 19), Tămăduianu Daniela (E: 2199, 210, 11, 13—18). Cl. X. Badea V. Marin (6459. 61, 75, 503, 10, 25—27, 31, 61, 63), Gruntescu Gh. Mihaela (6443, 59—61, 82, 510, 26, 28, 54, 61, 63), Ionescu A. Lucian (6459, 64, 82, 89, 503, 10, 16, 22, 25—27, 32), Mazilu Ian (6459—61, 75, 503, 10, 25—27, 32, 61, 63), Neguţ Gheorghe (6459, 61, 510, 15, 16, 22, 26, 61, 63, 87, 93, 601, 09, 15). Cl. X. Alboteanu Radu (6424, 31, 55, 57——61, 63, 65, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 27), Andronescu Dan (6457—63, 87, 503, 10, 11, 16, 19, 22, 25—27, 32, 61, 63), Bărbulescu Teodora (6420, 59, 61, 503, 10, 16, 19, 24, 26, 27, 36, 37, 54, 58, 61—63, 67, 71, 73), Constantinescu Marin (6457—63, 87, 503, 16, 19, 22, 25, 26, 29, 52—54, 60——64, 66, 67) 71), Cosma Tudor (6457—61, 82, 507, 10, 15, 19, 22, 26, 54, 61, 63), Dăscălescu Adrian (6458, 59, 61, 63, 503, 07, 10, 16, 19, 25, 61, 63), Greceanu Rodica (6458—63, 87, 510, 16, 19, 22, 25, 32, 63), Grigorescu Cornelia (6510, 16, 19, 22, 24, 26, 36, 82, 87, 601, 05, 07, 09, 15), Grigorescu Mariana (6510, 15, 16, 19, 22, 24, 36, 82, 84, 86, 87, 99, 601, 05—07, 09), Ionescu C. Radu (6458, 60—63, 87, 503, 10, 16, 19, 22, 25—27, 32, 63), Ionescu Gabriela (6510, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 36, 504, 58, 61, 63, 67, 82, 87, 99, 601, 05, 07, 09, 15), Ionescu V. Constanţa (6443, 45, 57—62, 80, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 36, 50, 58, 60, Nicolaescu Cristina (6510, 16, 19, 22, 24, 26, 36, 82, 84, 86, 89, 601, 05——07, 09, 13, 15), Petru Stelian (6444, 45, 47, 59—63, 82, 503, 07, 10, 19, 22, 25——27, 32, 36), Predescu Elena (6457—63, 87, 54, 10, 12, 19, 25, 26, 32, 63), Petri Ion (6457—62, 510, 15, 16, 19, 22, 25—27), Ştefănescu Elena (4559—61, 63, 67, 503, 10, 11, 16, 19, 22, 25—27, 32, 61, 63), *Reghină Vasile* (6444, 45, 54—63, 75, 92, 503, 04, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 31, 34, 36, 39, 44, 46, 54, 61, 63, 67), Rădulescu Natalia (6457—63, 503, 10, 16, 19 22, 25—27, 32, 58, 61, 63), *Silaev Silvia* (6424, 31, 34, 43, 56—58, 60—63, 65—67, 69—71, 74, 91, 92, 99, 501, 03, 04, 13, 15, 26, 36, 43, 46, 54, 67, 58, 62, 63, 66, 67, 73, 79), Solovăstru Violeta (6458—63, 87, 510, 16, 19, 22, 25, 32, 63), Stan Gh. Ion (6443, 45, 46, 57, 59, 61, 63, 75, 92, 503 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27), Stănescu Dan (6443, 65, 67, 69, 87, 531, 32, 54, 57, 58, 61, 63, 66, 67, 72, 73), Tănăsescu S. Octavian (6432, 58, 5, 61, 63, 510, 16, 19, 23, 99, 601, 15), Tudor Dumitru (6457——62, 507, 10, 16, 19, 22, 23, 25, 26), Vasilescu C. Doina (6458—63, 87, 510, 11, 32, 63), *Vasilescu Constantin* (6443, 37—39, 56, 57, 62, 63, 67, 69, 71, 72, 75, 79, 84, 92, 503, 05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 46, 39, 54, 57, 58, 61, 63, 67, 72), Cijoli Sorin (6457, 59—63, 87, 503, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 32, 63), Vlădăreanu Aneta (6510, 16, 19, 22, 24, 26, 36, 82, 84, 99, 605—07, 09, 13, 15), Cl. XI. Bart Liliana (6457, 61, 63, 69, 82, 503, 04, 10, 12, 15, 22, 26, 27, 34, 45, 57, 63), Davidescu Radu (6446, 57—63, 66, 69, 82, 554, 57, 58, 61, 63), Diaconescu Aurelia (6416, 24, 28, 29, 59, 61, 63, 92, 503, 10, 15, 26), Florea Sorin (6507, 23, 25, 27, 36, 45, 51, 54, 57, 58, 61, 63), Nuţescu Rodica (6459, 63, 504, 10, 12, 15, 22, 26, 27, 34, 45, 57), Radu Constantin (6459, 61, 66, 78, 89, 504, 12, 36, 43).

Ş. m. 2 cl. VI. Lupulenco Livia (E: 2184, 85, 90—95), Miron Alexandru (E: 2197, 98, 301, 02, 06, 10, 15, 17 (Cl. VIII. Militaru

Mariana (E : 2185, 91—94, 98, 99, 201, 06, 10, 11, 13, 15—18), Vrînceanu Vasile (6443, 56—58, 62, 65—67, 69,—71, 74, 91, 99, 501, 03, 13, 17, 31, 36, 45, 46, 54, 55, 57, 58, 62, 63, 66, 67, 73, 79), Tudor V. Stoica (E : 2175, 84, 85, 86, 87, 91, 209 ; 6459, 61—510, 26). Cl. IX. Copoiu Florin (6459, 61, 510, 16, 19, 22, 25—27, 54, 58, 59, 61, 63), Dobrinescu Liana (E : 2186, 96, 209 ; 6457, 59, 61, 510, 19, 22, 26, 54, 58), Mazăre Alexandru (6459, 61, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 64, 61, 63). Cl. X. Andreescu Ioan (6445, 46, 49, 54, 55, 47—63, 67, 71, 74, 76, 87, 92, 503, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 61, 63), Bădescu Alexandru (6443—47, 49, 54, 57—63, 67, 71, 74, 76, 82, 92, 510, 12, 15, 16, 19, 22), Dinu Cornel (6443—46, 57—63, 503, 04, 10, 19, 22, 25—27, 34, 72, 74, 75), Manolescu Cristina (6457—61, 510, 19, 22, 23, 26, 54, 63), Mazepa Lidia (6445, 54, 57, 59—62, 507, 10, 16, 22, 26), Moisescu Ana (6457—61, 504, 10, 22, 23, 26, 34, 36, 54, 61, 63), *Steriu Dan* (6444, 47, 49, 54, 55, 64—66, 70, 72, 83, 84, 96, 97, 99, 501, 03, 04, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22, 23, 25, 31, 32, 36, 39, 46), *Stan Emil* (6447, 49, 66, 68, 72, 74—77, 81, 83, 86, 90, 91, 93, 96—99, 501, 03, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22—28, 30—32, 34, 36, 39, 44, 63), Tilimpea Viorel (6445, 46, 49, 54, 55, 57—63, 67, 71, 74, 76, 79, 83, 86, 87, 92), Voinea Iulian (6444, 45, 54, 55, 57, 59, 61, 82, 519, 25—27), Cl. XI. Butnaru Rodica (6458—63, 66, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 36), Gidiuță Simona (6458—61, 66, 82, 512, 26, 36, 61, 63), Marica Smaranda (6457, 59, 61—63, 67, 76, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 36), Popa Mariana (6444, 56, 59—64, 66, 71, 80, 510), Orășanu Marilena (6424, 59, 61, 62, 67, 82, 504, 10, 16, 19, 22, 26), *Radu Vasile* (6507—09, 18, 51, 55, 58, 64, 67, 72, 75, 77, 80—88, 92, 95, 97, 99, 601, 03, 05, 09, 15, 18, 21, 22).

Ș. m. 4 cl. VII. Grigore Rodica (E : 2185, 81—93, 96, 200, 16, 18), Cl. VIII. Enescu Adrian (E : 2185, 90—93, 96, 98, 203), Zaharia Adrian (E : 2185, 91—96, 6458, 62), Weinberg Mihai (E : 2191, 93, 95, 215 ; 6462, 519, 22, 26). Cl. IX. Pandele Mihaela (6454, 57, 59, 61, 62, 510, 15, 19, 22, 26, 54, 61, 63), *Sachelarie Dan* (E : 2186, 87, 89, 203, 07, 09 ; 6443—45, 54, 57—63, 69, 71, 74, 79, 82, 87, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 34, 36, 38, 39, 45, 46), Ștefan I. Romeo (6454, 57, 59, 61, 62, 507, 10, 16, 26, 61, 63).

Ș. m. 6 cl. VI. Stoica Valentin (E" 2190, 91, 94, 97—202, 06, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 32). Cl. VII. Anton Costel (E : 2193, 96, 202, 10, 11, 15—19), Antonescu Luiza (E : 2184, 85, 92—94, 96, 215—18), Avramescu Mircea (E : 2185, 94, 95, 202, 10, 11, 13, 14, 15, 17—19), Badea Janeta (E : 2191, 92, 210, 11, 15, 17, 18), Beffa Mihai (E : 2185, 91, 93—96, 98, 206, 17), Buxbaum Constantin (E : 2185, 92, 94, 95, 202, 06, 10, 14, 15, 18), Dobre Doru (E : 2202, 10, 11, 15, 13, 15—19), Găveanu Georgeta (E : 2185, 92, 96, 202, 13, 16, 17, 18), Goicea D. Ana (E : 2185, 92, 94, 96, 202, 15—18) Ioniță Gh. Pavel (E : 2185, 92, 93, 95, 210, 13, 16—18), Iordache Mihai (E : 2202, 06, 15—20, 25), Popescu Maria (E : 2190—96, 202, 15), Rădulescu V. Traian (E : 2202, 10, 11, 13—19), Răduță Viorel (E : 2198, 213—18). Cl. IX. Călinescu Horia (E : 2207, 09 ; 6459, 81, 510, 19, 22, 27, 61, 63, 86), Dincă Eliana (E : 2207 ; 6457—61, 510, 16, 22, 26, 61, 63), Enescu Marilena (6450, 55, 57, 60—62, 526, 27, 61, 63), Fatter Liviu (6457, 59—62, 510, 22, 26—28, 61, 63), Gheorghe N. Victor (6457, 58, 60——62, 82, 510, 27, 61), Ion M. Maria (6457, 59—62, 510, 22, 26—28, 61, 63), Nicola, Otilia (6459, 61, 510, 16, 19, 22, 26, 54 61, 63), Pașircă Mircea (6457, 59—72, 510, 26—28, 61, 63), Șerban Stela (6462, 510, 26, 27, 59—63), Ștefan Stelian (6459—62, 90, 510, 16, 19, 22, 23, 26, 61, 63), Teodorescu Viorica (6459—62, 510, 26—28, 61, 63), Tudor Doina (6457—62, 510, 19, 22, 23, 25, 26, 61, 63), Vasile N. Gheorghe (6457, 59—62, 510, 27, 61—63), Zinca Ana (6457, 59—62, 510, 26—28, 61—53). Cl. X. Andreescu I. Elena (6459—61, 69, 80, 82, 510, 26, 27, 63), Cucoș E. Luminița (6457, 59—62, 80, 82, 510, 22, 25—27, 63), Geană I. Maria (6457, 59—61, 67, 80, 82, 510, 22, 26, 27, 61, 63), Chiriac Loreta (6457, 59—61, 63, 80, 82, 92, 510, 22, 27, 36), Guslicov Stelian (6457, 59, 61, 82, 507, 10, 16, 19, 22, 26, 61, 63), Irimescu Elena (6445, 57, 59—63, 67, 80, 87, 92, 510, 22, 26), Karaghiaur Radu (6457, 59—62, 83, 507, 10, 22, 25—27), Popescu A. Lucia (6457, 59—62, 80, 82, 510, 22, 25—27), Rizea Emilia (6445, 57——63, 67, 80, 87, 92, 522, 26), Vrînceanu Magdalena (6457, 59—61, 80, 82, 510, 22, 26, 27, 61, 63).

PLOPENI (Ploiești). *Voinea I. Gheorghe* (E : 2090, 98, 100, 08, 09, 14, 15, 20—23, 29, 30, 36, 38, 46, 54, 57, 59, 61—64, 68—71, 73, 75, 79, 82, 84, 85, 91—94, 201, 02, 06, 09 ; 6370, 71, 73, 459, 528).

POPINZOLEȘTI (Oltenia). Dincă I. Serafim (E : 2159, 61, 68, 71, 79, 91).

POTCOAVA (Oltenia). Cl. XI. Szancu G. Ion (6455, 57, 59—63, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 20).

PUCIOASA (Ploiești). Cl. IX. Popa C. Ion (6510, 19, 34, 53—55, 59—63, 67, 71, 79, 99, 601, 09, 15). Cl. X. Aldea Z. Ion (6422, 54, 55, 57—61, 63, 66, 82, 87, 504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 53—55, 55,

58, 59, 61, 63, 67), Tîrcă I. Mihail (6454, 55, 57—63, 76, 80, 86, 87, 503—05, 07, 12, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 34, 53—55, 58, 59, 61, 63, 67, 79). Cl. XI. *Aron C. Constantin* (6504, 07, 10—17, 19—28, 34, 36, 38, 39, 45, 46, 53, 56, 61, 63, 65, 74, 80—88, 97, 99, 609, 15), Bîrlog I. Corneliu (6507—09, 13, 31, 34, 36, 38, 39, 43, 44, 49, 51, 53—59, 61—63, 65—67, 71, 72, 74, 79, 80, 83, 85—88, 97, 99, 601, 05, 09, 11, 15, 18, 21, 22), *Vasilescu Ana Maria* (6455, 57, 59—63, 66, 67, 82, 86, 87, 503——05, 07, 10, 11, 14—16, 19—24, 26, 27, 31—34, 36, 39—41, 44, 45).

RĂCARI (București). Cl. X. Antonescu P. Aurelia (6459), 61, 92, 504, 10, 19, 22, 25—27, 63), Ene I. Gheorghe (6457, 59—61, 507, 10, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 71), Gălătescu Parascaiva (6358, 61, 507, 10, 16, 19, 26, 27, 58, 61, 63, 79), Gheorghe Niculina (6459, 61, 92, 504, 07, 10, 19, 22, 25——27, 36, 61), Gherescu Jeana (6457, 59, 61, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63), Ion Șt. Nocolae (6455, 57, 59, 61, 66, 92, 504, 12, 13, 16, 25, 26, 36, 52, 55), Marcu Șt. Ioana (6457, 59, 61, 92, 504, 10, 15, 19, 22, 25, 26, 39, 61, 63), *Miulescu Cecilia* (6443, 35, 56, 57, 59, 61—63, 66, 71, 75, 76, 80, 82, 84, 87, 89, 92, 503, 04, 07, 100, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 31, 36, 38, 39, 46, 54, 58, 61, 63, 67, 79), Pușcașu Gheorghe (6457, 50—61, 507, 10, 12, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 71), Stanciu T. Dumitru (6443, 45, 56, 57, 59, 61, 63, 76, 80, 82, 87, 89, 92).

RĂDĂUȚI. Cl. XI. Weinstein Jack (6454—56, 59—63, 66—68, 71, 76, 82, 87, 92, 97, 89).

RĂZBOIENI. Cl. VII. Uiureanu Ligiu (E : 2185, 93, 95, 97, 98, 202, 03, 06).

RECAȘ (Banat). Ș. m. cl. X. Coată Petru (6457—63, 65, 82, 505, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 26), Sîrbovan Emil (6457—59, 61, 65, 82, 510, 11, 14—16, 19, 22, 26).

REȘIȚA. Ș. m. 1 cl. VIII. Andrei Radu (E : 2184—86, 89—97), Cl. XI. Somide (6457, 59—63, 510, 25, 54, 58, 61, 63), Voicu Aurel (6457, 59—62, 76, 507, 10, 16, 19, 22, 27, 61, 63).

Rm. VÎLCEA — Ș. m. 2 cl. IX. Defta P. Mihai (6474, 75, 82, 503, 07, 15, 19, 22, 54, 58, 61, 63). Cl. X. Ceaușescu Tudorița (6441, 63, 87, 90, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 13, 54, 58), Dimulete G. Florica (6441, 63, 87, 90, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 54, 61), Ileana M. Maria (6463, 71, 87, 90, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 54, 61, 88), Ioniță Aurică (6463, 71, 87, 512, 15, 19, 20, 23, 54, 58, 61, 63), Marinescu Lucia (6463, 65, 71, 90, 510, 12, 15, 25), Minculescu Elena (6463, 65, 71, 87, 90, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 58, 61), Nicolae A. Adriana (6463, 71, 87, 90, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 58), Parlapan Mihaela (6508, 10, 12, 13, 17, 68, 70, 73, 86, 89, 93), Piceorea Ilie (6459, 61, 87, 507, 10, 16, 19, 22, 23, 25, 54, 58, 63), Pogăceanu Adriana (6463, 71, 87, 510, 15, 19, 23, 52, 58, 61, 53), Preda Gheorghița (6463, 71, 77, 510, 12, 16, 19, 22, 23, 54, 58, 61), Roșca Gh. Ion (6558, 61, 63, 71, 87, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23), Renner R. Frederica (6463, 71, 512, 15, 22, 23, 58, 61, 63), Safta Georgeta (6463, 87, 90, 510, 15, 16, 19, 22, 23, 54, 58). Cl. XI. Constantinescu N. Nicolae (6459, 63, 510, 15, 16, 22, 23, 54, 57, 61, 63), Diaconescu Constantin (6487, 92, 507, 12, 16, 22, 23, 25—27, 32, 36, 54), Ghițescu G. Gheorghe (6444, 45, 56, 58, 59, 61, 63, 66, 69, 71, 75, 78, 80, 82, 92, 504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 32, 36, 39, 45, 54), Niculescu N. Gheorghe (6445, 56, 58, 71, 87, 92, 96, 523, 25, 32, 54), Parlapan Mihaela (6411, 18, 24, 28, 41, 54, 59—61, 63, 65, 66, 504, 10, 12, 22, 23), Popescu I. Lucian (6482, 504, 05, 10, 12, 15, 16, 19, 21—24), Stoica I. Ieronim (6457, 59——63, 66, 69, 82, 510, 12, 19, 22, 23, 26), Stratulat P. Florin (6454, 56, 65, 71, 72, 74—76, 79, 80, 504, 12, 15).

Ș. m. Vasile Roiată cl. XI. Droașcă, Bogdan (6444, 48, 49, 52, 56, 57, 59—63, 66, 67, 70, 71, 75, 76, 82, 84, 89, 97, 501) Munteanu Dumitru (6445, 46, 48—50, 56—59, 61—63, 82, 87, 92, 97, 99, 500—02).

ROMAN. Ș. m. cl. VIII. Tărcuță Cuprian (6444, 82, 85, 503, 25—27, 34). Cl. X. Bercovici Nelu (6444, 57, 60, 63, 65, 75, 80, 515, 26, 27, 58, 61—63), Căpățînă Valeriu (6444, 63, 65, 89, 515, 53, 64, 58, 59, 61——63), Cornea Vasile (6457, 60, 61, 507, 10, 16, 22, 61), Dumitriu Gheorghe (6460, 507, 10, 07, 1, 19, 22, 23, 25, 26, 63, 71,, 87, 97, 601, 03), Rugină Andrei (6444, 60, 63, 65, 75, 80, 503, 07, 10, 15, 16, 19, 22 25—27, 58, 61—63, 71). Cl. XI. Gavriliu Mihai (6443, 48, 56, 57, 59, 61—63, 65—67, 82, 87, 92).

Șc. 8 ani nr. 1 cl. VI. Trușcă Adrian (E : 2185, 91—94, 96, 98, 202, 06, 17).

Ș. m. 1 cl. IX. Albești eanu Aurelia (E : 2181, 218, 516, 19, 22, 53, 54, 61, 63, 601), Bocarna Samuel (E : 2183, 86, 207, 19, 507, 25, 61, 63, 601, 15), Enache Teodora (E : 2209, 19, 503, 29, 53, 54, 61, 63, 71, 601), Frăsineanu Ion (E : 2187, 207, 18, 516, 22, 25, 71, 651, 61, 63), Nițoiu F. Dumitru (E : 2207, 19, 510, 16, 27, 63, 601), Simion Florian (6457, 59—61, 82, 510, 26, 27, 61, 63, 86, 87, 89), Ticmeanu Marin (E : 2207, 19, 510, 16, 27, 54, 61, 63, 601). Cl. XI. Ceapă Iancu (6459, 60, 87, 507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61).

Ș. m. 2 cl. X. Sandu Marin (6457, 59—61, 507, 10, 16, 19, 26, 44, 61—63), Săndulescu Ion (6444—46, 57, 59—62, 87, 503, 07, 10,

16, 19, 22, 25—27, 31, 36), Stanciu George (6424, 28, 57, 61, 62, 510, 16, 19, 22, 25—27), Truşcă Marian (6457—60, 510, 16, 19, 25—27, 46, 54, 62).

RUPEA. Ş. m. St. O. Iosif cl. X. Boldea Nicolae (6454, 55, 57—61, 74, 507, 10, 23, 39), Vlad Ion (6454, 55, 57—61, 74, 507, 10, 22, 23, 54), Munteanu Corin (6444, 55, 57, 58, 62, 67, 69, 72, 75, 83, 87, 911, 93, 97).

RUSENII VECHI (Iaşi). Şc. 8 ani cl. VIII. Călugăru Victor (E: 2214—19; 6563, 64, 74, 79), Chirilă Gheorghe (E: 2210, 11, 15—19; 6561, 63, 79), Dărăbăneanu Rodica (E: 2210, 11, 15—19,; 6561, 63, 71, 79), Flotică Duţa (E: 2210, 11, 15, 17—19, 6561, 63, 71, 79), Iacob Gh. Maria (E: 2210, 11, 15—19; 6561, 63, 71, 79), Pintea Gh. Elena (E: 2210, 11, 15—19; 6561, 65, 74, 79), Rotaru Margareta (E: 2210, 11, 15—19; 6509, 61, 63), Stufroc Rodica (E: 15—17, 19, 20; 6563, 71, 79).

SALCIA (Bucureşti). Cl. VIII. Dună Ioan (2184, E: 86, 92, 94, 96, 218; 6459), Cl. IX. Matu Constantin (6459—61, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 61, 63).

SATU MARE. Cl. IX. Noje Gheorghe (E: 2207, 510, 25—27, 54, 55, 61, 63, 71, 79, 615), Cl. XI. Hossu Alexandru (6456—59, 61, 63, 66, 67, 92, 504, 07, 10, 58).

SEBEŞ. Cl. XI. Sava Maria (6446, 49, 56—63, 66, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 23, 26, 39).

SEBIŞ (Crişana). Cl. XI. Codreanu Rada (6459—63, 504, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 39).

SIBIU. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Zaharia Nicolae (E: 2184, 85, 90—96).

Şc. 9 ani nr. 3 cl. VI. Darie Rodica (E: 2185, 90, 92—95), Gherman Mihaela (E: 2185, 90, 92—95), Lungu Carmen (E: 2185, 90, 92—95).

Şc. 8 ani nr. 4 cl. VII. Lăscărescu Dorin (E: 2184, 85, 90—96).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Niţu Oleg (E: 2184, 85, 93, 95, 96, 201, 02, 04, 06, 10, 11, 15).

Şc. 8 ani nr. 9 cl. VII. Radu Ilie (E: 2192, 98, 201, 02, 06, 15—17). Cl. VII. Cazacu Mihai (E: 2193, 95, 201, 02, 06, 10, 15—18), Gailea Elena (E: 2184, 91, 95, 202, 06, 10, 11, 15, 16, 18), Hnetcu Angela (E: 2185, 92, 94, 98, 202, 10, 11, 13, 15—18), Preda Olimpia (E: 2184, 85, 92, 94, 206, 13, 15, 16—18). Cl. VIII. Filipeanu Mihail (E: 2185, 91—94, 96, 210, 11, 15, 17).

Şc. 5 ani nr. 15. Cl. VII. Bebe Werner (E: 2185, 91—95, 98), Palade Valeian Egen (E: 2185, 91, 93—96, 98), Groza Carmen (E: 2185, 91—96, 98).

Ş. m. cl. IX. Hentschi Mihai (6420, 510, 22, 16, 27. 32, 54, 63), Pompilian Alexandru (6503, 07, 10, 19, 22, 26, 27, 54, 61—63, 609, 15), Voicescu Mihai (E: 2219, 503, 07, 10, 16, 19, 22, 26, 32, 54, 61, 63). Cl. X. Rusnac Doina (6459, 61, 65, 510, 16, 19, 22, 25, 27, 61, 63). Cl. XI. Carabulea Ilie (6462, 63, 77, 70, 71, 82, 510, 15, 16, 22, 26, 45, 55).

Ş. m. 2 cl. IX. Brindaşu Dan (6424, 58, 59, 61, 62, 510, 54, 55, 59, 61, 63), Giurea Ovidia (6444, 58, 59, 61, 62, 510, 19, 34, 54, 59, 61, 63), Nicu Maria (6444, 58, 59, 62, 554, 59, 61, 63), Popa Aurelia (6458, 59, 61, 62, 510, 43, 43, 43, 59, 61, 63). Cl. X. Trif Nicolae (6405, 09, 12, 14—16, 31, 43, 44, 47, 50, 54—58, 60, 62, 67, 70, 75, 82, 86, 87, 89, 90 92, 97—99, 503, 12—16, 2—). Cl. XI. Gal Alexandru (6459, 61, 63, 66, 69, 92, 504, 10, 15, 22, 23, 36), Sabău Mircea (6443, 57, 59, 61—63, 66, 67, 69, 71, 88, 92).

Ş. m. cl. IX. Lăutărescu Dumitru (6443, 59, 61, 65, 66, 504, 12, 23, 24, 54, 61, 63, 67). Cl. X. *Magda Radu* (6444, 45, 54, 55, 57, 58, 60, 62, 63, 75, 76, 80, 82), 92, 503, 04, 07, 10, 12, 16, 18, 19, 22, 23, 25—27, 30, 36, 44, 46, 54, 59, 61—63, 66, 67, 72), Maniţiu Ioan (6457—61, 503, 10, 16, 19, 22, 61, 63), Sendovici Călin (6462, 74, 75, 82, 86, 92, 97, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 25—27, 30, 31, 36, 39, 43, 44, 46, 48, 54, 51, 61, 63, 67, 67, 72, 79, Zădan I. Dumitru (6448, 67, 75, 79, 80, 87, 90, 523, 30, 31, 61, 63, 79). Cl. XI. Arsenie Aurel (6459, 66, 67, 512, 15, 22, 23, 54, 55, 61, 63), Beldea Liviu (6459, 61, 63, 66, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 54, 61, 67), *Bucur Liliana* (6443, 45, 46, 50, 54—56, 58, 60, 62, 65, 66, 74, 75, 77, 79, 80, 87—89, 92, 96, 99, 501, 02, 07, 11, 13, 16—18, 22, 23, 31, 32, 46, 49, 53, 55, 61, 63, 67. 79), Boac, Monica (6405, 10, 11, 18, 20, 24, 28, 36, 54, 57—63, 65—57, 73, 82, 84, 504, 05, 07 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 39), Călin Venera (6418, 55, 56, 61, 66, 67, 76, 80, 82, 86, 522, 61), Elefterescu Mihai (6459, 61, 66, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 54, 61, 63, 67), *Laşiţă Ileana* (6443, 45—47, 50, 54, 56, 65—67, 69, 74, 76, 79, 80, 84, 86—89, 92, 93, 96—99, 501, 03, 05, 07, 08, 16—18, 23, 25, 27, 3031, 34, 36, 38, 40, 46), Manoilă Mihail (6461—63, 92, 504, 10, 15, 16, 22, 23, 26, 46, 55, 61, 63), Moraci Dan (6459, 61, 66, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 23, 36, 54, 61, 63, 67), Oprişor Domnar Simion (6444, 50, 56—58, 82, 66, 69, 73, 75, 80, 96, 503, 0, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 38, 39, 45, 46), Daduly Ianos (6449, 56, 57, 60, 61, 64, 77, 80, 87, 504, 61, 63).

SIGHET, Cl. XI. Moldovan Miron (E: 2197—99, 201, 02, 06, 19).

SIMERIA. Cl. IX. Ketsis Gavril (6457—62, 510, 54, 58, 61, 63, 67), Neagu Rodica (6459—63, 66, 67, 82, 84, 86, 92). Cl. XI. Roşu Titus (6457, 58, 69, 82, 87, 503, 07, 10, 15, 16, 19). Cl. IX serală. Bogdan Iuliu (6457—61, 510, 26, 38, 61, 63, 67).

SINEȘTI (București). Cl. VII. Stancu Marian (E : 2189, 92, 93, 206, 11, 13, 15, 18).

SINEȘTI (Potcoava — Slatina). Cl. VIII. Bălănescu Marin (E : 2185, 87, 92, 94, 96, 202, 06, 15, 17—19), Rădoi M. Ion (E : 2169, 71, 79, 82, 84—86, 92—94, 96, 98, 200, 06, 10, 11, 13, 15—17).

SLATINA. Cl. X. Sîrbuleasa Maria (6444, 59, 61, 80, 82, 510, 56, 61—63).

SPINENI (Iași). Moisii Ioan ((E : 2184, 85, 90—93, 95, 97, 98, 211, 17—19).

SUCEAVA. Ș. m. 1 cl. IX. Cazan Sergiu (6459, 62, 507, 10, 12, 19, 22, 25, 27), Graur Adrian (6459, 61, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 25, 27, 36, 61).

Ș. m. 2 cl. IX. Zavera Ionel (6169, 70, 82, 86, 88—90, 92, 93, 95, 96; 6418, 20, 79, 89).

SĂRMAȘ. Cl. X. Sărac Ionat (6444, 45, 47, 54, 55, 57—62, 82).

ȘTEFĂNEȘTI (Argeș). Cl. VI. Popescu P. Cristian (E : 2184, 85, 91—98, 201, 02, 06). Cl. VII. Buricel Victoria (E : 2184, 85, 88, 91—96).

TANSA (Negrești). Șc. 8 ani cl. VIII. Bradu N. Gheorghe (E : 2184, 87, 90, 91, 93, 95, 97, 98, 203, 06, 07), Ciobanu A. Andrei (E : 2184, 90, 91, 93, 95, 98, 200—03, 06, 07), Dascălu D. Aurel (E : 2184, 87, 90, 91, 93, 95, 97, 98, 200—03, 06, 07), Mantale P. Natalia (E : 2184, 90, 93, 95, 98, 200—03, 06), Pintea I. Elena (E : 2184, 87, 90, 91, 93, 95, 98, 200—03, 06), Radu V. Paraschiva (E : 2184, 87, 90, 91, 93, 97—203, 06, 07), Spiridon Gh. Elena (E : 2184, 90, 93, 97, 98, 200—03, 06), Spiridon M. Vasile (E : 2184, 90, 91, 93, 95, 200—03, 06), Vîrlan Lucia (E : 2184, 90, 91, 93, 95, 97, 98, 200—02, 06).

TARIVERDE (Istria, Dobrogea). Cl. VII. Stere Mitică (E : 2206, 10, 11, 13, 15—18).

TEACA (Bistrița, Cluj). Cl. X. Lupu Justin (E : 2201, 19, 5463, 51, 61, 82, 507, 10, 12, 19, 22, 26, 63).

TECUCI. Ș. m. 1 cl. VIII. Lazu Alin (E : 2185, 91—96, 98, 202, 11, 13, 16). Cl. XI. Alter Snica (6445, 46, 49, 59, 61, 63, 66, 67, 72, 82, 87, 92, 504, 10, 12, 18).

Ș. m. 2. Nicoară Ana (E : 2184, 85, 90—93, 202, 06, 10, 13, 18). Cl. XI. Harabagiu S. Mihai (6454, 55, 57—62, 66, 67, 80, 81, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 25—27, 34, 36, 39, 46, 61, 63).

TIMIȘOARA. Ș. m. 1. cl. VIII. Teleagă Maria (E : 2196, 99, 210, 11, 16—19). Cl. IX. Anton Anton (6507, 10, 16, 18, 19, 22, 25—27, 61, 83, 601, 15).

Ș. m. 2 cl. XI. Botjen Siegfried (6457, 59—61, 63, 510, 12, 15, 19, 20, 22, 51, 54, 57, 63), Liuhandru Gh. (6456, 59—61, 63, 67, 80, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26), Hack Albert (6459, 61, 63, 82, 92, 504, 10, 12, 19, 22, 34, 36, 61, 63), Jianu Sever (6456, 59, 63, 67, 80, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 38, 44), Petri Norbert (6443, 44, 48, 56—63, 66, 73, 76, 82, 84, 92), *Popovici Cornel* (6404, 18, 22, 25, 43—46, 48, 49, 59, 61, 63, 66, 67, 71, 76, 77, 79, 87, 92, 97, 98, 500, 04, 06, 10—15, 19—24, 30, 36, 38, 39, 43, 44, 46), Rusu Radu (6456—63, 66, 67, 76, 82, 84, 87, 92), Taloș Vasile (6459—61, 63, 504, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 26), Wagner Wilhelm (6457, 59, 61, 510, 15, 22, 26, 38, 63, 66).

Ș. m. 3 cl. X. Avram Jecu (6457, 61, 63, 70, 75, 82, 87).

Ș. m. 6 cl. X. Arion Mihai (6475, 76, 79, 82, 525—29, 31, 36, 38), Girjaliu Elena (6475, 76, 79, 82, 525—29, 31, 36, 38), Filip Mircea (6475, 76, 79, 82, 525—29, 31, 36, 38), Marchiș Teodor (6475, 76, 79, 82, 526—29, 31, 36, 38), Roman Ileana (6475, 76, 79, 82, 525—29, 31, 36, 38), Sferedean Vasile (6475, 76, 79, 82, 525—29, 82, 525—29, 31, 36, 38), Gavrilă Aurel (6476, 79, 82, 92, 510, 12, 25—27, 29, 36, 45). Cl. XI. Izvernariu Nicolae (6479, 82, 92, 510, 22, 25—27, 29, 36, 45, 65), Marcu Adrian (6476, 79, 82, 92, 510, 25—29, 36), Radu Aurel (6475, 76, 79, 82, 92, 525—27, 31, 34, 36, 38.

Ș. m. Eftimie Murgu cl. VIII. Cepeu Cornelia (E : 2198, 202—09).

TÎRGOVIȘTE. Șc. 8 ani cl. VII. Chivăran Laura ((E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 22).

Ș. m. 2 cl. X. Vartan Florin (6444—46, 59, 61, 62, 70, 79, 82, 89, 510, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 28, 31). Cl. XI. Bratu I. Constanti n (6446, 503, 12, 13, 18, 25, 27, 32, 34, 36, 44, 49, 51, 54, 55, 63), Erlik Octavian (6459, 61, 63, 66).

Ș. m. 3 cl. X. Ștefănescu B. Călin (6459, 70, 76, 75, 82, 87, 510, 25—27, 61, 63) Cl. XI. Niculescu Constantin (6450, 60, 65, 66, 80, 81, 82, 87, 514—20, 22, 23, 26, 30, 36, 38, 42—44, 54, 55, 57, 61—67, 67, 68, 78).

TÎRGU CĂRBUNEȘTI (Oltenia). Ș. m. cl. XI. Ciobanu I. Ion (6457—59, 61—63, 66, 67, 82, 93).

TÎRGU-JIU. Ș. m. 1 cl. VIII. Ciocîrlie I. Valeriu (E : 2184, 87, 88, 91; 6444, 57, 59—62, 503, 07, 10, 16, 22, 25). Cl. IX. Bardan I. Viorel (E : 2203, 07, 09, 57, 59—61, 64, 70, 525, 26, 63), Budianu N. Dumitru (E : 2186, 87, 96, 203, 07, 09, 19; 6457, 59, 61, 526, 61, 63), Cioară V. Maria (E : 2169, 203, 06, 09, 10, 15, 19; 6461, 561), Dobrescu Rodica (E : 2184, 87, 203, 06, 09—12, 15, 18, 19; 6561), Ghica Gheorghe (E : 2186, 87, 96, 203, 07, 90, 19; 6459, 61, 526, 63), Sîrbu V. Ion (E : 2186, 87, 96, 203, 06, 09, 19, 57, 59, 61, 64, 527, 61, 63). C.l X. Bărbărasă Mihai (6457—63, 76, 510, 23, 26, 60, 63), Baros N. Ion (E : 2177, 209, 19; 6505, 16, 22, 26, 36, 58, 61,

63), Buşe Florian (E : 2167 ; 6421, 57—63, 67, 76, 51—0, 19, 22, 23, 25, 26, 36), Chirtoc D. Viorel (6457—61, 70, 87, 507, 10, 19, 25—27, 30), Curcanu George (E : 2187, 219 ; 6445, 46, 58, 62, 63, 65, 67, 70, 74, 76, 86—89, 98, 505, 07, 12, 14, 16, 23, 25—27, 30, 34, 36, 44, 58, 61, 63, 67, 70, 71), Duncea Florin (6457—63, 67, 76, 510), Duncea Marinca (E : 2189 ; 6457—63, 67, 510, 15, 22, 23, 61), Ghiţulescu Adriana (6457, 58, 60—63, 67, 515, 19, 22, 34, 509, 23), Harnaciu Vasile (E : 2189, 209 ; 6457—63, 67, 515, 19, 23, 26, 510), Jeleu Venera (E : 2189 ; 6457—63, Duncea Marinca (E : 2189 ; 6457—63, 67, 510, 15, 22, 23, 61), Ghiţulescu Adriana (6457—, 58 60—63, 67, 515, 19, 22, 34, 509, 23), Haranaciu Vasile (E : 2189, 209 ; 5457—63, 67, 515, 19, 23, 26, 510), Jelcu Venera (E : 2181 ; 6457—63, 67, 510, 26, 61, 63), Herfu Petre (6457—63, 510, 22, 23, 26, 61), Pănţău Gheorghe (6457—61, 63, 67, 88, 510, 22, 61, 63), Pestroiu Daniel (6459, 61, 74, 76, 87—89, 503, 10, 16, 25—27, 30, 34), Pîrvulescu Sevastiţa (6457—63, 67, 510, 23, 26, 61, 63), Răduţoiu I. Stelian (6458—61, 507, 10. 19, 25—27, 61, 63), Săceleanu Ion (6458, 60, 62, 63, 65, 67, 76, 89, 510, 19, 23, 26, 34, 36), Săculescu Aurel (6457—63, 67, 510, 22, 26, 61), Stănculescu Mihai (6424, 57—63, 65, 67, 76, 510, 16, 23, 26, 61), Toacsen Vasile (6457—63, 510, 16, 26, 58, 61, 63), Vişan Ion (6457—63, 67, 510, 22, 23, 26, 61, 63). Cl.XI. Bîrsan I. Nicolae (6449, 54, 55, 65, 79, 88, 529, 30, 34, 46, 54, 61—63, 65, 67, 78). Isac Horaţiu (6457—61, 63, 65—67, 69, 92, 96, 510, 22), Pîrcălăbescu Viorel (6457, 60, 62, 63, 66, 82, 504, 12, 15, 16, 26, 63), Tudose Ion (6457, 59, 61—63, 66, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 23, 63)

TÎRGU LĂPUŞ. Ş. m. cl. X. Bozga Grigore (6457—62, 505, 10, 19, 22, 27, 63), Buda Ioan (6457—62, 505, 10, 16, 19, 22, 25, 63, 67), Chira Ioan (6457—62, 505, 10, 16, 19, 22, 51, 63), Ianas Vasile (6445, 59, 61, 63, 65, 80, 89, 510, 12, 15, 22, 36, 61), *Mureşan Roman* (6435, 43—45, 48, 49, 54, 57—63, 65, 67, 70, 71, 75, 82, 92, 503, 06, 07, 16, 22, 25—27, 36, 40, 53, 55, 56, 61, 63, 67), Pascz Victor (6457—61, 505, 10, 16, 19, 22, 61, 63, 67), Petruţ Virgil (6457—62, 505, 10, 16, 19, 22, 27, 63, 67), Tuns Iona (6457—61, 505, 10, 16, 19, 22, 61, 62, 67).

TÎRGU MUREŞ. Cl. VIII. Vamos Vasile (E : 2197—99, 210, 11, 13, 15—17 ; 6554). Cl. XI. Sarchiz Dorin (6461, 63, 66, 80, 82, 92, 504, 10, 12, 15, 22, 55, 65).

TÎRGU NEAMŢ. Ş. m. cl. IX. Agapie Ion (6424, 59, 61, 62, 82, 510, 22, 25—27, 60, 61, 63). Cl. XI. Gheorghiţă Gabriela (6457, 59, 61, 63, 66, 76, 82, 92, 504, 10, 12, 15), Sandu Lily (6457, 59—63, 66, 76, 80, 82, 92), Sofica Victoria (6457, 59, 61—63, 66, 76, 82, 504, 12, 15, 22).

TORMAC (Banat). Cl. VI. Ban Gheorghe (E : 2185, 92—95, 215—17), Decica Alexandru (E : 2185, 92, 94, 215—17, 25, 93), Geal Juliana ((E : 2185, 92, 95, 215—17). Cl. VII. Juhasz Eva (E : 2192—96, 210, 15—18), Nagy Iuliana (E : 2185, 92—94, 210, 15—18), Szucs Juliana (E : 2192—94, 210, 15—18), Vicze Ludovic (E : 2185, 92—94, 215—18).

Cl. X. *Aionesei Nicu* (6443, 45, 46, 54, 55, 57—62, 65, 71, 74, 75, 80, 82, 87, 88, 92, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—28, 33, 34, 36, 46, 53, 54, 58, 61, 63, 71), Carpiuc Mitică (6443, 45, 46, 54, 55, 57—61, 65, 71, 74, 75, 80, 82, 87, 88, 92, 503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25—28, 33, 36, 54, 58, 61, 63, 71), Corneski Ioan (6444, 67, 69, 80, 82, 88, 92, 504, 10, 15, 22, 36), Crăciun G. Gheorghe (6443—46, 49, 56—63, 66, 67, 69, 80, 87—89, 92, 93, 504, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22, 26, 34, 36, 38, 39), Obuf Traian (5444, 56—61, 63, 67, 80, 82, 88, 92, 504, 10, 15, 22, 36).

TULCEA . Ş. m. 1 cl. VI. Conţescu Vlad (E : 2192, 93, 95, 97, 98, 201, 06, 18), Stoina Maria (E : 2189, 73, 82, 85, 92, 94, 97, 98).

TURDA. Şc. 8 ni nr. 6 cl. VII. Adam Laurenţiu (E : 2185, 91—96, 98, 201, 02, 06). Ş. m. 1 cl. X. Lujescu Mariana (6504, 07, 15, 16, 19, 32, 36, 54, 58, 60, 61, 63, 67). Cl. XI. *Pop E. Gheorghe* (6446, 48, 49, 57, 59—61, 63, 65, 67, 69, 71, 74—76, 80, 82, 84, 87—89, 50—4, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 30, 36, 37, 39, 44—46, 58, 61, 63, 67, 71, 72, 79), Ravai Alexa (6444, 46, 47, 61, 66, 77—90, 87, 88, 97).

Ş. m. 2 cl. X. Rada Lucia (6458, 59, 61, 87, 503, 04, 07, 10, 16, 19, 22, 26, 36, 46, 58, 60, 61, 63, 65). Cl. XI. Olariu Adriana (6457, 60, 66, 82, 504, 10, 23, 26, 34, 39, 44, 55, 61, 63).

Ş. m. 3 Mihai Viteazul cl. X. Chirilă Radu (6457, 59—61, 82, 510, 12, 15, 19, 22, 26, 36), Giugulea Nicolae (6457—51, 510, 16, 19, 22, 26, 61, 63), Gagu Valeria (6457—61, 507, 10, 16, 19, 22, 25, 36), Giuruţan Dan (6444, 57, 58, 60, 88, 507, 10, 19, 25, 36, 63, 67, 71), Răduţiu Aurel (6457—69, 510, 15, 16, 19, 22, 23, 26), Vălean Ion (6457, 59—61, 82, 88, 510, 19, 22, 26, 36, 54, 58, 63). Cl. XI. Botjthe Daniel (6467, 69, 70, 75, 77, 78, 80, 82, 87).

TURNU SEVERIN. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Bădescu Iulian (E : 2185, 92, 93, 95, 202, 06, 10, 15, 17, 18), Dumitraşcu Nicolae (E : 2184, 85, 90—93, 95, 201, 06, 18). Ş. m. 1 cl. V. Popescu I. Mihaela (E : 2192, 93, 95—98, 201, 06, 10, 16). Cl. VI. Ciucă Valentin (E : 2185, 92—94, 98, 202, 06, 16), Dabija Viorel (E : 2185, 92—94,

202, 06, 11, 16), Romanescu Florin (E : 2185, 03, 202, 11, 15—18), Sarvari Andrei (E : 2202, 06, 10, 11, 13, 15—17), Tontoiu Dorin (E : 2185, 90, 92, 96, 98, 201, 02, 06, 10, 11, 13, 15—17). Cl. IX. Gărgălie Silvestru (6457—62, 82, 503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 27, 34, 36, 61—63), Ciuhat Rodica (6459—61, 82, 510, 25—27, 34, 54, 61, 63), *Popescu Marcel* (6457, 59—62, 64, 70, 75, 76, 82, 89, 92, 97, 503, 04, 07, 10, 12, 13, 15—17, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 39, 54, 61, 63, 67), Popescu Silvia (6457, 59—62, 82, 89, 510, 19, 22, 25—27 36, 39).

Ş. m. cl. VIII. Mirică Rodica (E : 2184, 85, 90, 91, 93—96).

Ş. m. 3 cl. VIII. Bivolaru Simion (E : 2185, 90—96, 98—202, 06, 10, 11, 13, 15—18).

TURBAŢI. Cl. VII. Ciucur Sonia (E : 2206, 10, 11, 13, 1518, 20—23, 32). Cl. VIII. Blindu D. Elena (E : 2191, 92, 94, 10, 11, 13, 15—17, 19), Cătuţoiu I. Elena (E : 2185, 90, 93, 95—97, 99, 202, 06, 09, 11, 15, 17, 18).

ŢĂNDĂREI Gară. Cl. VII. Tudor Rodica (E : 2197—99, 201, 13—16, 18, 19).

UNIREA II (Raion Aiud). Şc. 8 ani cl. VIII. Hetea Leontina (E : 2215—18, 21, 24—37, 29, 32 ; 6559).

USUREI (Argeş). Mecherel Gh. Naria (E : 2184, 85, 91—96).

VALEA REA (Vaslui). Cl. VI. Zăllnescu Cinstantin (E : 2169, 71, 79, 82, 85, 91—95, 97, 98, 200, 02, 06).

VIDELE (Bucureşti). Cl. X. Cojocaru Gheorghe (6444, 59, 61, 82, 507, 10, 16, 19, 22, 2527, 29), Sonciu Gheorghe (6459, 61, 82, 510, 16, 19, 22, 25—27, 29, 34, 61, 63).

VIŞEUL DE SUS (Maramureş). Cl. VIII Fried Solomon (E : 2185, 90—96).

VLAHI (Adamclisi, Dobrogea). Cl. VIII. Dincă Gheorghe (E : 2197—232 ; 6510, 15, 19, 22, 23, 26, 28, 32, 39), Dumitru Stana (E : 2197—232 ; 6510, 15, 19, 22, 23, 26—28, 32, 34), Niculescu Veronica (E : 2197—232 ; 6510, 15, 19, 22, 23, 26—28, 32, 39).

VLĂSINEŞTI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VII. Ariciul Mihai (E : 2182, 85, 92, 94, 95, 98, 206, 13, 14, 16, 18), Cruţ Flotica (E : 2184, 85, 92, 94, 95, 98, 206, 16, 18), Damian Dumitru (E : 2185, 91—93, 95, 98, 206), Damian Pavel (E : 2185, 91, 92, 95, 98, 206, 15), Hanciuc Neculai (E : 2185, 92, 94, 95, 98, 215, 16, 18). Cl. VIII. Babiuc Ion (E : 2185, 92—96, 98, 206, 15, 16), Creţu Costache (E : 2185, 92, 93, 96, 98, 206, 15, 16), Creţu Gheorghe (E : 2185, 92, 93, 95, 96, 98, 206, 11, 14, 15, 16), Ciubotaru Costache (E : 2184, 85, 92, 93, 95, 96, 98, 206, 10, 15, 16), Damian Izlian (E : 2184, 85, 92, 93, 201, 15, 16), Faliboga Maria (E : 2185, 92—94, 96, 206, 15).

ZALĂU. Ş. m. 1 cl. X. Căzună Octavian (6457, 59—61, 65, 67, 82, 87, 510, 26, 36, 63), Elec F. Marcela (6457, 59—61, 65, 67, 82, 87, 510, 26, 36, 61), Fărcaş Marcela (6457, 59, 61, 65, 67, 82, 87, 90, 526, 54, 61, 63), Prunea Ion (6459—61, 65, 67, 82, 87, 510, 26, 36, 63), Puia Florica (6459, 61, 65, 67, 82, 87, 510, 26, 47, 45, 61, 63). Cl. XI. Gilgău Ch. Vasile (5459—61, 63, 67, 73, 80, 82, 83, 92, 510, 26, 36, 61), Guşet N. Ioan (6450, 61, 67, 73, 87, 82, 504, 10, 15, 22, 36, 63), Nimăt Ştefan (6459, 61, 65, 67, 73, 82, 87, 92, 510, 26, 36, 61, 64), Schmidt Gheorghe (6457, 59, 66, 71, 80, 82, 92, 509, 10, 12, 15, 21), Silaghi Ghoerghe (6451, 61, 67, 72, 82, 87, 510, 21, 24), Tamaş Viorel (6459, 61, 65, 73, 82, 87, 504, 10, 15, 36, 63).

ZLATNA. Cl. IX. Drăguş Tiberiu (E : 2185, 92, 94, 96 ; 6459, 61, 510, 26 .

Pînă la 1 februarie 1965 s-au mai evidenţiat ca rezolvitori de probleme din G.M.—B după cum urmează:

1. *Negruţiu Vasile* (cl. XI ş m. 1 Oradea), 2. *Bucur Liliana* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 3. *Gonciar Ştefan* (cl. XI. s. m. Feteşti), 3 bis. *Biscă C. Octavian* (cl. XI. ş. m. 1 N. Bălcescu, Craiova, 4. *Vasilescu Nicolae* (cl. IX Pucioasa), 5. *Ilie Nicolae* (cl. XI ş m. 1 Giurciu), 6. *Florea Gheorghe* (cl. XI Sighişoara), 7. *Marinov Cornel* (cl. XI ş. m. 4 Braşov), 8. *Nicău Anton* (cl. VIII ş. m. 1 Bacău) 8 bis. *Dăncilă Ioan*, (cl. XI. ş. m. 3 Sibiu), 9. *Hărăguş Ştefan* (cl. X ş. m. 1 Lugoj), 10. *Gavriliu Mihai* (cl. XI Roman), 11. *Perl Toma* (cl. XI ş. m. 8 Cluj), 12. *Pop Marius* (cl. X ş. m. Ineu, Crişana), 13. *Căpăţînă Ion* (cl. XI ş. m. 1 Hunedoara), 14. *Popa Eugen* (cl. IX. ş. m. 3 Iaşi), 14 bis. *Sava Petru* (cl. IX Făget), 15. *Ignea Silviu* (cl. XI ş. m. 22 Bucureşti), 16. *Ghera Petru* (cl. XI ş. m. 1 Lugoj), 17. *Voiculescu Dan* (cl. IX ş. m. 21 Bucureşti), 17 bis. *Andrei Viorel* (cl. XI ş. m. 1 Galaţi), 18. *Răgălie Niţă* (cl. XI ş. m. Deva), 19. *Orban Elek* (cl. X ş. m. 2 Mediaş), 20. *Almer David* (cl. XI ş. m. 17 Bucureşti), 21. *Ivănescu Ioan* (cl. XI ş. m. 1 Lugoj), 22. *Filipoiu Şt. Alexandru* (cl. XI ş. m. 1 Buzău), 23. *Ştefănescu Mircea* (cl. IX ş. m. 1 Caransebeş), 24. *Hîndorean Constantin* (cl. XI ş. m. Orăştie), 25. *Geleriu Dan* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 26. *Orăşanu Laurenţiu* (cl. IX ş. m. 2 Ploieşti), 27. *Sergiescu Vlad* (cl. VIII şc. 8 ani nr. 71 Bucureşti), 28. *Gheorghiu Doina* (cl. IX ş. m. 6 Bucureşti), 29. *Dache Constantin* (cl. XI ş. m. Feteşti-gară), 30. *Oprescu Gabriel* (cl. XI ş. m. 1 Ploieşti), 31. *Eremia Vasile* (cl. XI ş. m. 3 Constanţa), 32. *Marinuş Radu* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 33. *Stan Emil* (cl. XI ş. m. 2 Ploieşti), 34. *Vasilescu Ana* (cl. XI Pucioasa), 35. *Bădescu Alexandru* (cl. XI ş. m. 2 Ploieşti),

36. *Tilimplea Viorel* (cl. XI ş. m. 2 Ploieşti), 37. *Stanciu Virgil* (cl. X ş. m. 3 Tîrgovişte), 38. *Dincă Gheorghe* (cl. X ş. m. Radomireşti), 39. *Bercovici Belu* (cl. X Roman), 40. *Enache Gheorghe* (cl. X ş. m. 2 Tîrgovişte), 41. *Trif Nicolae* (cl. X ş. m. 2 Sibiu), 42. *Liconi Dorian* (cl. XI ş. m. 2 Craiova), 43. *Timaru V. Theodor* (cl. XI ş. m. Oneşti), 44. *Hotăranu Ion* (cl. XI ş. m. 2 Craiova), 45. *Stănescu Constantin* (cl. XI ş. m. 2 Craiova), 46. *Voicilaş Corneliu* (cl. IX ş. m. 5 Ploieşti), 47. *Gheorghe Felicia* (cl. VIII şc. 8 ani nr. 2 Craiova). 48. *Manolescu Adrian*, (cl. IX ş. m. 35 Bucureşti)

Pînă la 1 februarie 1965 s-au primit soluţii bune la probleme propuse în ultimele trei numere din Gazeta matematică, seria B, de la:

ADJUD. Ş. m. cl. VI. Apostol Lucia (E. 2184, 91, 93, 97).

Şc. 8 ani cl. VI. Băcăneţ Paula (E : 2199, 210, 11, 13, 15—18), Nega Gh. (E : 2210, 11, 15—17, 20, 27, 33), Zaharia Viorica (E : 2197, 98, 202, 06, 15—17, 20, 27, 32). Cl. VIII. Capalb Gheorghe (E : 2211, 15—18, 20, 22, 24, 26, 27, 32), Nicolau Toanca (E : 2197, 98, 206, 15, 17, 20, 26, 27, 32), Parfenie Vasile (E : 2119, 84, 85, 92, 94. 95, 97, 201), Vraciu Mihaela (E : 2197, 98, 200. 06, 11, 15, 17, 20, 25, 32). Cl. VIII. Apostol Constantin (E : 2191—97, 201, 02, 09—11, 13, 15—21, 23—27, 31, 32; 6554), Dragomir Luminiţa (E : 2206, 11, 15—18, 27, 32), Ganu Anghelache (E : 2184, 91, 92, 96, 97, 201, 02, 06, 210, 11, 14—17, 19, 20, 24, 25, 32; 6526), Lucaş Dumitru (E : 2184, 85, 92, 94, 96, 98, 99, 202, 06, 11, 1. 15, 17, 19), Lungu Togliati (E : 2202, 11—13, 16, 18, 20, 22, 26, 32), Morărescu Marioara (E : 2211, 13, 15, 17, 18, 20, 25, 27, 32), Nicolae Dumitru (E : 2199, 202, 15—18, 20, 26, 27, 32), Popescu Elena (E : 2206, 13, 15, 18, 21, 26—30, 32, 66), Zaharia Ion (E : 2184, 91, 92, 96, 96, 201, 02, 06). Cl. XI. Istrate I. Gh. (6604, 07, 09, 10, 12, 15, 16, 22, 25, 27, 30, 39).

AGNITA. Ş. m. cl. VII. Butnaru Doina (E : 2199, 202, 09, 10, 16—19).

AIUD. Ş. m. cl. VI. Maftei Doina (E : 2210, 15, 16, 18, 20, 32, 35, 38, 40, 43, 46, 47). Cl. XI. Molnar Oulian (6536, 40, 44, 46, 51, 57, 80, 83, 85, 601, 09, 15, 44).

ALBA IULIA. Şc. 8 ani cl. VI. Magda Nicolae (E : 2215—18, 20, 27, 38, 40, 43, 47). Ş. m. cl. IX. Miclea Cornel (E : 2207, 09; 6507, 10, 16, 19, 22, 27, 60, 86, 96, 601, 15). 27, 60, 86, 96, 601, 15).

ALBOTEŞTI. Şc. 8 ani cl. VIII. Badea Manuela (E : 2210, 11, 13—19).

ARAD. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VI. Stroescu Dan (E : 2200, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 21). Şc. 8 ani nr. 14 cl. VI. Ciucul Ionel (E : 2197, 98, 202, 1. 17, 24, 27, 32), Galea Anidora (E : 2198, 202, 13, 16, 17, 24, 32), Guza Dorina (E : 2197, 98, 202, 17, 20, 24, 27, 32), Novac Rodica (E : 2297, 98, 202, 16, 17, 27, 32).

Ş. m. 1 cl. X. Pîrvănescu Horia (6503, 07, 12, 15, 23, 25, 27, 29, 36, 58, 61, 63).

Ş. m. 2 cl. V. Podea Delia (E : 2201, 06, 11, 16, 20, 24, 27, 32). Cl. VII. Decis Florin (E : 2197—99, 201, 02, 05, 06, 09—11, 13, 14). Cl. VIII. Boşcaiu Voicu (E : 2198—200, 06, 10, 11, 13, 15—18). Cl. IX. Balla Ioan (6504, 07, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 28, 29, 31, 44), Laszlo Gh. (6503, 07, 10, 53, 63, 6001, 09, 15, 25, 31), Lucuţa Petru (6454, 55, 57—62, 82, 510, 15, 26, 34, 36). Cl. XI. Birişan Liviu (6554, 61, 63, 86, 87, 99, 601, 05, 09, 15), Hamarsky Iosif (6515, 17, 22, 2. 31, 32, 34, 40, 44, 46, 51, 54, 56, 57, 61, 63, 67, 79, 82).

AVRIG. Ş. m. cl. IX. Vintilă Maria (6420, 24, 27, 44, 59—61, 503, 19, 26, 27).

BACĂU. Ş. m. 1 cl. VIII. Knoll Raul (E : 2199, 201—03, 06, 08—11, 13, 15—18). Cl. IX. Ţarălungă Lucian (6507, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 83, 601, 15; E : 2228, 31). Cl. X. Ciodhină Silviu (6504, 12, 15, 25—27, 31, 36, 38, 44, 46, 59—63), Dogaru Angelica (6503, 04, 11, 16, 19, 22, 25—27, 29, 31, 60, 71, 83, 615), Ghelberg Emil (6504, 12, 15, 25—27, 31, 36, 38, 60, 83, 609, 15), *Nicău Anton* (6443—45, 47—50, 56—67, 69—71, 75, 76, 80, 82, 86, 91, 92, 503—07, 10—14, 19—27, 36, 39, 44—46).

Ş. m. 3 cl. X. Copran Florina (E : 2181; 6503—05, 07, 10, 18, 19, 22, 26, 27, 61, 63, 80, 81).

Ş. m. 4 cl. XI. Buruiană Marcel (6505, 07—09, 11—27, 29, 34, 36, 38, 39, 42, 45), Rosman Victoria (6504, 06, 10—16, 20, 21, 23, 24, 26, 49, 51, 63), Simsensohn Artur (6503—07, 10—16, 19—24, 36, 39, 46).

BAIA DE ARIEŞ. Ş. m. cl. IX. Iancu Dacia (E : 2209, 13; 6503, 10, 16, 19, 25, 32, 54, 61).

BĂICOI. Ş. m. Cl. VIII. Bercaru Florian (E : 2215, 17, 18, 20, 32, 33, 38, 40, 43).

BAIA MARE. Şc. 8 ani cl. 11 cl. VIII. Kopros Ştefan (E : 2198, 201, 03, 06, 14,

BAIA MARE. Şc. 8 ani cl. II cl. VIII. Kopros Ştefan (E : 2198, 201, 03, 06, 13, 16, 18, 20, 32).

Ş. m. 1 cl. IX. Fried Zoltan (E : 2209, 19, 28; 5410, 22, 25—27, 54, 61, 63, 71, 601, 09, 15), Sabău Ioan (E : 2207, 09, 19, 28, 29; 6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 32, 44, 54, 61, 601, 09, 15). Cl. XI. Botoş Clara (6562, 80, 82, 86, 99, 601, 05, 07, 09, 15, 19, 41, 44), Levendula Toma (5403, 04, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 36, 51, 83, 87, 615), Todea Felicia (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 26, 36).

Ş. m. 3 cl. IX. Aşpan Dan (6522, 23, 25, 26, 36, 39, 46, 53, 54, 58), Grosfeld Mihai (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 44, 54, 60—63, 80, 83—86, 97, 99, 601, 09, 15).

BECLEAN. Ş. m. cl. IX. Rusu Flaviu (6507, 10, 15, 16, 22, 54, 83, 86, 98, 601, 09, 15), Rudu Florin (6444, 51, 57—59, 61, 554, 59, 61, 63).

BEIUŞ. Ş. m. cl. VI. Covaci Iosif (E: 2210, 15—17, 20, 26, 32, 40, 47), Laslău Ioan (E: 2210, 15—17, 20, 26, 43, 47), Ungureanu Adriana (E: 2215, 17, 26, 31—33, 38, 40, 43).

BISTRIŢA. Ş. m. 1 co. IX. Cepănar Alexandru (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 61, 63, 609, 15), Limborean Maria (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34), Oltean Leonora (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34), Vadan Ioan (6503, 07, 10 19, 22, 25, 27, 54, 83, 86, 601, 09, 15), Vlasa Lenuţa (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34). Cl. X. Lucaci Rodica (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 609, 15), Lupşa Nicolae (6504, 07, 12, 15, 22, 23, 25—27, 31, 36, 45, 54, 63, 67. Cl. XI. Buta Grigore (6508, 13, 18, 25, 42, 46, 56, 65, 72, 79, 80, 82, 83), Negruşa Ioan (6507, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36—38, 40, 46, 49, 54, 56, 65, 67, 72, 74, 80, 82—84, 87, 96, 99, 601, 09, 15), Oanceea Ioan (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 46, 45, 65, 72).

Ş. m. 2 cl. XI. Raus Valentin (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 31, 36, 46).

BIRCA (Oltenia). Ş. m. cl. IX. Teodorescu Dalia (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 71, 83, 85). Cl. X. Mitu Ion (6510, 16, 19, 22, 25—27, 54, 59, 61, 601, 09, 15). Cl. XI. Teodorescu Ligiana (6504, 07, 10, 16, 17, 19, 25—27, 36, 38, 58, 71, 622).

BÎRLAD. Ş. m. 2 cl. VIII. Duda Doina (E: 2197, 203, 07, 08, 10, 11, 13, 15—20, 27, 32), Dumitriu Corina (E: 2198, 201, 06, 11, 13, 15, 16, 20, 22, 27, 32). Cl. IX. Ionescu V. Valeriu (E: 2207, 09, 19, 28, 29; 6510, 26, 27, 54, 61, 63, 601, 09, 15), Vasiliu Vasile (6225, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 99, 601, 15, 18). Cl. X. Găluşcă Dan (6444, 59—61, 67, 76, 510, 22, 25, 31), Sava Mircea (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 85, 88, 615; E: 2207). Cl. XI. Creţu Claudiu (6443, 55—64, 66, 92, 510).

Ş. m. 3 cl. VIII. Mihoci Ioan (E: 2199, 201, 02, 07, 10, 11, 15—17, 20, 36), Stirbu Mariana (E: 2197, 202, 06, 09, 10, 11, 13, 15—19), Stoica Emil (E: 2197—99, 201—06, 08—13, 15—17, 19, 20, 22, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 45, 46). Cl. IX. Cînepă Victor (E: 2203, 07, 09, 19, 28, 33, 36, 37, 45—47; 6461, 510, 16, 22, 26, 27, 61, 99, 609, 15), Nichifor Ionel (6510, 15, 16, 22, 25, 26, 29, 34, 61—63, 601, 09, 15, 16; E: 2203, 07, 09, 28, 31), Ulnic Maria (E: 2207, 09, 28, 31, 36, 37; 6526, 27, 61, 99, 601, 09, 15, 53, 57).

Complexul şcolar cl. IX. Stoide Maria (6510, 36, 61, 63, 609, 15; E: 2209, 28, 36, 37).

BOCŞA (Banat). Ş. m. cl. X. Blaj David (6504, 05, 10, 11, 14, 15, 19—21, 24, 55, 74, 601, 15).

BOLINTINUL DIN DEAL. Şc. 8 ani cl. VIII. Dobre Marieta (E: 2186, 92, 94, 96, 203, 04, 15, 18), Zlata Gh. (E: 2185, 41, 92, 94, 96, 203, 15, 18).

BORŞA (Maramureş). Ş. m. 2 cl. IX. Juga Grigore (E: 2233; 6510, 12, 15, 19, 22, 26, 54, 601, 09).

BOZOVICI (Banat). Ş. m. cl. VIII. Piescu Călina (E: 2202, 10, 11, 13, 15—17, 95). Cl. X. Lopăţiţă Tiberiu (6564, 80, 83, 86—88, 99, 605, 06, 15, 30, 49, 62, 63). Cl. XI. Mihail Alexandru (6459—62, 86, 504, 10, 12, 16, 22, 36, 54), Vlăuşescu Ilie (6553, 54, 58, 66, 67, 85, 86, 88, 99, 601, 15).

BOTOŞANI. Şc. 8 ani cl. VIII. Dale Ovidiu (E: 2220, 21, 24—26, 32, 33, 35, 38, 40, 42).

Ş. m. 1 cl. IX. Dincă Gheorghe (E: 2236; 6516, 19, 20, 22, 25, 27, 61, 601, 15), Hîncu Viorel (E: 2207, 09, 19, 36, 45; 6510, 19, 25, 26, 36, 615), Prinţ Paul (E: 2231, 36; 6510, 15, 16, 19, 25, 26, 63, 601), Ungureanu Carmen (E: 2236; 6510, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 29, 601). Cl. X. Lazarovici Hary (6507, 15, 19, 25, 27, 53, 54, 61, 63, 67, 79, 97, 601, 05, 15), Vexler Dan (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 54, 61, 63, 69, 79, 83, 601, 15).

Ş. m. 2 cl. VII. Nichita Dumitru (E: 2192, 93, 206, 09, 16, 17, 20, 22).

BRAD (Hunedoara). Şc. 8 ani cl. VI. Fornade Cornelia (E: 2201, 02, 06, 10, 16, 17, 20, 24, 32). Cl. VII. Năstăsoiu Lidia (E: 2198, 202, 06, 10, 11, 1318, 20, 25, 32, 33, 35, 38, 40, 42—44).

BRANIŞTEA (Galaţi). Şc. 8 ani cl. VIII. Giurgea C. Iacob (E: 2212, 13, 15, 16, 18—22, 24, 29, 32).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). Ş. m. cl. X. Mincă Vasile (6503, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 71, 83, 84, 99, 601, 09, 15), Ştefănescu Călin (6507, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25, 26, 33, 34, 88, 99, 601, 09, 15).

BRAŞOV. Şc. 8 ani nr. 3 cl. VIII. Şluşaru Ileana (E: 2210, 19, 23, 27, 40, 42, 4. 45—47).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Vătui Lucian (E: 2184, 85, 90—202, 04, 06, 08).

Şc. 8 ani nr. 6 cl. VIII. Vasilovici An (E: 2210, 15, 17, 18, 20, 28, 32, 34, 36, 42, 43).

Şc. 8 ani nr. 12 cl. VI. Guţu Anca (E: 2197—99, 201, 06, 10, 11, 12, 15, 18).

Ş. m. 1 cl. IX. Bătătorescu Anton (6503, 25, 27, 28, 53, 54, 59, 86, 97, 99, 601, 15).

Cl. XI. Bătătorescu Cristina (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 51, 61, 63, 83, 84).

Ş. m. 3 cl. IX. Mihai Magdalena (E : 2207, 09; 6503, 07, 10, 16, 22, 25, 26, 54, 58, 61, 63, 601), Reinisch Felicia (E : 2207, 09; 6503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 31, 39, 44, 54, 58, 60, 61, 63, 69, 71, 83—85, 99, 601, 15).

Ş. m. 4 cl. VI. Nistor Andrei (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 31—33, 38, 40, 43, 47). Cl. X. Cluriu Mihai (6444, 57, 59, 61, 63, 507, 10, 16, 54, 58, 62, 63, 71), Trandafir Cristofor (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 54, 58, 61, 63, 67, 71). Cl. XI. *Marinov Cornel* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—27, 31, 34, 36, 44, 54—57, 60, 61, 65, 66, 71, 72, 74, 79—88, 96, 99, 601, 06, 07, 15, 16, 22, 30, 41, 48, 49, 61, 63, 64).

Ş. m. Unirea cl. IX. Zsido Agnes (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 31, 32, 61, 63). Cl. XI. Zsido Gyorgy (6504, 07, 10, 12, 13, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 26, 30, 36, 38, 39, 43, 46).

BRĂILA. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Chipirliu Gheorghe (E : 2210, 15, 19, 20, 22, 24, 27, 29, 32).

Şc. 8 ani nr. 4 cl. VIII. Cărbunaru Mihai (E : 2210, 11, 13, 15—20, 27).

Ş. m. N. Bălcescu nr. 2 cl. IX. Petride Horia (E : 2207, 10, 19; 6316, 19, 25, 26, 609, 15, 16). Cl. XI. Barasch Marian (6504, 07, 10, 12, 15—17, 87, 504, 19, 22, 23, 26, 34, 36, 46), Frangu Octavian (6508, 13, 17, 18, 32, 38, 45, 46, 49, 51, 54, 55), Grossu George (6513, 17, 18, 39, 43, 51, 54, 56—58, 74, 601), Lăzărescu Vasile (6513, 18, 39, 43, 51, 54—58, 65, 71, 78), Palade Florenţiu (6504, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 82, 83, 85, 87, 601, 09).

Ş. m. nr. 3 cl. IX. Pincu Mia (E : 2186, 87, 89; 6510, 25, 26, 44, 60, 61, 63). Cl. X. Bărbulescu Victoria (6510, 15, 61, 63, 82, 83, 87, 601, 09, 15). Cl. XI. Costin Roxana (6510, 19, 54, 61, 82—85, 87, 605, 08, 09, 15), Marinescu Virgil (6504, 07, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 58, 61, 63, 83, 84, 86, 601, 09), Pricop Viorel (6504, 10, 15, 19, 22, 36, 57, 83, 84, 85, 87, 88, 601, 09, 15, 26), Simulescu Rodica (6510, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 61, 63, 87, 609, 15).

BREAZA. Liceul militar D. Cantemir cl. X. Giubernea Gheorghe (6507, 12, 16, 19, 22, 25—27, 36, 54, 601), Matache Gheorghe (6457—61, 87, 507, 10, 16, 19, 22, 26, 58, 61), Tuican Ilie (6507, 10, 16, 19, 36, 63, 80, 83, 85, 615). Cl. XI. Berceanu Constantin (6441, 57—61, 63, 66, 82, 87, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 46, 51, 54, 57, 58, 62, 69, 72), Bisceanu Dumitru (6457—63, 66, 84, 92, 504, 10, 12, 19; 26, 38), Busuioc Mihai (6457—61, 63, 67, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 36), Clonţea Emanoil (6457, 59, 61—63, 66, 84, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 38), Coman Gheorghe (6457—61, 63, 66, 84, 92, 504, 10, 12, 23, 26, 54, 80), Filimon Nicolae (6503, 07, 17, 18, 25, 27, 30, 31, 34, 38, 40, 43—45), Mandache Ion (6504, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 36, 51, 82, 83, 85—87, 615), Mociorniţă Ionel (6430, 58, 59, 61, 66, 71, 87, 504, 07, 10, 19, 23, 26, 54), Năstase Dumitru (6504, 10, 22, 57, 58, 72, 99, 601, 09, 15), Pavel Teodor (6504, 10, 15, 22, 57, 58, 62, 601, 09, 15).

BUCUREŞTI. Şc. 8 ani nr. 11 cl. VII. Necula A. G. (E : 2185, 90—93, 95, 97, 98, 200—02, 06, 10, 11, 15—18).

Şc. 8 ani nr. 71 cl. VIII. *Sergiescu Vlad* (E : 2198—20. 06, 07, 10—27, 31—33, 35, 42, 43, 47, 519, 22, 26).

Şc. 8 ani nr. 75 cl. VII. Mărculescu Consantin (E : 2215, 16, 18, 19, 24, 25, 40, 43).

Şc. 8 ani nr. 80 cl. VIII. Lazăr Gabriel (E : 2210—14, 16—19).

Şc. 8 ani nr. 114 co. VIII. Mănescu Antoaneta (E : 2198—200, 10, 11, 13, 16, 17, 20, 24, 27, 32).

Şc. 8 ani nr. 122 cl. VI. Brătescu Anca (E : 2197, 99, 201, 02, 06, 10, 15—18, 20, 23, 24, 27, 32).

Şc. 8 ani nr. 128 cl. VI. Bolintineanu Teodora (E : 2197, 201, 02, 06, 10, 15, 16, 18), Oprică Matei (E : 2185, 90—9. 95, 201, 02, 06), Stoian Toma (E : 2197, 201, 02, 06, 10, 15, 16, 18). Cl. VII. Gruia Vladimir (E : 2184, 90, 93—95, 201, 02, 06). Cl. VIII. Oprică Rodica (E : 2198—203, 06—09), Şerban Corina (E : 2184, 85, 87, 90—92, 94, 95, 97—99, 201—03, 06, 08, 09).

Şc. 8 ani nr. 146 cl. VII. Bădescu Smaranda (E : 2204, 05, 10, 11, 13—18, 20, 22—26, 31, 32; 6525, 83, 99).

Şc. 8 ani nr. 166 cl. VIII. Coman Florin (E : 2198, 99, 201, 03, 11, 13, 18, 20, 33, 40, 43).

Medic Florescu Dumitru (6504, 07, 23, 27, 36, 39, 46, 54, 61, 63, 71, 83, 85, 615).

Ş. m. 1 „N. Bălcescu" cl. IX Popescu Marian (6525—28, 36, 83—85, 615; E : 2228, 31), Tuliu Doina (6553, 54, 59, 60, 71, 601, 06, 09, 15, 18). Udrea V. Minea (6601, 09, 15, 57, 84, 722, E : 2288, 36, 37, 60, 61), Cl X. Cornea Mihaela (6510, 25, 27, 36, 60, 61, 69, 99, 601, 09, 15), Jilet-covici Iulian (6553, 61, 71, 83—85, 88, 626, 37, 48), Negulescu Doina (6510, 25, 27, 36, 60, 61, 63, 601, 08, 15).

Ş. m. 2 cl. X. Nicolae Dan (5403, 07, 10, 16, 22, 26, 27, 83, 86, 91, 609, 15), Tudorache Florica (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 63, 83, 86, 615).

Ş. m. 4 cl. X. Anastasiu Julieta (6510, 12, 19, 22, 25, 27, 63, 81, 83, 601, 05, 06, 10, 15), Dulgheru Mihai (6504, 07, 12, 15, 19, 22, 61, 70, 83, 86, 601, 05). Cl XI.

OSZ. KÖZP. MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1983

Iepure Ioan (6504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25—27, 65, 74).

Ş. m. 5 cl. XI. Sterni Ştefân (6503, 04, 07, 10, 12, 15—19, 22, 23, 25—32, 34—36, 38—40, 42—46).

Ş. m. 6 cl. X. *Gheorghiu Doina* (6443, 54, 57, 59, 61, 62, 510, 19, 22, 25, 26, 39, 44), 53—56, 59—61, 63, 66, 67, 71, 80, 82—88, 96, 99, 601, 06, 09, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 24, 25, 37, 39, 42, 48, 53).

Ş. m. 7 cl. VII. Redlingher Daria (E : 2197, 201, 10, 11, 13, 15—18). Cl. IX. Corodeanu Dinu (6504, 07, 10, 12, 15—19, 22, 23, 26).

Ş m. 8 cl. VIII. Cinteza Mircea (E : 2222, 25, 28, 31, 33, 36, 37, 42, 44, 45).

Ş. m. 10. cl. VI. Corîciu Ion Cezar (E : 217, 201, 20. 23—27,31, 32). Cl. XI. Radu Luminiţa (6521, 24, 36, 54, 57, 59, 61, 67, 71, 74, 644, 60).

Ş. m. 11 cl. IX. Pescaru Aurel (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 44, 54, 60, 62; E : 2209, 19), Vlădulescu Radu (6510, 19, 22, 26, 34, 58, 61, 63, 601, 15 ; E : 2209, 28). Cl. X. Luţaşu Viorel (6503, 04, 07, 12, 23, 25, 36, 39, 43, 51, 62, 73, 80, 82—86, 96, 99, 615), Teodorescu Valentin (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 43). Cl. XI. Vasilescu D. Petru (6467, 69, 80, 82, 84, 92, 525—27, 36, 37, 44, 46, 53, 57, 65).

Ş. m. 13 cl. IX. Arapu Bogdan (E : 2207, 09, 19, 34, 36, 45 ; 6525, 27, 60, 96, 615, 49). Cl. XI. Dumitraşcu Ion (6504, 10, 12, 13, 17, 18, 26, 51, 82, 615, 31, 32, 34).

Ş. m. 17 cl. IX. Arămaru Valentin (E : 2207, 09, 28, 31 ; 6507, 10, 16, 22, 25—27, 83—85, 609, 15), Nicolescu Ioana (6507, 10, 16, 53, 54, 58, 61—63, 67, 71, 79, 615 ; E : 2222). Cl. X. Botez Dan (6503—05, 07, 11, 12, 14—16, 18—28, 31, 35, 36, 39, 43, 45, 54, 55, 57—61, 63, 67, 74, 76, 77, 601, 09), Suciu Paul (6503, 04, 07, 10, 12, 14—16, 18—25, 27, 29, 31, 36, 38, 44, 45). Cl. XI. *Almer David* (6503—28, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 44—46, 49—51, 56, 58, 61, 62, 72, 74), Postolache Sorin (64444, 56 ,59, 61, 63, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 23).

Ş. m. 20 cl. X. Herling Mihail (6443—45, 57—59, 61—63, 72, 75, 76, 503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 31, 34, 37, 39, 44, 45, 48, 53, 58, 61, 63, 70, 71).

Ş. m. 21 Cl. IX. *Voiculescu Dan* (E : 2277—79 ; 6666, 67, 70—76, 78, 80, 81, 86, 92, 95, 96, 707, 09—11, 15, 16, 20, 22, 24—26, 28, 31, 33, 35, 36, 40, 41, 44, 48, 49, P, C).

Ş. m. 22 cl. X. Stoian M. Liviu (6459—61, 63, 67, 87, 92, 98, 507, 10, 12, 16, 19, 25, 39, 58), Velichi Stela (6444—46, 57, 59—61, 63, 65, 67, 75, 76, 82, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 61, 63). Cl. XI. *Ignea Silviu* (6503—07, 10, 17, 19,—27, 31, 32, 36, 38, 39, 43—46, 54, 57, 61, 63, 67, 74, 79, 72, 85—87, 621).

Ş. m. 23 cl. X. Băluţă Tudor (6510, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 36, 61, 63, 86), Măroiu Alexandru (6510, 16, 19, 22, 25—27, 36, 61—63, 71). Cl. XI. Bădescu Dumitru (6503, 04, 07, 10, 12, 15—17, 19, 22), Hreamăză Mioara (6445, 46, 48, 56, 59, 61, 63, 66, 67, 74, 76, 80, 82, 503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 36, 46, 51).

Ş. m. 25 cl. IX. Adam Nicolae Silviu (E : 2219, 28, 31 ; 6510, 26, 28, 54, 61, 63, 86, 601, 09, 15), Amzulescu Marieta (E : 2207, 09, 28, 31, 25—27, 601, 09, 15), Bota Cătălina (E : 2207, 19, 28, 31 ; 6526—27, 61, 63, 601, 09, 15), Ghiţoiu Aurora (E : 2207, 09, 08 ; 6525—28, 601, 09, 15), Parnuş Amalia (E : 2228, 36, 37 ; 6525—27, 29, 601, 15).

Ş. m. 26 cl. V. Barbu Ştefan (E : 2213, 16, 17, 20, 32, 33, 38, 40, 43, 47).

Ş. m. 28 cl. VII. Costea Constanţa (E : 2200—02, 06, 10, 11, 13, 16—20, 22, 24, 25, 27, 31, 32 ; 6599), Kleinemann Sergiu (E : 2198, 200—02, 06, 09, 16—18, 25, 61). Cl. VIII. Mureşan Mihaela (E : 2197—202, 06, 09, 11, 15—19). Cl. IX. Barna Gheorghe (E : 2208, 28, 36, 37, 45 ; 6510, 16, 22, 28, 83, 601, 09, 15), Bojan era (6510, 16, 19, 22, 25, 28, 36, 37, 83, 601), Ivănescu Aurel (E : 2228, 31 6599, 601, 09, 15, 18, 54, 62, 63), Kotavski Andrei (E : 2208, 28 ; 6507, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 83, 601, 09), Luncan Alexandru (E : 2209, 29, 36, 37 ; 6603, 09, 10, 15, 19, 22). Cl. XI. Benedikt George (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 36, 45), Trifănescu Bogdan (6504, 05, 07, 10, 12, 15—19, 22, 2. 36, 45).

Ş. m. 32 cl. VI. Dumitrescu Anca (E : 2192, 93, 95, 97, 201, 02, 06, 10). Cl. X. Profeta (6504, 36, 54, 60, 61, 63, 83—85).

Ş. m. 33 cl. IX. Tudora Marius (E : 2228, 36, 37 ; 6521, 61, 96, 99, 601, 09, 15, 18, 53).

Ş. m. 35 cl. VII. Corapcă Ileana (E : 2185, 92, 94, 95, 202, 06, 15—17). Cl. IX. *Manolescu Adrian* (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 34 ; 2184—87 90—202, 06—09).

Ş. m. 39 cl. VII. Giudelea Cristian (E : 2190—95, 97, 99—202, 06, 10, 11, 15, 16, 20), Orzănescu Maria (E : 2199, 210, 15—18, 20, 32), Petrescu Dragoş (E : 2187, 92—25, 202, 06), Rota Anişoara (E : 2111, 13, 15—18, 20, 32), State Florica (E : 2185, 91, 92, 95, 99, 202, 15, 18), Ursache Elena (E : 2201, 06, 10, 17, 18, 20, 32). Cl. IX. Gaciu Nimfodora (6507, 10, 16, 19, 22, 63, 71, 83, 601, 09, 15 ; E : 2209), Stoica Eugenia (E : 2209, 19 ; 650. 07, 10, 16, 19, 25—27, 61, 63). Cl. X. Mărăndici Ion (6503, 07, 10, 15, 16, 18, 19, 22, 25—29, 36, 43, 53, 54, 59—64, 67, 71, 79, 80, 83, 84, 96, 99, 601, 06, 07, 09, 11).

1965 JUL 14.

Ş. tehn. I. Rangheţ anul III. Sava Constantin (6504, 07, 12—15, 17—24, 26, 36, 46, 58, 61, 63).

BUHUŞI (Bacău). Ş. m. cl. XI. Schmidt Gabriel (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 26, 32, 38, 39, 46, 61, 63).

BUJOR (Galaţi). Ş. m. cl. XI. Emanoil Aurica (6504, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 54, 63, 67).

BURLA (Suceava). Şc. 8 ani cl. VII. Caunii Felicia (E : 2211, 13, 15—17, 19, 20, 31), Surieru Maria (E : 2211, 13, 15, 17—20, 231).

BUŞTENI (Ploieşti). Ş. m. cl. VII. Vlaicu Alexandra (E : 2197—203, 06, 13, 18, 20, 27, 32).

BUZĂU. Şc. 8 ani cl. VIII. Istrate Aurel (E : 2203, 10, 11, 13, 15—19).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 35—40 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat săarate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective. *Solicităm probleme interesante legate de practică.*

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. Înredactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care du dat o bună redactare şi o soluţie interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasa VIII-a, Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvatorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate şi citeţ semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunţaţi în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă tirmit odată cel puţin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicaţ şi să dea dresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată pentru anul 1965 (12 numere). Preţul este de 2 ei exemplarul (24 lei anual).

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicaţie şi altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Agonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.

I. P. „Informaţia" — c. 1006

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) iunie 1965

6

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

Anul XVI (II), nr. 6 — iunie 1965

SUMARUL

	Pag
1. Facultatea de matematică — mecanică Cluj de *D. D. Stancu*	241
2. Numere prime de *Gh. Opaiț*, Iași	243
3. Note matematice de *Cornel Popovici*, Timișoara	247
4. Probleme rezolvate (6419, 6420, 6421, 6449 6456, 6467, 6538, 6543; E: 2203)	248
5. Chestiuni de examen (6920—6956)	257
6. Probleme propuse (6957—6986)	264
7. Exerciții și probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2323—2335)	269
8. Cărți noi	271
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	272

ANUL XVI, 6 IUNIE

COMITETUL DE REDACȚIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Țiu C.*, profesor, redactor șef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Mușat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăvițu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor șef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Țene L.*, profesoară.

REDACȚIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — București

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondența privitoare la activitatea matematică a școlilor, precum și orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 6 iunie 1965

FACULTATEA DE MATEMATICĂ — MECANICĂ A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI" DIN CLUJ

Conf. D. D. STANCU, prodecanul facultății de matematică—mecanică, Cluj

Universitatea din Cluj ocupă un loc de seamă între instituțiile de învățămînt superior din țara noastră, ea contribuind cu mult succes la opera de pregătire de cadre tinere cu înaltă calificare, necesare dezvoltării activității culturale, științifice și economice din patria noastră. Această Universitate a fost înființată încă în anul 1872 și și-a adus un aport însemnat la dezvoltarea culturii și științei în Transilvania. Prin valorificarea moștenirii progresiste a instituțiilor de învățămînt superior din țara noastră, Universitatea din Cluj contribuie azi la ridicarea științei și culturii românești pe culmile cele mai înalte.

La Universitatea clujeană se studiază științele matematice încă de la înființarea ei. Aici au profesat o serie de matematicieni de seamă : D. Pompei, A. Angelescu, F. Riesz, L. Fejèr, N. Abramescu, P. Sergescu, Th. Angheluță, ș.a.

În prezent la Facultatea de matematică-mecanică își desfășoară activitatea de instruire a studenților și de cercetare științifică un număr însemnat de cadre didactice mai vîrstnice și mai tinere, cu o înaltă calificare și prestigiu pe tărîm științific. Dintre aceștia amintim pe următorii : acad. prof. G. Călugăreanu, acad. prof. T. Popoviciu, prof. emerit D. V.. Ionescu, prof. G. Pick, prof. G. Chiș, conf. F. Rado, conf. P. Mocanu, conf. E. Popoviciu, conf. C. Kalik, conf. P. Brădeanu, conf. A. Pal,ș.a.

Școala de analiză numerică condusă de acad. T. Popoviciu și cea de teoria funcțiilor condusă de acad. G. Călugăreanu, sînt cele mai puternice de acest fel din țară, bucurîndu-se de prestigiu și peste hotare.

În cadrul Facultății există în prezent trei secții : analiză matematică, mașini de calcul și mecanica fluidelor. În primii trei ani studenții primesc o pregătire generală comună, urmînd o serie de cursuri fundamentale de matematică, care sînt indispensabile pentru toți studenții. Împărțirea propriu-zisă pe secții se face la începutul anului IV. În consecință pregătirea de specialitate se face în ultimii doi ani de studii — anii IV și V.

Facultatea pregătește în primul rînd cadre calificate de profesori pentru învățămîntul mediu. Se pregătesc de asemenea și cadre de matematicieni necesare instituțiilor de cercetare, instituțiilor de învățămînt superior și diverselor sectoare ale industriei și economiei. Astfel absolvenții secției de mașini de calcul au posibilitatea să fie repartizați la centrele de

calcul înzestrate cu maşini electronice analogice şi cifrice. Aici ei pot lucra ca matematicieni care pregătesc algoritmii de rezolvare a problemelor ridicate de producţie, de economie, sau în calitate de programatori — necesari întocmirii programelor pentru maşinile electronice cifrice. Dezvoltarea rapidă a tehnicii electronice de calcul impune pregătirea unui număr sporit de cadre tinere bine calificate, în cadrul secţiilor de maşini de calcul.

Secţia nouă de mecanica fluidelor urmăreşte să pregătească cadre care să se preocupe de probleme teoretice ale hidraulicii şi hidrodinamicii, precum şi pentru învăţămîntul tehnic mediu şi superior în domeniul hidrodinamicii.

În cadrul cursurilor speciale, care se predau în anii IV şi V, se expun din cuceririle noi şi importante în diverse ramuri ale matematicii, contribuind la introducerea studenţilor în problemele cele mai actuale, cu scopul de a le trezi interesul şi a le da posibilitatea să înceapă ei înşişi să desfăşoare o activitate de cercetare ştiinţifică. Studenţii au posibilitatea ca să opteze pentru o parte (care consideră că îi interesează mai mult) din cursurile speciale facultative care se predau, în ultimii doi ani ,de către cadre consacrate în munca de cercetare ştiinţifică. Pe lîngă aceste cursuri studenţii trebuie să urmeze, de asemenea în ultimii doi ani, mai multe cursuri de specialitate corespunzătoare secţiei la care se află înscrişi.

Cercurile ştiinţifice studenţeşti, la care pot activa studenţii fruntaşi la învăţătură, au menirea de a-i atrage pe aceştia la activitatea de cercetare ştiinţifică, prin îndrumarea atentă a catedrelor pe lîngă care ele funcţionează. De obicei studenţii care activează în aceste cercuri reuşesc să abordeze teme din care pe urmă îşi elaborează lucrările de diplomă. Asemenea lucrări au meritul că de cele mai multe ori conţin rezultate originale şi interesante, care pot constitui preludiul unei activităţi ştiinţifice viitoare valoroase.

La Facultatea de matematică-mecanică a Universităţii din Cluj există în prezent şapte catedre, conduse de cadre cu înaltă calificare : Analiză matematică (acad. prof. T. Popoviciu), Teoria funcţiilor (acad. prof. G. Călugăreanu), Ecuaţii diferenţiale (prof. emerit D. V. Ionescu), Algebră (prof. G. Pick), Astronomie şi mecanică (prof. G. Chiş), Calcul numeric şi statistic (conf. D. D. Stancu) şi Geometrie (conf. A. Toth). Cadrele didactice de la aceste catedre au în primul rînd datoria de a contribui la buna desfăşurare a procesului instructiv-educativ a studenţilor. Prin participarea, în afara orelor de curs şi seminar, la adunările studenţilor, ei dau acestora o serie de îndrumări utile, atît pentru pregătirea lor profesională cît şi pentru formarea lor ca cetăţeni de nădejde ai patriei noastre.

Pentru documentarea cadrelor didactice şi studenţilor, Facultatea dispune de o bibliotecă foarte bine înzestrată, care are şi săli de lectură spaţioase. Această bibliotecă conţine un foarte mare număr de cărţi şi reviste de specialitate. Cu ajutorul revistelor de matematică „Studia Universitatis Babeş-Bolyai" şi „Mathematica" (editată în limbi străine de către Filiala Cluj a Societăţii de Matematică din R.P.R.), se fac în prezent schimburi cu peste 400 de reviste de specialitate din străinătate. Acestea permit ca atît cadrele didactice cît şi studenţii să se poată documenta temeinic în direcţia muncii ştiinţifice pe care o desfăşoară.

Prin orele de laborarator, lucrări practice în cadrul Observatorului Astronomic al Universităţii, practica pedagogică şi practica în producţie,

se caută să se dezvolte la studenţi deprinderi practice şi să se lege de activitatea practică cunoştinţele teoretice dobîndite la cursuri şi seminarii.

Ţinem să subliniem că actualul regulament de repartizare a burselor (şi locurilor în cămine), precum şi sistemul de repartizare în producţie, pe baza rezultatelor obţinute la învăţătură, constituie stimulente foarte preţioase în munca de pregătire profesională a studenţilor. Pe de altă parte numărul tot mai mare de manuale, care se editează acum, înlesnesc în mare măsură pregătirea de specialitate a studenţilor.

Clujul, vestit centru cultural al ţării noastre, oferă condiţii minunate de studiu, de lărgirea orizontului cultural şi artistic şi de participare la cele mai diverse activităţi sportive şi de recreiere în timpul liber. Studenţii Facultăţii de matematică-mecanică, în majoritate bursieri, locuiesc în trei din căminele noi ale minunatului Complex Social-studenţesc, dăruit studenţilor de către regimul nostru democrat-popular.

Studenţii clujeni, alături de toţi studenţii ţării noastre, au în prezent condiţii admirabile de studiu şi de trai, propice însuşirii de cunoştinţe temeinice din domeniul profesiunii alese, ceea ce le va permite să de vină intelectuali de nădejde ai patriei noastre.

NUMERE PRIME

Lector GHEORGHE OPAIŢ, Iaşi

În general, în manualele de aritmetică, numerele prime sînt studiate foarte sumar. Ele sînt considerate ca material ajutător în construirea multiplicativă a numerelor naturale. Teoria de sine stătătoare a numerelor prime este un domeniu special, mai puţin cunoscut, care excelează prin punerea de probleme uşor de înţeles, dar şi prin folosirea de metode ingenioase şi complicate în demonstrarea afirmaţiilor. Există şi probleme care-şi aşteaptă soluţia de cîteva secole, adică probleme deschise.

Aritmetica se ocupă, în primul rînd, cu studiul numerelor naturale. Noi vom presupune cunoscut şirul numerelor naturale, care este :

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Dacă completăm şirul numerelor naturale cu 0 şi cu numerele negative, obţinem mulţimea numerelor întregi. În mulţimea numerelor întregi se pot efectua, fără restricţie, adunarea, scăderea şi înmulţirea. Împărţirea nu este posibilă în toate cazurile, aşa că noţiunea de divizibilitate joacă un rol foarte important.

Numere prime. Un număr natural p, $(p \neq 1)$ se zice că este număr prim dacă nu are divizori proprii, adică dacă nu admite ca divizori decît pe 1 şi p. În cele ce urmează, numerele prime le vom nota cu :

$$p, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$$

sau cu :

$$p', p'', p''', \ldots$$

iar cu celelalte litere mici ale alfabetului latin vom însemna numerele naturale.

Dacă un număr natural admite divizori proprii, el se numeşte număr compus. În acest sens, numerele naturale se împart în :

a) Numărul 1.
b) Numere prime.
c) Numere compuse.

Şirul numerelor prime începe astfel :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Facem observaţia că 2 este singurul număr prim par.

Numărul numerelor prime. Vom demonstra că numărul numerelor prime este infinit. Să presupunem că p este cel mai mare număr prim pe care-l cunoaştem

Fie :

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p,$$

produsul tuturor numerelor prime $< p$. Numărul $P + 1$, adică :

$$P + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p + 1,$$

nu este divizibil prin nici unul dintre aceste numere prime :

$$2, 3, 5, 7, \ldots, p.$$

căci la fiecare împărţire rămîne restul 1. Deci sau $P + 1$ este el însuşi număr prim, şi este mai mare decît p, sau este divizibil printr-un număr prim $< p$. Cu aceasta am demonstrat că oricît de mare ar fi numărul prim p, se poate găsi un număr prim mai mare decît el. De ex.

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, \text{ număr prim.}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31, \text{ număr prim.}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211, \text{ număr prim.}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311, \text{ număr prim.}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509,$$

care este număr compus, dar nu admite decît factori primi mai mari decît 13.

O evaluare a celui de al n-lea număr prim. Notînd cu p pe cel de al n-lea număr prim din şirul numerelor naturale,

$$(p_1 = 2,\ n_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots),$$

şi bazîndu-se pe demonstraţia de mai sus, putem obţine o evaluare aproximativă a mărimii celui de al n-lea număr prim din şirul numerelor naturale, şi anume :

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$$

Vom demonstra afirmaţia prin metoda inducţiei complete. Într-adevăr, pentru $n = 1$ avem :

$$p_1 = 2$$

Pentru $n = 2$ avem :

$$p_2 = 3 < 2^2 = 4$$

Presupunînd că :

$$p_{n-1} \leqslant 2^{2^{n-2}},$$

să demonstrăm că :

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$$

Conform demonstrației de mai sus, p_n este cel mult egal cu cel mai mic divizor prim al lui

$$p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-1} + 1$$

și deci :

$$p \leqslant p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-1} + 1 \leqslant 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \ldots 2^{2^{n-2}} + 1.$$

De unde rezultă :

$$p \leqslant 2^{2^{n-1}}.$$

Neregularități în șirul numerelor prime. În distribuția numerelor prime în șirul numerelor naturale există mari neregularități. Există porțiuni din șirul numerelor naturale în care nu există nici un număr prim, cum este porțiunea dintre 13 și 17, (14, 15, 16), sau cea dintre 23 și 29, (24, 25, 26, 27, 28). O asemenea porțiune din șirul numerelor naturale se numește „lacună". Prima este o lacună de lungime 3, iar a doua o lacună de lungime 5. În realitate, în șirul numerelor naturale există lacune oricît de mari. Între cele m numere succesive :

$$(m+1)! + 2,\ (m+1)! + 3,\ \ldots,\ (m+1)! + m + 1,\ \text{(aici } n! =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n),$$

nu există nici un număr prim, întrucît primul se divide prin 2, al doilea prin 3, ..., și ultimul prin $m + 1$. Între numerele 1327 și 1361 există o lacună de lungime 34.

În șirul numerelor naturale există numere prime p și $p + 2$, cu distanța minimă de 2, cum sînt :

5 și 7, 11 și 13, 17 și 19, 41 și 43, 71 și 73 etc.

Asemenea numere prime se numesc gemene. Nu se știe încă dacă numărul perechilor gemene este finit sau infinit. Există 1224 perechi gemene pînă la 100 000 și 8 164 perechi gemene pînă la 1 000 000 ; iar numărul numerelor prime este de 9592 pînă la 100 000 și 78 498 pînă la 1 000 000.

În afară de numere prime gemene există și numere prime trigemene ; p, $p + 2$, $p + 6$, precum și numere prime patrugemene, p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, cum sînt :

10014491, 10014493, 10014497
294311, 294313, 294317, 294319
299471, 299473, 299477, 299479.

Numerele $p, p + 2, p + 4$ nu pot fi toate numere prime. Într-adevăr, orice număr prim p poate avea una din formele :

a) $p = 3k + 1$; b) $p = 3k + 2$.

În primul caz $p + 2$ este divizibil prin 3, iar în al doilea caz, $p + 4$ este divizibil prin 3.

Mai menționăm că numerele 2 și 3 formează singura pereche de numere prime vecine.

Teorema asupra progresiei aritmetice. Orice număr prim $p < 2$ poate fi pus sub una din formele :

$$4k + 1 \text{ sau } 4k + 3.$$

Într-adevăr, împărțind un număr natural la 4, avem următoarele posibilități :

$$1)\ n = 4k,\ n = 4k + 1,\ n = 4k + 2,\ n = 4k + 3.$$

În primul caz n este divziibil prin 4, iar în al treilea caz prin 2, așa că nu pot fi prime decît numerele de forma :

$$4k + 1 \text{ și } 4k + 3.$$

De exemplu :

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 = \text{și } 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

Progresia aritmetică :

$$N_k = 4k + 3, \text{ cu } k = 1, 2, 3, \ldots$$

conține o infinitate de numere prime. Într-adevăr, numerele de forma $4k + 3$ se pot pune și sub forma $4k - 1$, căci :

$$4k + 3 = 4k + 4 - 1 = 4 \cdot (k + 1) - 1 = 4h - 1, \text{ unde } h = k + 1.$$

Să considerăm acum numărul :

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 1,$$

unde intră ca factori toate numerele prime p cîte o singură dată, cu excepția lui 2 care intră de două ori. Numărul N este de forma $4k + 3$. Într-adevăr,

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 1 - 3 + 3 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 4 + 3 =$$

$$= 4 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 1) + 3 = 4k + 3.$$

unde $k = 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 1$. Acum sau N este un număr prim, sau se descompune în produs de factori primi mai mari decît p, dintre care cel puțin unul este de forma $4k + 3$, căci dacă toți ar fi de forma $4k + 1$, atunci și produsul lor ar fi de aceiași formă, căci :

$$(4k_1 + 1) \cdot (4k_2 + 1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 =$$

$$= 4 \cdot (4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k + 1.$$

În mod analog se demonstrează că mulțimea numerelor de forma $6k + 5$ conține o infinitate de numere prime. Într-adevăr, orice număr natural n se poate pune sub una din următoarele forme :

$$1)\ n = 6k,\ 2)\ n = 6k + 1,\ 3)\ n = 6k + 2,\ 4)\ n = 6k + 3,$$

$$5)\ n = 6k + 4,\ 6)\ n = 6k + 5.$$

Numerele din prima formă sînt divizibile prin 6, cele din forma a treia sînt divizibile prin 2, cele din forma a patra sînt divizibile prin 3, cele

din forma a cincea prin 2, așa că pot fi numere prime numai numerele de forma :

$$6k + 1 \text{ și } 6k + 5.$$

Numerele de forma $6k + 5$ pot fi puse și sub forma $6k - 1$, căci :

$$6k + 5 = 6k + 5 + 1 - 1 = 6k + 6 - 1 = 6 \cdot (k + 1) - 1 =$$

$$= 6h - 1 \text{ unde } h = k + 1.$$

Considerăm numărul :

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ \ldots \ p - 1,$$

care este de forma $6k + 5$, căci :

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ \ldots p - 1 - 5 + 5 =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ \ldots p - 6 + 5 = 6 \cdot (5 \cdot 7 \ \ldots p - 1) + 5 = 6k + 5$$

unde :

$$k = 5 \cdot 7 \ \ldots p - 1.$$

Acest număr nu poate fi un produs de factori numai de forma $6k + 1$, căci un astfel de produs ar fi de aceeași formă. Într-adevăr,

$$(6k_1 + 1) \cdot (6k_2 + 1) = 36k_1k_2 + 6k_1 + 6k_2 + 1 =$$

$$= 6 \cdot (6k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 6k + 1,$$

unde :

$$k = 6k_1k_2 + k_1 + k_2 .$$

Afirmațiile demonstrate mai sus sînt cazuri particulare ale unei teoreme foarte importantă a lui Dirichlet, și anume ale teoremei asupra progresiei aritmetice :

Orice progresie aritmetică :

$$a + k \cdot d, \ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

unde a și d sînt numere prime între ele, adică nu au nici un divizor comun, conține o infinitate de numere prime.

NOTE MATEMATICE

Asupra unei inegalități

În lucrarea „Curs special de algebră elementară" la pag. 231, *S. I. Novoselov* stabilește inegalitatea :

$$\frac{\sin A_1 + \sin A_2 + \ldots + \sin A_n}{n} \leqslant \sin \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}$$

pentru $A_1, A_2, \ldots, A_n$ arce arbitrare în intervalul $[0, \pi]$

Vom da mai jos o serie de aplicații ale acestei inegalități.

1. Dacă A_1; A_2 ... ; A_n sînt unghiurile unui poligon convex avem :

$$\sin A_1 + \sin A_2 + \ldots \sin A_n \leqslant n \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right).$$

Deoarece $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 180^\circ\ (n-2)$. Egalitatea are loc pentru $A_1 = A_2 = \ldots A_n$.

Făcînd pe $n = 3$ şi $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_3 = C$ obţinem cunoscuta inegalitate între unghiurile unui triunghi oarecare :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

În general :

$$\sin\frac{A_1}{k} + \sin\frac{A_2}{k} + \ldots + \sin\frac{A_n}{k} \leqslant n \sin\left(\frac{180^0}{k} - \frac{360^0}{nk}\right),$$

unde k este un număr natural.

Pentru $n = 3$ această inegalitate devine :

$$\sin\frac{A_1}{k} + \sin\frac{A_2}{k} + \sin\frac{A_3}{k} \leqslant 3 \sin\frac{60^0}{k},$$

unde A_1 ; A_2 ; A_3 sînt unghiurile unui triunghi oarecare.

2. Dacă a_1, a_2, ..., a_n sînt numere pozitive se cunoaşte inegalitatea :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Punînd în această inegalitate : $a_i = \sin\frac{A_i}{k}$, obţinem :

$$\operatorname{cosec}\frac{A_1}{k} + \operatorname{cosec}\frac{A_2}{k} + \ldots + \operatorname{cosec}\frac{A_n}{k} \geqslant \frac{n}{\sin\left(\frac{180^0}{k} - \frac{360^0}{nk}\right)}$$

Pentru $n = 3$ şi $k = 2$ şi făcînd înlocuirile : $A_1 = A$; $B_1 = B$; $C_1 = C$ obţinem :

$\operatorname{cosec}\frac{A}{2} + \operatorname{cosec}\frac{B}{2} + \operatorname{cosec}\frac{C}{2} \geqslant 6$; A, B, C fiind unghiurile unui triunghi oarecare, adică tocmai inegalitatea din *problema 6378*.

Popovici Cornel, elev Timişoara

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6419

Se dă un triunghi isoscel ABC. Fie D mijlocul bazei BC, E proiecţia lui D pe AC, iar F mijlocul lui DE. Să se arate că AF şi BE sînt perpendiculare între ele.

The American Mathematical Monthly

I. *Soluţie* dată de *Voiculescu Dan*, elev Bucureşti.

Se ştie că pentru ca BE şi AF să fie perpendiculare, este necesar şi suficient să arătăm că $AB^2 - AE^2 = BF^2 - FE^2$.

Avem :

$$AB^2 - AE^2 = AC^2 - AE^2 = (AD^2 + DC^2) - (AD^2 - DE^2) = DC^2 + DE^2$$

Pentru a arăta că $BF^2 - FE^2 = DC^2 + DE^2$ facem mai întîi o construcție auxiliară : ducem BE' perpendicular pe AC; $E' \in AC$. Vom avea $BE' = 2DE$ etc. Din formula medianei, avem :

$$BE^2 = \frac{BE'^2 + BC^2}{2} - \left(\frac{E'C}{2}\right)^2 = 2(DE^2 + DC^2) - EC^2$$

Ținînd seama de această relație și de $BD = DC$ formula medianei în triunghiul BED ne dă :

$$BF^2 = \frac{BE^2 + DC^2}{2} - EF^2 = DE^2 + DC^2 + \frac{DC^2 - EC^2}{2} -$$

$$- EF^2 = DE^2 + DC^2 - EF^2 + \frac{DE^2}{2} = DE^2 + DC^2 + EF^2$$

deci $BF^2 - EF^2 = DE^2 + DC^2$.

II. *Soluție* dată de *Dăncilă Ion*, elev Sibiu.

Vom așeza astfel triunghiul ABC în planul xoy
$A(0\,;\, a)$ $B(-b\,;\, 0)$; $C(b, 0)$ încît D va coincide cu originea axelor.

Dreapta AC are ecuația :

$y = -\frac{a}{b}x + a$ de unde dreapta DE perpendiculară pe AC are ecuația

$$y = \frac{b}{a}x$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile acestor două drepte AC și BE obținem coordonatele punctului E.

$$E\left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2}\,;\, \frac{b^2a}{a^2 + b^2}\right),$$

astfel ca dreapta BE are ecuația

$$y = \frac{b^2a}{2a^2b + b^3}(x + b),$$

sau

$$y = \frac{ab}{2a^2 + b^2}(x + b).$$

Punctul F, mijlocul segmentului DE are coordonatele

$$F\left(\frac{a^2b}{2(a^2 + b^2)}\,;\, \frac{b^2a}{2(a^2 + b^2)}\right),$$

de unde avem :

$$(AF) \equiv y - a = -\frac{b^2 + 2a^2}{ab}x.$$

Pentru că :

$$\frac{ab}{2a^2+b^2}\cdot\left(-\frac{b^2+2a^2}{ab}\right)+1=0$$

rezultă că dreptele AF şi BE sînt perpendiculare între ele.

III. *Soluţie* dată de *Popa Eugen*, elev Iaşi.

Fie H proiecţia lui B pe AC. Triunghiurile BHC şi ADE sînt asemenea, avînd $\sphericalangle BHC = \sphericalangle AED = 90°$, iar $\sphericalangle CBH = \sphericalangle DAE$, ca avînd laturile perpendiculare.

Putem scrie deci, $\frac{BH}{AE}=\frac{HC}{DE}$. Dar F şi E sînt mijloacele segmentelor DE, respectiv HC; ultima afirmaţie reiese din asemănare triunghiurilor BHC şi DEC, deci, putem scrie : $\frac{HC}{DE}=\frac{HE}{FE}=\frac{BH}{AE}$.

Ultimele egalităţi împreună cu faptul că $\sphericalangle BHE = \sphericalangle AEF = 90°$ demonstrează că triunghiurile AEF şi BHE sînt asemenea. Deci, $\sphericalangle FAE = \sphericalangle HBE$. Dar aceste două unghiuri au două laturi perpendiculare : AE şi BH, deci şi celelalte două laturi AF şi BE sînt perpendiculare, ceea ce demonstrează proprietatea enunţată.

Problema 6420

Se dă expresia

$$E=\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{2(1+x)^4}+\frac{1}{2(1-x)^4}.$$

a) *Să se arate că dacă* $x^2=1+2\sqrt{2}/3$ *avem* $E=9/2$; b) *să se calculeze valoarea lui* E *dacă* $x^2=1-2\sqrt{2}/3$.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie dată de *Popa Eugen*, elev Iaşi.

Avem :

$$E=\frac{(1-x)^3+(1+x)^3}{(1-x^2)^3}+\frac{(1-x)^4+(1+x)^4}{2(1-x^2)^4}=\frac{3+10x^2-5x^4}{(1-x^2)^4}.$$

a) Deoarece $x^2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $x^4=\frac{17}{9}+\frac{4\sqrt{2}}{3}$

iar :

$$E=\frac{3+10+\frac{20\sqrt{2}}{3}-\frac{85}{9}-\frac{20\sqrt{2}}{3}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^4}=\frac{\frac{32}{9}}{\frac{64}{81}}=\frac{9}{2}$$

b) Deoarece $x^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $x^4 = \frac{17}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

avem:

$$E = \frac{3 + 10 - \frac{20\sqrt{2}}{3} - \frac{84}{9} + \frac{20\sqrt{2}}{3}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^4} = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{64}{81}} = \frac{9}{2}$$

Deci și pentru $x^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$ avem $E = \frac{9}{2}$.

Problema 6421

Definim operația dintre două numere reale notată cu $*$ *astfel:*

$$a * b = a - \alpha b + \alpha ab$$

unde α *este un număr real, nenul dat. Dacă notăm cu* x_1 *soluția ecuației* $x * a = 0$, *iar cu* x_2 *soluția ecuației* $a * x = 2a - (\alpha + 1)x$, *să se arate că:*

$$x_1^n * (\alpha^{n-1} x_2^n) = x_1^{2n} \text{ și } (\alpha^{n+1} x_2^n) * x_1^n = \alpha^2 x_1^{2n}$$

unde n *este un număr natural:* $\alpha + 1 \neq 0$ *și* $1 + a\alpha \neq 0$.

D. M. Bătineț., student București

Soluție dată de *G. G. Niculescu*, student București. — Ținînd seama de felul cum a fost introdusă operația $*$ avem:

$$x - a\alpha + \alpha a x = 0 \text{ și } a - \alpha x + \alpha a x = 2a - (\alpha + 1)x$$

de unde scoatem că:

$$x_1 = \frac{a\alpha}{1 + \alpha a} \text{ și } x_2 = \frac{a}{1 + a\alpha}$$

Atunci:

$$x_1^n * (\alpha^{n-1} x_2^n) = \frac{\alpha^n a^n}{(1 + a\alpha)^n} - \alpha \cdot \alpha^{n-1} \frac{a^n}{(1 + a\alpha)^n} + \alpha \cdot \frac{a^n \alpha^n}{(1 + a\alpha)^n} \cdot$$

$$\cdot \frac{\alpha^{n-1} a^n}{(1 + a\alpha)^n} = \frac{\alpha^{2n} \cdot a^{2n}}{(1 + a\alpha)^{2n}} = x_1^{2n}$$

și:

$$(\alpha^{n+1} x_2^n) * x_1^n = \frac{\alpha^{n+1} \cdot a^n}{(1 + a\alpha)^n} - \alpha \cdot \frac{a^n \alpha^n}{(1 + a\alpha)^n} + \alpha \frac{\alpha^{n+1} \cdot a^n}{(1 + a\alpha)^n} \cdot$$

$$\cdot \frac{a^n \alpha^n}{(1 + a\alpha)^n} = \alpha^2 \frac{\alpha^{2n} a^{2n}}{(1 + a\alpha)^{2n}} = \alpha^2 x_1^{2n}$$

și cele două relații sînt demonstrate.

Problema 6449

a) *Să se stabilească identitatea*

$$E = \sin(4x - 10°)\cos(4x - 30°) + \sin(11x + 40°)\cos(11x + 60°) = \sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°).$$

b) *Dacă* $12° \leqslant x \leqslant 20°$ *să se arate că* $E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c) *Să se arate că pentru* $x = 20°$ *avem* $E = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Chițescu Ion*, cl X. S. m. 10 București.

a) Avem :

$$2E = \sin(8x - 40°) + \sin 20° + \sin(22x + 100°) - \sin 20° = \sin(8x - 40°) + \sin(22x - 260°) = 2\sin(15x - 150°)\cos(-7x + 110°) = 2\sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°),$$

de unde împărțind la 2 găsim :

$$E = \sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°).$$

b) Pentru $12° \leqslant x \leqslant 20°$ avem :

$$30° \leqslant 15x - 150° \leqslant 150°,$$
$$60° \leqslant 7x - 20° \leqslant 120°$$

de unde $\sin(15x - 150°) \geqslant \frac{1}{2}$ și $\sin(7x - 20°) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, înmulțind găsim

$$E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Pentru $x = 20°$ avem :

$$E = \sin 150° \sin 20° = \sin 30° \cos 30° = \frac{1}{2}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Problema 6456

a) *Să se demonstreze că dacă* x *este unghiul dat de relația* $\cos x = \cos\alpha \cos\beta$, *atunci are loc egalitatea :*

$$E = \operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{x+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\beta}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

b) *Unghiurile ascuțite ale unui triunghi* ABC, *dreptunghic în* A, *fiind* $\alpha = B$, $\beta = C$ *să se demonstreze că unghiul* x *de la punctul precedent este dat de relația :* $2\cos x = \cos(B - C)$ *și că expresia* E *devine :*

$$E = \frac{b^2}{(a+c)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2}.$$

O. Sacter

Soluție dată de *G. G. Niculescu*, București.

a) Avînd în vedere că :

$$\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\cos(u - v) - \cos(u + v)}{\cos(u - v) + \cos(u + v)}$$

avem :

$$E = \frac{\cos\alpha - \cos x}{\cos\alpha + \cos x} + \frac{\cos\beta - \cos x}{\cos\beta + \cos x} = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta} +$$

$$+ \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta} = \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta} + \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

deoarece avem formula cunoscută

$$\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = \operatorname{tg}^2\frac{u}{2}.$$

b) Avem :

$$\cos(B - C) = \cos B\cos C + \sin B\sin C = \cos B\cos C + \cos B\cos C = 2\cos x.$$

De asemenea :

$$E = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} + \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{a - a\cos B}{a + a\cos B} + \frac{a - a\cos C}{a + a\cos C} = \frac{a - c}{a + c} +$$

$$+ \frac{a - b}{a + b} = \frac{a^2 - c^2}{(a + c)^2} + \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \frac{b^2}{(a + c)^2} + \frac{c^2}{(a + b)^2}.$$

Problema 6467

Să se arate că :

$$\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x$$

galitate avînd loc pentru $x = \frac{k\pi}{2}$ *unde* k *este un număr întreg.*

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București.

Deoarece $|\cos x|$ este cuprins între 0 și 1 rezultă

$$0 \leqslant 1 - |\cos x| \leqslant 1 - |\cos x|^2 = \sin^2 x.$$
$$1 + |\cos x| \geqslant 1$$

de unde deducem :

$$\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x.$$

Pentru egalitate este necesară condiția :

$$|\cos x| = \cos^2 x \text{ adică, } x = \frac{k\pi}{2}.$$

Problema 6538

Notațiile fiind cele obișnuite, să se demonstreze că în triunghiul ABC există relația :

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c)}{8R^5}.$$

Gh. Popescu, profesor Lugoj

Soluție dată de *G. G. Niculescu*, București.

Notînd cu Δ determinantul din enunț, vom avea :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ 2\sin A\cos A & 2\sin B\cos B & 2\sin C\cos C \\ \sin A\,(4\cos^2 A - 1) & ;\sin B(4\cos^2 B - 1) & \sin C\,(4\cos^2 C - 1) \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sin A\sin B\sin C \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 4\cos^2 A - 1 & 4\cos^2 B - 1 & 4\cos^2 C - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\sin A\sin B\sin C \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos^2 A & \cos^2 B & \cos^2 C \end{vmatrix} =$$

$$= 8\sin A\sin B\sin C(\cos B - \cos A)(\cos C - \cos A)(\cos C - \cos B),$$

deoarece ultimul determinant obținut este un determinant Vandermonde.

Se arată ușor că :

$$\cos B - \cos A = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}(\sin A - \sin B)$$

și analoagele, astfel că :

$$\Delta = 64\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}(\sin A - \sin B)(\sin A - \sin C)(\sin B - \sin C)$$

În fine, mai ținem seamă că :

$$\Pi\cos\frac{A}{2} = \frac{a+b+c}{8R}$$

și de teorema sinusului și va rezulta :

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2(a-b)\cdot(a-c)(b-c)}{8R^5}.$$

Problema 6543

Să se calculeze numărul natural

$$N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

știind că 3N, 4N și 25N au respectiv cu, 15; 24 și 40 divizori mai mulți decît N.

Boldea Gheorghe, Timișoara

Soluție dată de *Parascan Ilie*, Moinești, Bacău. — Este cunoscut faptul că un divizor al unui număr nu are alți factori primi decît factori numărului cu exponenții mai mici sau egali. Pentru a găsi deci divizorii unui număr vom combina factorii primi în toate modurile posibile.

Exemplu. $N = 200$, $N = 2^3 \cdot 5^2$; N se divide cu numerele : 1, 2, 2^2, 2^3; cu numerele 1, 5, 5^2 și cu toate produsele obținute înmulțind un număr din grupa întîia cu un număr din grupa a doua. Pentru a găsi toți divizorii înmulțim pe rînd fiecare număr din prima grupă cu fiecare număr din grupa a doua (ca la polinoame) :

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)$, în total 12 termeni $(3 \cdot 4 = 12)$.

Deci, acest număr are 12 divizori :

$$1,\ 5,\ 5^2 = 25;\ 2 \cdot 1 = 2;\ 2 \cdot 5 = 10;\ 2 \cdot 5^2 = 50;\ 2^2 \cdot 1 = 4;$$
$$2^2 \cdot 5 = 20;\ 2^2 \cdot 5^2 = 100;\ 2^3 \cdot 1 = 8;\ 2^3 \cdot 5 = 40;$$
$$2^3 \cdot 5^2 = 200.$$

Vom considera acum cazul general .Presupunem că N poate fi descompus în factori primi în felul următor :

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}.$$

Formăm următorul produs :

$$(p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot (p_2^0 + p_2^1 + p_2^2 + \ldots p_2^{\alpha_2}) \ldots$$
$$\ldots (p_i^0 + p_i^1 + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i})$$

cu termenul general : $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i}$.

Toți divizorii lui N sînt cuprinși în această formulă, unde $0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$.

Dacă toți β_j sînt nuli obținem divizorul 1.

Dacă $\beta_k = \alpha_k$ pentru orice k obținem divizorul N, însuși numărul.

Dacă unii β sînt nuli, înseamnă că factorii respectivi nu se află în divizor, el cuprinde efectiv numai factorii pentru care $\beta > 0$.

Să vedem cîți divizori există. Parantezele în ordinea în care sînt scrise, au următorul număr de termeni : $\alpha_1 + 1$, $\alpha_2 + 1$, $\alpha_3 + 1$, ..., $\alpha_i + 1$. Prin urmare, totalul de termeni, adică de divizori, va fi dat de produsul :

$$n = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_i + 1).$$

Iată acum soluţia problemei :

$$N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \quad \text{cu } (x+1)(y+1)(z+1) \text{ divizori}$$
$$3N = 2^x \cdot 3^{y+1} \cdot 5 \quad \text{cu } (x+1)(y+2)(z+1) \quad ,,$$
$$4N = 2^{x+2} \cdot 3^y \cdot 5^z \quad \text{cu } (x+3)(y+1)(z+1) \quad ,,$$
$$25N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z+2} \quad \text{cu } (x+1)(y+1)(z+3) \quad ,,$$

Obţinem următorul sistem de ecuaţii :

$$(x+1(y+2)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 15$$
$$(x+3)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 24$$
$$(x+1)(y+1)(z+3) = (x+1)y+1)(z+1) + 40$$

care este echivalent cu sistemul :

$$xz + z + x = 14$$
$$yz + z + y = 11$$
$$xy + x + y = 19$$

care se rezolvă substituindu-l pe x şi y din primele două ecuaţii, în funcţie de z :

$$x = \frac{14 - z}{z+1}, \quad y = \frac{11 - z}{z+1}$$

care înlocuite în ecuaţia a treia ne dă : $z^2 + 2z - 8 = 0$ cu soluţie acceptabilă $z = 2$. Deci, $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$; prin urmare $N = 2^4\, 3^3 \cdot 5^2$ adică $N = 10.800$.

Problema E : 2203

Cercurile O şi O' sînt tangente exterior în A. Diametrul cercului O este AB iar cel al cercului O' este AC. Din B se duce o tangentă la cercul O', iar din C o tangentă la cercul O, ambele tangente fiind de aceeaşi parte a liniei centrelor. Ştiind că raza cercului O este de 5 cm, iar a cercului O' de 4 cm, să se calculeze unghiul pe care îl formează întretăierea celor două tangente.

Victor Florescu, R. Vîlcea

Soluţie dată de *Dumitrescu Marian*, cl. VIII S. m. 1 Ploieşti. Tangenta din B la cercul O' este perpendiculară pe raza $O'T'$, iar tangenta din C la cercul O este perpendiculară pe raza OT. Notînd cu E punctul unde tangenta din C taie cercul O' şi cu F punctul unde tangenta din B taie cercul O avem AE perpendicular pe TC şi AF perpendicular pe $T'B$. Rezultă că AE este paralelă cu OT şi AF este paralelă cu $O'T'$.

Din asemănarea triunghiului CAE cu triunghiul COT calculăm pe :

$$AE = \frac{CA \cdot OT}{CO} = \frac{8 \cdot 5}{13} = \frac{40}{13} \text{ cm},$$

şi la fel calculăm pe :

$$AF = \frac{BA \cdot O'T'}{BO'} = \frac{10 \cdot 4}{14} = \frac{20}{7} \text{ cm}.$$

Din triunghiurile dreptunghice CAE și BAF, la care se cunosc ipotenuzele și cîte o catetă, prin funcția sinus :

$$(\sin C = \frac{\frac{40}{13}}{8} = \frac{5}{13} = 0{,}934\,;\ \sin B = \frac{\frac{20}{7}}{10} = \frac{2}{7} \cong 0{,}287)$$

se vede că unghiul C este aproximativ de 22°30′, iar unghiul B de aproximativ 16°30′.

Notînd cu D punctul de intersecție a celor două tangente și considerînd triunghiul BDC, unghiul D este de $180° - (16°30' + 22°30') = 141°$.

La același rezultat se ajunge dacă prin funcția cosinus se caută unghiurile A_1 și A_2, unghiul D fiind egal cu suma lor (patrulaterul $AFDE$ este inscriptibil, avînd două unghiuri opuse drepte).

CHESTIUNI DE EXAMEN

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1965
Etapa locală — Centrul Iași
Clasa a IX-A

6920. Se consideră ecuația :

$$2ax^4 - (2a^2 + 5a + 2)x^3 + (5a^2 + 4a + 5)x^2 - (2a^2 + 5a + 2)x + 2a = 0.$$

a) Să se rezolve ecuația și să se arate că rădăcinile ei se pot exprima în funcție de a, fără radicali ;

b) Să se determine $a > 2$, astfel ca rădăcinile ecuației să fie în progresie geometrică,

c) Să se determine și celelalte condiții pentru a, astfel ca rădăcinile ecuației să poată forma o progresie geometrică.

Vasile Dumitrache, profesor Bîrlad

6921. Se consideră trapezul $ABCD$. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor se duce MN paralelă la AB (N fiind situat pe baza mare BC).

1. Cunoscînd AB, AC și $\sphericalangle BAC$ să se construiască trapezul $ABCD$ pentru care $AO = ON$.

2. În condițiile de la punctul precedent să se arate că :

$$\text{a) } \frac{AB}{AC} = \frac{MD}{MA}\,;\ \text{b) } \frac{1}{ON} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\,;$$

$$\text{c) } \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{2EF}{AD}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right)$$

unde EF reprezintă linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

Felicia Muraru, profesor Iași

Clasa a X-a

6922. Se consideră :

$$a_k = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot \frac{1}{k \cdot k!}; \quad k \geqslant 2.$$

a) Să se demonstreze că : $a_k = \frac{1}{(k-1) \cdot k!} - \frac{1}{k \cdot (k+1)!}$.

b) Să se calculeze $\sum_{k=2}^{n} a_k$.

c) Să se determine valorile lui n pentru care $\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} a_k < 10^{-6}$.

Traian Cohal, profesor Iași

6923. Un triunghi echilateral ABC cu latura l se proiectează pe un plan, astfel că niciunul din punctele triunghiului nu este situat în acest plan. Se obține prin proiecție triunghiul $A'B'C'$.

a) Știind că $AA' = 2a$, $BB' = a$, $CC' = 3a$ $(l > 2a)$ să se demonstreze că triunghiul $A'B'C'$ este isoscel.

b) Să se arate că înălțimile corespunzătoare laturilor BC și $B'C'$ sînt egale.

c) Să se calculeze aria triunghiului $A'B'C'$ în funcție de a și l.

d) Să se afle unghiul plan al diedrului determinat de planele ABC și $A'B'C'$ atunci cînd $3l^2 = 16a^2$.

I. Teodorescu, profesor Galați

6924. Un cerc cu raza 1 se împarte în n părți egale $(n > 6)$. Se notează punctele de diviziune cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Fie B_1 punctul situat pe OA_2 astfel ca $OB_1 = A_1B_1$, B_2 punctul situat pe OA_3 astfel ca $OB_2 = B_1B_2$, etc, B_n punctul situat pe OA_1 astfel ca $OB_n = B_{n-1}B_n$. Să se, calculeze suma S_n a ariilor triunghiurilor OA_1B_1, OB_1B_2, $OB_2B_3, \ldots,$ $OB_{n-1}B_n$.

* * *

Clasa a XI-a

6925. Se consideră funcția

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 1.$$

a) Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ este monoton și mărginit și apoi să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

b) Să se demonstreze că dacă $f(x_1) = f(x_2)$; $(x_1 \neq x_2)$ atunci x_1 și x_2 sînt simetrice față de $-\frac{2}{3}$ și reciproc; apoi, să se împartă R în submulțimi astfel ca pe fiecare din ele $f(x)$ să fie inversabilă.

c) Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln f(x)}{x^2 + 2x}.$$

d) Să se arate că oricare ar fi $x_1 \in R$, $x_2 \in R$ avem:

$$f(px_1 + qx_2) \leqslant pf(x_1) + qf(x_2)$$

unde p și q sînt două numere pozitive și satisfac relația $p + q = 1$.

Traian Cohal, profesor Iași

6926. Se consideră punctele $A(a, 0)$, $B\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. $I\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$. Se prelungește BC cu segmentul $CD = CA$, punctul C fiind așezat între B și D. Notăm prin L mijlocul segmentului BC și prin I_1, I_2, I_3 respectiv proiecțiile punctului I pe AB, BC, CA. Să se arate:

a) Punctele I_1, I_2, I_3 sînt coliniare; b) Paralela prin B la AD, bisectoarea interioară unghiului CI_1L și AC sînt concurente într-un punct E; c) Oricare ar fi punctul P pe CI_1 avem aria $PCD = 3$ aria PCE.

Traian Cohal, profesor Iași

Anul I — școli profesionale

6927. Se dă expresia:

$$\left[\frac{2y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x + y}{2(x - y)} - \frac{x - y}{2(x + y)}\right] \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} - 1\right) \cdot \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{xy}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă. b) Să se afle valoarea numerică a acestei expresii pentru $x = 1/3$; $y = 1/2$.

I. Zabava, profesor Iași

6928. În planul de sistematizare a unui oraș este proiectată schimbarea unei piețe dreptunghiulare în una pătrată, al cărei contur este pătratul înscris în cercul circumscris conturului vechii piețe, iar în centrul pieții se prevede construirea a trei fîntîni arteziene la egală distanță una de alta.

Cunoscînd că vechea piață avea lungimea de 2,4 ori mai mare ca lățimea și perimetrul de 340 m, iar cercul ce trece prin centrele fîntînilor arteziene are diametrul de 5 ori mai mic decît lățimea vechii piețe, să se afle: 1) perimetrul noii pieții, b) distanța între centrele a două fîntîni arteziene.

I. Zabavă, profesor Iași

Anul II — școli profesionale

6929. Să se efectueze:

$$\frac{\left[\left(\sqrt{a^2} + \sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{2^2}\right)^2\right]^2}{4a^2 - 4a + 1} \cdot \frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt{a}}{2a^2 - a}$$

6930. Dintr-un helicopter se vede lățimea unui rîu sub un unghi de 60°. Depărtarea helicopterului față de malurile rîului fiind de 5 dam să se afle : a) lățimea rîului ; b) înălțimea la care se află helicopterul față de nivelul apei rîului.

Gh. Dochițeanu, Iași

Anul I — Școli tehnice de maiștri

6931. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}.$$

Mitrofan Guja, profesor Iași

6932. Două ateliere au lucrat într-o lună 740 piese. În luna următoare primul atelier a lucrat cu 16%, iar al doilea cu 20% mai multe piese, dînd astfel în luna a doua împreună, 876 piese. Cîte piese a lucrat fiecare atelier în luna a doua?

6933. Secțiunea verticală făcută în acoperișul unei case are firm a unui triunghi dreptunghic ABC, în care ipotenuza BC reprezintă lățimea tavanului. Se dă $AB = 4{,}8$ metri și $AC = 6{,}4$ metri. Să se afle : a) înălțimea AD a acoperișului ; b) distanțele de la punctul D la AB și AC.

Mitrofan Guja, Iași

Anul I școli pedagogice și cl. VIII-a curs seral

6934. Să se efectueze :

$$E=\frac{\dfrac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\dfrac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}}{\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}\right):\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)^2}+\frac{2}{x^3-y^2}.$$

Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $x=-1/2$; $y=1/3$.

6935. Pe catetele AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ și $ACFG$. Să se arate că :

a) Prelungind înălțimea AK a triunghiului dat ea taie segmentul EG în punctul M, mijlocul său ; b) Suma distanțelor vîrfurilor D și F la ipotenuza BC prelungită este egală cu lungimea lui BC ; c) Bisectoarele interioare ale unghiurilor E și G din trapezul care se formează unind aceste puncte cu proiecțiile lor pe ipotenuza BC se taie într-un punct P situat pe MK.

N. Colibaba, Iași

Problemele date la admiterea în Institutul Politehnic Iași — 1964

6936. Într-un triunghi ABC se dau : $AB = 10$ cm, $BM = 5$ cm, $MC = 2$ cm.

M fiind punctul de intersecție a bisectoarei unghiului A cu latura BC. Din vîrful C se duce o paralelă la bisectoarea AN și din vîrful A o paralelă la latura BC, cele două paralele intersectîndu-se în punctul D.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, b) Să se calculeze proiecția ortogonală a laturii AB pe latura BC, c) Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

6937. Se dă o sferă de rază $R = 30$ cm. Se secționează sfera cu un plan P situat la o distanță egală cu $0{,}5R$ de centrul O al sferii. Să se calculeze : a) aria laterală a conului cu vîrful în centrul sferei și care are ca bază cercul obținut prin secționarea sferei cu planul P; b) aria calotei sferice adiacentă bazei conului; c) volumul conului drept circumscris sferei, a cărui bază este paralelă cu planul P, raza bazei fiind egală cu $\frac{3}{2} \cdot R$.

6938. Să se rezolve ecuația

$$2^x + 2^{x+1} = 3^x$$

6939. Se dă ecuația

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}^2 x - 4(p+1)\operatorname{tg} x + q(p+1)^2 = 0$$

unde p și q sînt 2 parametri reali.

a) Să se discute soluțiile ecuației în $\operatorname{tg} x$ pentru toate valorile posibile ale parametrilor,

b) Să se rezolve ecuația în cazul cînd $p = \cos 2\alpha$ și $q = 4\cos 4\alpha$, (α este dat).

c) În particular, să se găsească rădăcinile ecuației (1), cînd în (b) luăm $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

6940. Fie ecuația

$$\text{(1)} \qquad (1+u)x^2 - ux - 2u = 0,$$

unde u este un parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute ecuația (1), presupunînd $u \neq -1$.

b) Să se arate apoi că dacă u tinde către -1, una dintre rădăcinile ecuației (1) tinde către rădăcina ecuației care se obține din (1) egalînd în ea pe u prin -1.

c) Presupunînd că $u \geqslant 0$, să se arate că $S = x_1 + x_2$ este funcție strict crescătoare de u și avem $0 \leqslant S < 1$.

6941. Raportul dintre aria laterală și aria totală a unui con circular este 5/8.

a) Să se demonstreze că raza valorează 3/5 din generatoare.

b) Să se determine aria secțiunii făcută prin conul dat printr-un plan paralel la bază și trecînd la distanța de 1 cm de vîrful conului, dacă raza conului se ia egală cu 3 cm.

c) Să se determine volumul trunchiului de con determinat de planul de la punctul precedent.

6942. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, în care o catetă $AB = 48$ m și ipotenuza $BC = 60$ m. Se prelungește cateta AC astfel încît AO

$= 122$ m (punctul fiind situat între punctele A și O). Prin punctul O se duce paralela la ipotenuza CB. Pe această paralelă se consideră punctul D, astfel ca $DC = DB$.

a) Să se arate că triunghiurile COB și CDB au ariile egale.
b) Să se găsească aria patrulaterului $ABCD$.
c) Să se calculeze celelalte laturi ale patrulaterului $ABCD$.

Facultățile Hidrotehnică și Industrie Ușoară — Cursuri de zi

6943. Se dă ecuația:

$$2(m+1)\cos 2x + 4m \sin x - 3m - 1 = 0$$

a) Să se transforme într-o ecuație de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ și să se afle cele două valori ale lui $\sin x$.

b) Să se determine valorile parametrului m pentru care valorile corespunzătoare ale lui $\sin x$ există.

c) Să se calculeze valorile lui x pentru $m = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$,

6944. Se dă funcția: $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x - 1}$,

a) Să se determine coeficienții p și q astfel încît pentru $x = 2$ valoarea funcției să fie egală cu 8, iar valoarea derivatei să fie egală cu -3.

b) Să se afle în acest caz valorile extreme ale funcției.

c) Să se determine asimptotele curbei $y = f(x)$, fără a se construi graficul funcției.

6945. Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a. în vîrful A se duce perpendiculara pe latura AC care este întîlnită în punctul D de paralela la AB dusă prin vîrful C.

Să se arate că: a) mediana AM a triungiului CAD este paralelă cu BC.

b) Aria triunghiului CAD este de două ori aria triunghiului echilateral și

c) să se calculeze lungimea segmentului BD în funcție de raza cercului circumscris triunghiului echilateral.

6946. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$$

6947. Se consideră funcția

$$f(x) = \cos 2x - m\cos x + 1 - 3m^2$$

unde m este un parametru real.

a) Să se stabilească valorile lui „m" pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluții și să se facă discuția corespunzătoare.

b) Să se efectueze graficul lui $f(x)$ pentru $m = 0$ și

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

6948. Fie $P(x) = x^3 - 3x + 2$

1. Să se arate că avem o identitate de forma

$$P(x) \equiv ax(x-b)^2 + c(1-x)(x-b)^2 \tag{1}$$

unde a, b, c, sînt numere care se vor determina.

2) Din forma polinomului din dreapta al identității (1) să se deducă fără calcul că ecuația $P(x) = 0$ are o rădăcină dublă care se va determina și apoi să se deducă valorile lui a, b, c și pe această cale.

3) Să se găsească intervalele de monotonie ale funcției $P(x)$ și de asemenea să se determine sensul concavității curbei $y = P(x)$, fără a construi curba.

d) Să se arate pe cale de calcul că dacă.

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

atunci

$$P\left(\frac{(x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2}, \tag{2}$$

inegalitatea (2) fiind strictă, cu excepția cazului cînd $x_1 = x_2$

Facultățile Mecanică, Electrotehnică și Construcții
Cursuri serale

6949. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ mx + y + z &= 0, \\ x + y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine parametrul real m astfel încît soluția găsită să reprezinte trei numere în progresie aritmetică.

6950. Să se rezolve ecuația:

$$\cos 2x = \sin x$$

6951. Să se determine extremele funcției:

$$f(x) = \frac{3x - 1}{3x^2 + 1}.$$

6952. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu baza a și înălțimea h. Se înscrie un pătrat în acest triunghi o latură a pătratului fiind pe baza triunghiului.

a) Să se găsească latura pătratului în funcție de a și h.

b) Dacă notăm prin S_1 aria pătratului și prin S aria triunghiului, în ce caz există relația $2S_1 = S$.

c) Să se arate că suma distanțelor duse dintr-un punct al bazei la laturile egale ale triunghiului este constantă.

Probleme date la admiterea în Facultatea de Fizică, Iaşi, 1964

6953. Se consideră ecuaţia în x

$$2(2\alpha + 3)x^2 + (2\alpha^2 + 5\alpha + 5)x + \alpha + 1 = 0$$

a) Să se arate că această ecuaţie are rădăcinile ecuaţiei raţionale de α şi să se găsească aceste rădăcini.

b) Să se stabilească condiţiile la care trebuie să satisfacă α astfel ca ecuaţia dată să admită toate soluţiile reale dacă considerăm $x = \sin y$

c) Să se rezolve ecuaţia în y în cazul $\alpha = -2$.

6954. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$$

6955. Se consideră ecuaţia în x

$$\alpha x^2 - 2(\alpha - 2)x - 10 - \alpha = 0$$

a) Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei date.

b) Să se arate că există o relaţie între rădăcinile acestei ecuaţii, independentă de α.

c) Utilizînd relaţia de care este vorba la punctul (b) să se găsească valorile rădăcinilor duble ale ecuaţiei considerate.

6956. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

PROBLEME PROPUSE *)

6957. Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură a. Se prelungeşte latura BC cu segmentul $CD = b$ iar latura BA cu segmentul $AE = a + b$. Să se arate că $EC = ED$.

Liviu Pîrşan, Bucureşti

6958. Să se rezolve sistemul:

$$x^{a+k}y^b z^c = A$$
$$x^a y^{b+k} z^c = B$$
$$x^a y^b z^{c+k} = C$$

Ion I. Cristea

6959. Se dă un triunghi dreptunghic ABC înscris într-un cerc dat. Ipotenuza BC rămîne fixă, iar vîrful A se mişcă pe cerc.
Fie B' şi C' punctele unde bisectoarele unghiurilor B şi C taie cercul.

---

*) IX (6957–6967); X (6968–6973); XI (6974–6979); S (6980–6986). Soluţiile se primesc pînă la 30 septembrie 1965.

Se cere :

a) Locul geometric al mijlocului segmentului $B'C'$.

b) Să se arate că perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

Necşoiu Dan Alex, absolvent

6960. Să se rezolve sistemul

$$2x^2 - 3y^2 + 5xy - x + 4y - 1 = 0$$
$$4xy - y^2 + 3x^2 + x - 2y - 4 = 0$$

Bal Iuliana, Cluj

6961. Să se rezolve sistemul

$$(1 + x)(1 - y) = (1 + y)(1 - z) = (1 + z)(1 - t) = (1 + t)(1 - x) = a$$

Discuţie. Cazuri particulare $a = 1$ şi $a = 2$.

C. Ionescu-Ţiu

6962. Într-un trapez cu bazele AB şi CD fie E intersecţia diagonalelor AC şi BD. Paralela dusă prin E la AB taie pe AD în F. Prin G şi H intersecţiile diagonalelor trapezelor $ABEF$ şi $CDFE$, se duc paralele la EF care taie pe AD respectiv în M şi N. Să se arate că $EF = 3PF$, unde P este intersecţia diagonalelor trapezului $GMNH$.

C. Ionescu-Ţiu

6963. Dacă :

$$b^2 + bc + c^2;\ c^2 + ca + a^2;\ a^2 + ab + b^2$$

sînt în progresie aritmetică, care este condiţia ca şi a, b, c să fie în progresie aritmetică?

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

6964. O tablă zincată are forma unui triunghi isoscel cu înălţimea de 51 dm, terminată cu un semicerc ce are ca diametru baza triunghiului de 34 dm. Să se determine dimensiunile unui trapez ce se poate tăia încît să se elimine cît mai puţine deşeuri, ştiind că are bazele paralele cu diametrul semicercului, situate de o parte şi alta a lui, iar baza mare ce se sprijină pe semicerc este de 30 dm.

N. Bebea, Tîrgovişte

6965. Să se rezolve sistemul :

$$7x^3 - 15x^2y + 2y^3 + 2y^3 + 6xy^2 + 137 = 0$$
$$4x^2y - xy^2 - 2x^3 - y^3 - 4 = 0.$$

Şerban Nicolae, elev Bacău

6966. Din vîrful A, al triunghiului ABC se descrie un cerc al cărui diametru este media armonică a laturilor AB şi AC şi care taie în M şi N laturile AB respectiv AC. Dreptele BN şi CM se întîlnesc în 0 iar AO intersectează pe BC în P.

Să se demonstreze că :

$$\frac{\text{aria } (CPA) \cdot \text{aria } (CMA) \cdot \text{aria } (CNO)}{\text{aria } (BNA) \cdot \text{aria } (BPA) \cdot \text{aria } (BMO)} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^6$$

Popescu Eleodor, elev, Tr. Severin

6967. Într-un trapez $ABCD$ un punct P se mişcă pe baza mare CD. AP intersectează pe BD în M, BP intersectează pe AC în N iar O este intersecţia diagonalelor AC şi BD. Să se arate că

$$\text{aria } (MON) = \frac{k}{k+1} \cdot \text{aria } (MPN) \text{ unde } k = \frac{AB}{DC} (k \leqslant 1).$$

(În legătură cu problema 5983).

Stănescu Dan, elev ş.m. 1 Ploieşti)

6968. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$\arcsin \frac{2x}{x^2+1} + \arccos \frac{2y}{y^2+1} = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}.$$

Ion I. Cristea

6969. Să se determine numerele naturale n pentru care numărul $a^n - 1$ este divizibil cu numărul $a^p + a^{p-1} + \ldots + a + 1$.

b) Să se demonstreze că numărul $a^n + 1$ nu-i divizibil cu $a^p + a^{p-1} + \ldots + a + 1$, n şi p sînt numere naturale date, iar $a \neq 1$. (În legătură cu problema 6497).

F. Kacso, Cluj

6970. Se consideră polinomul

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \text{ unde } n \geqslant 2k - 1$$

Să se găsească restul împărţirii polinomului $P(x)$ prin $x^k - \alpha$.

Liviu Pîrşan, Bucureşti

6971. Să se găsească forma generală a numerelor naturale a şi b astfel încît : $\frac{a}{9} - \frac{b}{4} = 3$.

Să se demonstreze apoi că cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b se află numai printre divizorii lui 108.

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

6972. Să se stabilească egalitatea

$$1 \cdot 1^2 + (1+2)(1^2+2^2) + (1+2+3)(1^2+2^2+2^2+3^2) + \ldots$$
$$\ldots + (1+2+3+\ldots+n)(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) =$$
$$= [1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n)]^2$$

Simon Petre, Tg. Mureş

6973. Pentru n natural impar, mai mare ca 1, numărul

$$N = \frac{1}{2^3}(139^n - 133^n - 129^n + 123^n),$$

este întreg, pozitiv şi divizibil prin 1965.

E. Onofraş, Ploieşti

6974. Se consideră curba plană dată de ecuația

$$(x-1)^2(y-1)^2 = x^2(x^2-2x)$$

Se cere :

a) Să se construiască graficul curbei.

b) Să se calculeze aria porțiunii din plan mărginită de ruta curbei din semiplanul $x > 1$ și $x = 2$, $x = 3$.

Bal Iuliana, Cluj

6975. Să se demonstreze că mulțimea valorilor care verifică relația $|x-2| + |3-x| > 6$, este identică cu mulțimea valorilor pentru care avem :

$$\frac{1}{11-2x} < \frac{1}{12}.$$

O. Sacter

6976. Se dau cercul (C) și dreapta (D) tangentă cercului (C). Din punctul M, mobil pe dreapta (D), se duce tangenta MT la cercul (C).

Se cere :

a) Locul geometric al punctului care împarte segmentul TM în raportul k (constant).

b) Să se reprezinte grafic acest loc geometric pentru $k = 1$, $k = 2$.

A. Stanciu, prof. Brăila

6977. Se dau 2 puncte fixe A și B pe axa (xx') simetrice față de O, astfel încît $AB = a$ și un alt punct variabil $M(\lambda, a)$. Din M se duc cele 2 tangente la elipsa de ecuație $4x^2 + 5y^2 - 5a^2 = 0$ $(\lambda > 0)$.

Să se arate că :

a) una din cele două tangente aflate este tangentă și la cercul ce trece prin punctele A, B și M.

b) Notînd cu N punctul de intersecție al acestei tangente cu simetrica celeilalte tangente față de axa (xx'), să se afle minimul sumei distanțelor punctelor M și N la mediatoarea segmentului AB, cînd λ variază $(\lambda > 0)$. Ce poziție are tangenta MN în acest caz?

c) Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor MQ și NP, unde P și Q sînt respectiv proiecțiile lui M și N pe mediatoarea segmentului AB.

L. Mănescu, R. Vîlcea

6978. Se consideră funcția :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x^2}.$$

1) Să se afle domeniul maxim.

2) Să se determine a, b, c astfel încît funcția :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ dacă } -1 < x < 0 \\ ax^2 + bx + c, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

să fie de două ori derivabilă pe domeniul considerat.

V. Băghină, Breaza

6979. Să se arate că dacă

$$\cos x \cdot f'(x) + \cos f(x) = 0,$$

expresiile

$$E_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{f(x)}{2};\ E_{2,3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{f(x)}{2}\right)$$

sînt constante.

C. Ionescu-Țiu

6980. Să se arate că x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ avem relațiile:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q; \qquad x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = -7p^2q;$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2p^2; \qquad x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 = 9p^3q - 3q^3;$$
$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5pq; \qquad x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} = 11pq(p^3 + q^2).$$

C. Ionescu-Țiu

6981. Triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ în care $BC = a$ și R este raza cercului circumscris, este baza piramidei $SABC$ ale cărei muchii laterale sînt egal înclinate către planul bazei. O secțiune plană SDE paralelă cu BC are perimetrul egal cu $2a$.

Să se afle suprafața totală a piramidei știind că

$$\sphericalangle SDB = \sphericalangle ABC.$$

Să se discute mărimea unghiului BAC. În ce caz este posibilă construirea secțiunii indicate?

T. Oțel, Mișacova, Odesa, URSS

6982. Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{\sin^3 a}{\cos x} - \frac{\cos^3 a}{\sin x} = 1 \text{ și } \frac{\sin^3 a}{\sin x} + \frac{\cos^3 a}{\cos x} - 1 = 0$$

T. Oțel, Mțșacova, Odesa URSS

6983. Considerîndu-se șirul lui Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

să se determine relația de recurență a șirului

$$1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, \ldots$$

format cu pătratele termenilor șirului lui Fibonacci.

Constantin Berdan

6984. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd diferența d a laturilor BC, CA, diferența ω a unghiurilor A, B și înălțimea CH.

Gh. Buicliu

6985. Fie a și b laturile unui paralelogram circumscris unui patrat. Să se arate că : $2^{-1/2} \leqslant a \cdot b^{-1} \leqslant 2^{1/2}$. Se [consideră că paralelogramul este circumscris patratului, dacă pe fiecare din laturile sale se află cîte un vîrf al patratului.

Matematica, Sofia, 1963

6986. Găsiți numărul $\overline{abcd}$ cu cifre două cîte două diferite, astfel încît $(\overline{ad})^2 = \overline{acb}$ și $(\overline{da})^2 = \overline{bca}$.

Matematica, Sofia, 1963

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASELE V—VIII *)

E : **2323.** Un consumator cumpără 10 kg de fructe de trei sorturi : mere, pere, gutui, plătind 42 lei. Știind că, 1 kg mere costă 4 lei, 1 kg pere costă 5 lei și 1 kg gutui costă 2 lei, să se afle în cîte moduri a putut cumpăra consumatorul.

Dinu Cornel, elev Ploiești

E : **2324.** Pe întinderea de $\frac{5}{12}$ dintr-un lot de teren rezervat pentru culturi experimentale și încă pe 3 ha. o gospodărie agricolă de stat a însămînțat grîu, pe $\frac{6}{17}$ din același lot și încă pe 2 ha. a însămînțat porumb, iar restul, care este cu $1\frac{2}{3}$ ha. mai mare decît $\frac{2}{9}$ din întregul lot, s-a cultivat cu cartofi. Să se afle care a fost întinderea lotului de teren rezervat pentru culturi experimentale?

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : **2325.** Un elev a rezolvat dintr-o culegere de probleme în primul trimestru 1/3 din toate problemele, în al doilea trimestru 1/4 din rest, iar în al treilea trimestru restul problemelor. Știind că el a rezolvat în al treilea trimestru cu 8 probleme mai mult decît în primul trimestru, să se afle numărul problemelor rezolvate în timpul anului.

Corlan Aurelian, Gilort

E : **2326.** O cooperativă agricolă de producție a semănat în prima săptămîna $\frac{5}{18}$ din suprafața destinată grîului de toamnă, în a doua săptămînă $\frac{8}{27}$, în a treia săptămînă $\frac{12}{31}$ din suprafața semănată în primele două săptămîni, iar în a patra săptămînă cu 40 ha mai puțin ca în prima. Să se afle suprafața semănată în fiecare săptămînă.

Ion Albescu, Făgăraș

E : **2327.** Un biciclist plecînd din localitatea A pînă în localitatea B, revine în A, după $4\frac{1}{2}$ ore.

* V (E : 2323—2326); VI (E : 2327—2329); VII (E; 2330—2332); VIII (E : 2333—2335). Soluțiile se primesc de la elevii claselor V—IX, pînă la 30 septembrie 1965.

Să se afle distanța de la A la B și cele două viteze (dus-întors) știind că la înapoiere a făcut un popas de $\frac{3}{4}$ oră și în felul acesta timpul este de 2 ori mai mare ca la dus, iar diferența vitezelor este de 8 km/oră.

I. Albescu, Făgăraș

E : **2328**. Pentru executarea unei lucrări, s-au angajat 3 echipe de muncitori. Prima echipă, lucrînd singură, ar putea să termine lucrarea în 24 de ore, a doua în 30 de ore și a treia în 40 de ore.

Primele 5 ore au lucrat împreună numai echipele a doua și a treia, după care a venit și a început să lucreze și prima echipă. Să se afle în cît timp, cele trei echipe vor termina restul lucrării?

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : **2329**. Să se calculeze x din proporția :

$$\frac{6,(428571)_{10}}{x_{10}} = \frac{3,(285714)_{10}}{\frac{113_4}{20}}.$$

Indicii 4, 9, 10 arată sistemul de numerație în care este scris numărul.

I. Bogatu, Tecuci

E : **2330**. Patrulaterul $ABCD$ are $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 1$ dr; $AD = CD$ și $\sphericalangle BCA = \frac{1}{3}$ dr. Diagonalele lui se taie în P. Să se arate că :

$$\frac{PC}{PA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

și să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$, cunoscînd raza cercului circumscris.

Florea I. Dumitrescu, Craiova

E : **2331**. Fie un triunghi ABC oarecare, tăiat de transversala MNP. (M, N și P pe AB, AC și respectiv BC). Să se demonstreze relația

$$S_{ABC} = \frac{BA}{BM} S_{BNM} + \frac{BC}{BP} \cdot S_{BNP}.$$

Mihai Popescu, Slatina

E : **2332**. Fie $a > 2$, un număr natural. Să se demonstreze că numerele $(a-1)^2$ și $2(a-1)$ sînt în baza a de numerație, numere răsturnate.

Corneliu N. Popescu, București

E : **2333**. O gospodărie agricolă de stat are pe lîngă alte suprafețe trei parcele de pămînt : prima în formă de dreptunghi cu lungimea de 80 decimetri și lățimea cît $\frac{1}{10}$ din lungime plus 20 metri, a doua în formă

de pătrat cu latura de 3 hectometri și a treia în formă de trapez cu baza mare cît baza mică plus $\frac{1}{4}$ din înălțime, baza mică cît dublul înălțimii și înălțimea de 400 metri.

O cooperativă agricolă de producție însămînțează grîu, floarea soarelui și porumb. Pentru grîu a repartizat $\frac{1}{2}$ din tot terenul său pentru floarea soarelui $\frac{1}{5}$ din rest, iar cu porumb a însămînțat o suprafață egală cu suprafața celor trei parcele ale G.A.S. plus 1/10 din tot terenul. Să se afle suprafața totală însămînțată cu grîu, floarea soarelui și porumb.

Corlan Aurelian, Gilort

E : **2334.** Să se afle un număr de patru cifre divizibil cu trei știind că : suma primelor trei cifre este divizibilă cu 16, suma ultimelor trei cifre este divizibilă cu 4 și 5, suma cifrelor e divizibilă cu diferența dintre cifra sutelor și cifra zecilor e divizibilă cu 3, numărul căutat nu are cifre egale cu zero.

E. Onofraș, Ploiești

E : **2335.** Oricare ar fi baza de numerație nu există număr de $n \geqslant 2$ cifre egal cu produsul cifrelor sale.

Dan Voiculescu, elev, București

CĂRȚI NOI

C. Coșniță, F. Turtoiu : *„Culegere de probleme de algebră"* ediția II-a, Editura tehnică, 1965.

Față de ediția precedentă apărută în 1961, lucrarea cuprinde în plus succinte expuneri teoretice și unele formule strict necesare, care preced fiecare capitol, unele din ele negăsindu-se în manualele de școală medie, cum sînt de exemplu separarea rădăcinilor ecuației de gradul al doilea, proprietăți ale polinoamelor omogene și simetrice, împărțirea polinoamelor prin x^2+1 și x^2+x+1, proprietăți și metode de dezvoltare a determinanților etc. De asemenea, lucrarea mai cuprinde unele exerciții mai reprezentative dintre care unele au făcut obiectul concursurilor de admitere în învățămîntul superior și olimpiadei de matematică din R.P.R. 1963.

RECTIFICARE

În nr. 3/1965 al G.M.-B la articolul „Rezultatul întrecerii între școlile medii din țară privind activitatea extrașcolară la matematici în anul 1964" s-a strecurat o greșală pe care o rectificăm : Școala medie de Truseşti (Suceava) cu 7 clase medii, se plasează a doua după școala medie nr. 2, Sibiu și pe același loc cu școala medie nr. 3, Sibiu.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare, soluții bune primite pînă la 1 februarie 1965)

BUZĂU. Ş. m. 1 cl. IX. Andreescu Florin (E: 2209, 28; 6510, 16, 19, 22, 25—27, 53, 61, 63, 76, 609). Cl. X. Dejica Petru (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 60, 61, 82, 85, 601, 09, 15). Cl. XI. *Filipoiu Şt. Alex.* (6474, 76, 79, 80, 86, 89, 96, 99, 502, 17, 18, 28—31, 34—36, 38, 39, 43, 44—46, 51, 53—55, 57, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 72, 79, 80, 82, 83).

Ş. m. 2 cl. VIII. Constantin Nicolae (E: 2215, 19, 33, 34, 36, 43, 45, 46). Cl. X. Miron Nicolae (6507, 10, 12, 16, 19, 22, 25—27, 34, 51, 80, 82—86, 99, 601, 09, 15, 36).

BUZIAŞ (Banat). Ş. m. cl. VIII. Adamescu Nicolae (E: 2198, 202, 10, 11, 13, 15—17, 22), Albu Elena (E: 2198, 201, 06, 10, 11, 13, 15—17, 32), Bordeianu Dorina (E: 2196, 203, 04, 11, 15, 20, 32), Reinert Editg (E: 2210, 11, 13, 15—18, 32), Szasz Elena (E: 2185, 91—94, 96, 98, 203, 06, 11, 15, 17, 18, 20, 32), Ticleanu Dorina (E: 2194, 96, 211, 15, 17, 18, 32).

CALAFAT (Oltenia). Şc. 8 ani nr. 2 cl. VIII. Niţescu Magdalena (E: 2201, 02, 06—09, 18, 19; 6527).

CARANSEBEŞ. Ş. m. 1 cl. IX. Dudrugeac P. (6507, 10, 16, 19, 25—27, 36, 54, 61, 63, 71, 83, 96, 609, 15), *Ştefăneanu Mircea* (6504, 05, 10, 12, 15, 19, 23, 25—27, 36, 43, 46, 54, 58, 60—63, 65, 67, 72, 89, 80, 82, 83, 86, 96, 99, 601, 07, 09, 15, 16; E: 2203, 07, 09, 19, 28, 29). Cl. XI. Man Carol (6560, 62, 71, 82—86, 99, 601, 09, 15).

Ş. m. 2 cl. IX. Bartolf Fred (E: 2228, 30, 36, 37; 6560, 61, 63, 71, 96, 601, 15, 53).

CAREI. Ş. m. cl. IX. Bathory Gyula (6510, 15, 19, 22, 25—28, 32, 44, 54, 61, 63), Biro Gabriela (6510, 19, 22, 25—27, 32, 44, 54, 62, 615), Haller Ileana (6510, 22, 25—28, 32, 44, 54, 615), Kertesz Anna (6510, 19, 22, 25—28, 32, 44, 54, 61, 615), Timar Erzebet (6510, 22, 25—28, 32, 44,, 54, 615). Cl. X. Drăgan Claudia (6507, 10 25—27, 36, 54, 58—61), Mosuly Clara (6507, 10, 25—27, 36, 54, 58—61).

CATATCU (R Sărat). Şc. 8 ani cl. VII. Iorga Emil (E: 2202, 06, 10, 11, 13, 15—18, 20).

CĂLĂRAŞI. Ş. m. cl. IX. Vasile Eugen (6512, 15, 16, 18, 22, 29, 31, 36, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 71, 80, 83—86, 99, 601, 06, 09, 15; E: 2207, 09, 28, 31). Miţă Gheorghe (6524, 31, 54, 55, 60—62, 69, 71, 83, 85, 601, 09, 15), Cl. XI. Berlescu Gh. (6504, 10, 15, 17, 19, 22, 26, 61, 63, 87, 97, 605), Brătianu Constantin (6507, 10, 12, 15—17, 22, 26, 27, 61, 63, 66, 72, 97, 605, 15), Dumitru Dobriţa (6510, 15, 16, 22, 61, 63, 65, 76, 85, 87, 622), Giurcan M. Elena (6504, 10, 15, 17, 19, 22, 26, 61, 87, 97, 622), Neagu Maria (6510, 15, 17, 19, 22, 26, 61, 63, 97, 605, 09, 22), Nigoi Elena (6504, 15, 17, 19, 22, 26, 27, 61, 63, 505, 09), Pacă Elena (6510—12, 14, 15, 20—24, 26, 62), Traian Maria (6504, 10, 15—17, 19, 23, 26, 36, 61, 63, 609), Vişan Tudora (6504, 10, 15—17, 19, 22, 26, 36, 61, 63, 609).

CALIENI. Şc. 8 ani cl. VIII. Baloşin C. Maria (E: 2207, 20, 26—29, 31, 32), Enache Paraschiva (E: 2200, 02, 06, 10, 11, 13, 15, 16, 19), Tigănuş Vasilica (E: 2217, Enache Paraschiva (E: 2200, 02, 06, 10, 11, 13, 15, 16, 19), Tigănuş Vasilica (E: 2217 18, 20—25).

CĂLIMĂNEŞTI (Oltenia). Ş. m. cl. X. Talas Anca (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 61, 63, 83, 84).

CEHUL SILVANIEI. Ş. m. cl. XI. Mureşan Ioan (6444, 57, 59—61, 63, 67, 82, 507, 10, 12, 16, 19, 22, 26, 54, 55).

CILNIC (Tg. Jiu, Oltenia). Şc. 8 ani cl. VIII. Mărăşescu Pantelimon (E: 2184, 85, 90—93, 96, 98, 202, 06, 11, 16—18).

CÎMPIA TURZII (Cluj). Ş. m. cl. IX. Toader Iosif (6444, 59, 61, 62, 507, 10, 19, 22, 25, 26, 61, 63).

CÎMPINA Ş. m. cl. IX. Stoian Luminiţa (E: 2209, 26; 6510, 22, 26, 27, 61, 80, 86,, 601, 09, 15). Cl. X. Popescu Florin (6503 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 36, 60, 61, 63, 83, 96, 615), Ştefănescu Pompilia (6445, 46, 58—61, 90, 501, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 71. Cl. XI. Curavale Marcel (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 36, 51, 61, 63).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Liceul militar cl. X. Bulcu Ioan (E: 2187, 57, 59—61, 64, 82, 507, 10, 16, 22, 26, 61), Popovici Ioan (6454, 59—63, 92, 510, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63). Cl. XI. Crăciun Alexandru (6507, 16—19, 26, 38, 39, 44—46, 51, 55, 57, 58, 61, 66, 67, 74). Fetica Emil (6512, 15, 16, 19, 22, 23, 27, 32, 36, 40, 46, 54, 63, 69, 87, 99, 601, 09, 15), Ionescu Ion (6504, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 46, 63, 601, 09, 15).

CÎMPULUNG MUSCEL. Ş. m. cl. IX. Hurdubeţiu Sorin (E: 2228, 31, 36, 37; 6503, 10, 16, 22, 25, 26, 61, 63, 71, 83). Cl. XI. Bularcu Ilie (6504, 22, 38, 39, 56—58, 79, 97, 615, 16, 18, 19, 22, 23).

CLUJ. Şc. 8 ani nr. 7 cl. VI. Racoviţan Georgeta (E: 2198, 206, 10, 15—17, 43,

47), Zglobiu Niculae (E: 2197—202, 06, 10, 11, 15—18, 20, 2327, 32).

Șc. 8 ani nr. 14 cl. VI Berseki Mihaela (E: 2198, 2021, 13, 15—18, 20, 23), Hendelmann Robert (E: 2198, 213, 15—18, 20, 23), Marin Marius (E: 2198, 213, 15—18, 20, 32), Ruja Hortensia (E: 2198, 213, 15—18, 20, 32), Vaida Radu (E: 2198, 213, 15—17, 20, 23, 32), Weinblat Marcel (E: 2198, 213, 15—18, 20, 24, 32). Cl. VII. Steurmann Vera (E: 2185, 92, 93, 96, 206, 10, 13, 15—18).

Absolvent Janko Alexandru (6500, 08, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 24, 30, 31).

Ș. m. M. Eminescu cl. IX. Pop Maria (E: 2219, 28, 29, 36, 37,45; 6561, 63, 99, 615, 65). Cl. X. Gallin Radu (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 45).

Ș. m. 5 Gh. Barițiu cl. VII. Popa Marcel (E: 2211, 14, 16, 17, 20, 22—24, 32), Rădulescu Șerban (E: 2210, 15—18, 20, 27, 32). Cl. VIII. Moldovan Nicolae (E: 2198—200, 11, 13, 15—17, 18—23, 31, 32, 36), Popovici Mircea (E: 2211, 13, 15—18, 22, 32).

Ș. m. Emil Racoviță cl. V. Voicu Doina (E: 2119, 24, 26, 32, 39, 42, 45, 47). Cl. IX. Salvanu Maria (6525—29, 31, 609, 15, 35, 46, 49).

Ș. m. 7 cl. IX. Dobrater Bela (6507, 15, 16, 19, 25, 27, 34, 601, 09, 15). Cl. X. Lovacs Ladislau (6505, 07, 16, 23, 25, 27, 36, 44, 83, 601, 09, 15), Pusstai Suzana (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 61).

Ș. m. 8 N. Bălcescu cl. VII. Bercea Corina (E: 2198, 201—03, 06, 10, 17, 18), Roventa Iancu (E: 2215—17, 20, 33, 40, 42, 43, 47). Cl. VII. Groffius Wilhelm (E: 2185, 91—96, 98), Man Augustin (E: 2203, 11, 13, 17—20, 31, 32), Marghetas Liviu (E: 2215, 20, 32, 33, 35, 36, 42, 45), Martcaboji Horia (E: 2201—03, 06, 08—13, 15—19, 20, 22, 24, 32), Seimeanu Rodica (E: 2198—208, 20—24, 26, 27, 31, 32), Tudoran Tudor (E: 2201, 02, 06, 15, 17, 19, 20, 32). Cl. IX. Beca Ioan (E: 2209, 31; 6503, 10, 19, 22, 26, 34, 60, 61, 63, 615), Ionescu Marian (E: 2209, 19, 28, 29; 6507, 10, 19, 28, 60, 61, 63), Lazăr Aurel (E: 2207, 19, 23; 6503, 07, 16, 19, 25, 27, 34, 60, 61, 63), Lucaciu Gh. (E: 2209, 19, 29; 6507, 10, 16, 19, 22, 26, 60, 61, 63), Mitrea Ioana (6461, 503, 10, 16, 19, 22, 25—27, 46, 61, 63), Stănescu Lidia (E: 2209, 19 6503, 19, 19, 22, 26, 27, 34, 60, 61, 63), Stoian Daniela (E: 2228, 36, 37, 45; 6503, 07, 19, 34, 61, 86, 615). Cl. X. Aciu Mihai (6503, 07, 10, 12, 15, 19, 20, 25, 27, 36, 54, 58, 61, 63), Mareș Maria (6503, 04, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 61, 82, 83, 615, 44), Trif Damian (6504, 12, 15, 23, 28, 30, 38, 44, 54, 58, 61—64, 67), Vulișici Vasile (6503, 07, 10, 12, 16, 19, 26, 61, 73, 83, 84, 615). Cl. XI. *Perl Toma* (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 44—46, 54—56, 58, 60, 61, 63, 67, 71, 72, 79, 82—85, 87, 88, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 15, 16, 18, 19, 22), Weisz Gheorghe (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15—17, 19, 22, 23, 25—27).

Ș. m. 10 cl. XI. Dănicel Dan (6504, 10, 12, 15, 22, 36, 38, 61, 63).

Ș. m. 12 cl. VII. Mihalte Delia (E: 2199, 202, 10, 15—18, 20, 26, 32). Cl. VIII. Bretan Eva (E: 2187, 91—96), Demeter Sandor (E: 2185, 87, 91—96). Cl. X. Voiculescu Emil (6503, 07, 10, 16, 19, 27, 31, 34, 54, 61, 63, 604).

Ș. m. 14 cl. XI. Crișan Stela (6503, 04, 07, 10, 11, 15, 19, 63, 65, 87).

Ș. m. 15 cl. VII. Iancău Marian (E: 2197—202, 06, 10, 11, 13, 14, 16—18). Cl. IX. Lazăr Doru (6503, 07, 10, 15, 16, 22, 25, 26, 32, 58).

COLCEAG (Mizil). Șc. 8 ani cl. VII. Mihai M. Dumitru (E: 2220, 24, 32, 33, 35, 40, 43, 45, 47).

COMĂNEȘTI (Bacău). Ș. m. Puiu I. Constantin (6503, 05, 07, 10, 12, 15, 16, 26, 49, 51, 55, 86).

CONSTANȚA. Ș. m. 1 cl. IX. Mugioiu Florin (6510, 15, 16, 22, 27, 54, 71, 80, 83—86, 601; E: 2231).

Ș. m. 2 cl. IX. Blană Ionel (6503—07, 10—12, 14—16, 19—27, 36, 38, 39, 42, 45, 46), Lămureanu Costel (6510, 14—16, 19—21 24, 26, 61, 63, 601). Cl. X. Găvan Mircea (6503, 04, 07, 10, 16, 19, 22, 24—27, 46).

Ș. m. 3 cl. XI. Boanță Nicolae (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 36, 80, 83, 601), *Eremia Vasile* (6405, 10—12, 14, 20, 24, 33, 34, 40, 41, 45, 46, 56, 57, 59—63, 66, 67, 71, 82, 87, 92, 98, 99, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 34, 45, 57, 61, 63, 65, 74, 79).

COSTEȘTI (Argeș). Ș. m. cl. X. Negurescu Nicolae (6444, 54, 59—62, 82, 507, 10, 16, 19, 22—24, 26, 37).

CRAIOVA. Șc. 8 ani nr. 2 cl. VIII. *Gheorghe Felicia* (E: 2197, 98, 201, 02, 04, 06, 09—11, 13—21, 26, 32; 6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 39, 54, 63).

Șc. 8 ani nr. 9 cl. VI. Voicu N. Eugen (E: 2197, 98, 201, 02, 06, 10, 16, 24, 32).

Ș. m. 1 cl. VII. Popescu Gh. Doina (E: 2210, 11, 13, 15—18, 22). Cl. IX. Băja Gheorghe (6516, 19, 22, 27, 54, 58, 61, 63, 65, 625), Dumitru Marian (6510, 26, 27, 61, 71, 83, 99, 601, 09, 15), Florian Horia (E: 2219, 29, 31; 6515, 16, 19, 22, 27, 54, 55, 58, 61, 63, 83, 601, 09), Gavrilescu Elvira (6503, 10, 15, 16, 25—27, 61, 63, 71), Popescu Leonora (E: 2219, 28, 31; 6507, 16, 19, 25, 61, 63, 601, 09, 15), Tomoșoiu Rodica (E: 2209, 15, 19; 6510, 12, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 63). Cl. X. Bănică Marian (6507, 10, 15, 16, 19, 21, 22, 24—27, 34), Dediu, Luminița (6510, 12, 15, 22, 34, 54, 61, 63 83, 86, 609, 15), Vasilescu Ion (6507, 10, 12,

15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 61, 63, 84, 85, 609). Cl. XI. Sandu Darius (6505, 06, 11, 13, 14, 20, 21, 27, 29, 31, 32, 36—38, 44, 46, 49, 51, 54, 55, 58, 60, 61, 63, 65—68, 71, 72, 74, 81, 82 85—88, 601, 09, 15). *Biscă C. Octavian* (6503—29, 31, 32, 34, 36, 38, 39, 42—49, 49, 51, 54, P. N.).

Ş. m. 2 cl. IX. Andrei Viorel (E : 2207, 09; 6503, 10, 19, 22, 25—27, 61, 63, 601), Dincă Melania (6503, 10, 19, 22, 25—27, 61, 63, 601), Preda Marcel (E : 2201, 02, 07, 09, 11, 14, 18, â8, 30; 6510, 15, 25—27, 609). Cl. X. Buică Marcel (6503, 07, 16, 34, 39, 44, 54, 61, 63, 69, 85, 615), Cojocaru I. Florian (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 83—86, 601, 09), Dănescu Dumitru (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 61, 83, 601, 09), Diaconu Ştefan (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 54, 61, 63, 83, 85, 601, 09), Georgescu Dan (6515, 16, 25, 27, 54, 67, 83—85, 99, 609, 55), Locusteanu M. (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 61), Pană Ionel (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63, 609, 15), Păun Ion (6507, 10, 16, 20, 22, 26, 71, 83—85, 601, 09, 15), Popa Magdalena (6459—61, 63, 65, 82, 505, 07, 10, 16, 19, 22, 27, 39), Popescu I. Traian (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 61, 63, 83—85, 601, 09, 15), Teodorescu Marin (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 82—85, 609, 15), Tugui Dorin (6507, 10, 16, 19, 25, 26, 61, 83, 84, 609, 15). Cl. XI. Babarada Ion (6503, 04, 07, 10, 12, 15—17, 19, 22, 25—27, 36, 39, 61, 63, 80, 82, 83, 85), Bărboi Nicolae (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 22, 23, 25—27, 36, 38, 46, 54, 55, 59, 61, 67, 71), Gidea Liviu (6503, 04, 07, 10, 12, 15—19, 22, 23, 25—28, 36, 39, 46, 51, 54, 55, 61, 63, 80, 82, 88, 97, 609, 15, 22), *Hotăranu Ion* (6503, 04, 07, 10, 12, 15—19, 22, 23, 25—28, 35, 36, 45, 46, 51, 54, 55, 61, 63, 80, 82—88, 97, 601, 09, 15, 21, 22), *Liconi Dorian* (6448—50, 57—63, 66, 67, 71, 80—82, 84, 86, 87, 92, 503, 04, 07, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 25—27, 33, 36, 39, 44—46), *Stănescu Constantin* (6507, 08, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 25—27, 29—32, 34, 36, 39, 44—46, 51, 53—55, 57—61, 63, 67, 69, 71, 72, 74, 79).

Ş. m. 3 cl. IX. Brătoiu Ion (6510, 16, 19, 26, 61, 63; E : 2209, 19, 28, 30), Hobeanu Eugenia (E : 2228, 30, 31, 36, 37, 45; 5516, 19, 61, 63). Cl. X. Borcea Cristina (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 36, 83, 86, 615). Cl. XI. Căluşeru Elena (6507, 16, 23, 26, 27, 39, 54, 83, 601, 10, 15), Diaconescu Mihaela (6504, 07, 16—19, 22, 23, 25—27, 39, 44, 45).

Ş. m. 4 cl. XI. Iordăchescu Anca (6503—08, 10—20, 22—24, 26, 36, 39, 41, 44—46, 49, 51, 63, 68), Ţăndăreanu Nicolae (6504, 05, 07, 10, 11, 13—22, 24, 26, 36, 45, 46, 73, 81—86, 97, 601, 05, 09, 15).

Ş. m. 5 cl. IX. Vişan C. Ileana (6510, 36, 53, 54, 61, 63, 99, 601, 09, 15, 18).

CUMPĂNA. Şc. 8 ani cl. VIII. Pruiu Anastase (E : 2218, 19, 32; 6515, 19, 22, 615, 54).

CURTEA DE ARGEŞ. Ş. m. cl. IX. Mirceascu G. Gheorghe (E : 2228, 31, 36, 37, 45; 6553, 61, 63, 83, 85, 86, 601, 09, 19).

CURTICI (Banat). Ş. m. 1 cl. VII. Vîrşendan Corneliu (E : 2185, 91—93, 202, 06, 10, 16, 17, 19).

CUT (Sebeş). Şc. 8 ani cl. VII. Bîtea Rafila (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20). Cl. VIII. Dincă Vasile (E : 2198, 203, 06, 07, 09—11, 13, 15—18).

DEJ. Ş. m. 2 cl. VII. Morariu Marcel (E : 2210, 11, 13—18). Cl. VIII. Nagy Maria (E : 2210, 15—20, 24, 26, 32), Pavelko Laszlo (E : 2210, 11, 15—20, 24, 26), Szabo Eva (E : 2210, 11, 15—20, 24, 26, 32.) Ş. m. 1 cl. XI. Bruja Adrian (6504, 10, 12, 15, 19, 61, 63, 615, 39, 44).

DETA (Banat). Ş. m. cl. IX. Popovici Lenuţa (6510, 16, 19, 25, 27, 61, 63, 79, 83, 86, 601, 09, 15).

DEVA. Şc. 8 ani cl. VIII. Mîrza Cornel Beniamin (E : 2197, 98, 200, 06, 13, 17—19). Şc. pedagogică cl. VIII. Filimon Simion (E : 2198, 201, 02, 10, 11, 16—18, 32). Ş. m. cl. XI. *Răgălie Niţă* (6443—35, 39, 54—63, 66, 67, 69, 71, 80, 82, 84, 86—88, 92, 97, 98, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 31, 32, 36, 38, 39, 46).

DRĂGANU (Argeş). Şc. 8 ani cl. VIII. Iordache Doina (E : 2202, 06, 10, 15—18, 20, 22, 24, 32).

DRĂGĂNEŞTI-OLT. Ş. m. cl. IX. Enache Victor (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 29, 54, 61, 63, 80, 96, 601, 09, 15). Cl. X. Popescu Ioan (6459, 61, 87, 507, 10, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 26, 57, 58, 61, 63, 601, 09, 15).

DUMBRĂVENI (Braşov). Ş. m. cl. IX. Boitoş Marius (6457, 59—63, 510, 15, 16, 19, 22, 26, 61), Wildman Wilhelm (E : 2209, 28, 30, 6507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 34, 61). Cl. X. Noveanu Nicodim (6457—63, 87, 510, 12, 15, 16, 19, 22, 53, 61, 63).

FĂGĂRAŞ. Ş. m. 1 cl. X. Grovu Nicolae (6503, 04, 12, 15, 23, 27, 36, 39, 58, 66, 71, 83, 84, 75, 601, 09, 15). Ortocol Gheorghe (6504, 12, 54, 68, 71, 79, 82—85, 609, 15).

FĂGET (Banat). Ş. m. cl. IX. Bobescu Marius (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 53, 54, 601, 09, 15), *Sava Petru* (6503, 04, 12, 23, 25, 27, 29, 31, 36, 39, 44—46, 53, 54, 57—59, 61, 63, 67, 71, 72, 80, 82—86, 97, 601, 06, 07, 09, 15, 16, 18, 21, 24, 25), Tîrjoianu Dorina (E : 2207, 09, 28, 31; 6510, 25, 26, 53, 54, 60, 61, 601, 09, 15). Cl. X. Costa Simion (6510, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 39, 58, 61, 63, 67, 83, 601, 09, 15). Cl. XI. Petruescu Marius (6551, 54, 55, 57, 65, 79, 80, 82, 83, 85, 601, 09, 15).

FETEŞTI GARĂ. Ş. m. V. Roaită cl. IX. Negreanu N. Tache (E : 2228, 29, 31 ; 6525, 27, 60, 85, 96, 99, 615). Cl. XI. *Dache Const.* (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—27, 36, 38, 39, 44, 46, 51, 54, 56, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 74, 79, 82, 83, 87, 88, 97, 601, 07, 09, 16, 22), *Gonciar Ştefan* (6444, 45, 48, 50, 57—63, 66, 67, 70, 73—75, 80, 82, 87, 92, 97—99, 501—04, 07, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25—29, 35 ; 36, 38, 39, 43, 45, 46, 48, 53—55, 58—67, 71, 72, 79), Văcălău Ion (6504, 10, 12, 15, 16, 18, 22, 26, 46, 51, 58, 63, 67, 81, 83, 99, 609, 15, 16).

FIENI. Ş. m. cl. VIII. Sencovici Gabriela (E : 2213, 15—18, 20, 21).

FLOREŞTI (Argeş). Ş. m. cl. X. Tăchescu Ionel (6551, 60, 82—86, 88, 96, 99).

FOCŞANI. Ş. m. 2 cl. IX. Badiu Lidia (E : 2236 ; 6507, 10, 15, 19, 22, 26, 61, 85, 609, 15), Balica Eugenia (E : 2232, 36 ; 6507, 10, 19, 22, 26, 61, 63, 86, 609, 15), Usturoi Mariana (E : 2232, 36 ; 6507, 10, 19, 22, 26, 61, 63, 86, 609, 15). Cl. XI. Grigorescu Antonia (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 63, 83).

FRASIN (Gura Humorului). Ş. m. cl. VII. Ghintă Silvia (E : 2200, 03, 04, 06, 07, 17, 28, 32).

GALAŢI. Şc. 8 ani nr. 7 cl. VI. Iordan Madalena (E : 2197—99, 202, 06, 10, 15 — 18). Cl. VIII. Cutică Doina (E : 2201, 06, 13, 15, 17, 18, 25, 36).

Sc. 8 ani nr. 21. Cl. VIII. Carabogdan Elena (E : 2199—202, 06, 11—13, 26, 32), Pătru Mioara (E : 2189, 200, 01, 06, 11, 13, 15—17, 19).

Şc. 8 ani nr. 23 cl. VII. Dinu Dumitru E : 2202, 06, 15, 17, 18, 31, 32), Porumbel Nelu (E : 2130, 36, 59, 63, 71, 91, 93), Thiel Valeriu (E : 2201, 06, 15, 17, 20, 25, 31, 32). Cl. VIII. Olaru Rodica (E : 2202, 10, 11, 15, 18, 24, 31, 32).

Şc. 8 ani nr. 24 cl. VI. Costiniuc Florin (E : 2197, 99, 204, 11, 20, 27, 31, 32).

Şc. 8 ani nr. 28 cl. VIII. Palea Daniela (E : 2198, 202, 06, 10, 16—19), Serbu Paulică (E : 2202, 06, 10, 13, 15—19).

Ş. m. 1 cl. IX. Ene Dumitra (E : 2219 ; 6503, 07, 10, 16, 18, 22, 25—27, 29, 71, 615), Herşcovici Isaia (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 25—27, 29, 54, 59, 83, 601, 09, 15 ; E : 2207, 09, 28—31, 36, 37, 45), Rosenzwieg Niky (E : 2209, 10, 26—30 ; 6554, 60, 601, 09). Cl. X. Gheorghiu Neculai (6444, 57, 59—63, 510, 19, 26, 27, 54, 61, 63). Cl. XI. Adămuţă Elena (6526, 27, 38, 51, 54, 61, 71, 73, 83—86, 601, 09, 15), *Andrei Viorel* (6506, 11, 14, 31, 49, 51, 54—58, 61, 63, 57, 72, 73, 79—83, 85, 87, 88, 90, 91, *Viorel* (6506, 11, 14, 31, 49, 51, 54—58, 61, 63, 57, 72, 73, 79—83, 85, 87, 88, 90, 91, 99, 601, 07, 09, 15, 16, 18, 21, 31, 32, 35, 39, 44, 46, 63).

Ş. m. 3 cl. IX. Eisenberg Ludovic (6510, 15, 16, 25, 26, 61, 63, 601, 09 ; E : 2245), Bălănică Anghelina (6507, 10, 19, 25, 27, 28, 34, 62, 615, 20), Scorţaru Florin (6504, 07, 10, 12, 22, 25—27, 51, 63, 601, 05).

Ş. m. 4 cl. XI. Ene Adrian (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 39, 44, 61, 63), Iacobovici Raul (6503, 04, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 45, 46), Neguţ Sorin (6503, 04, 07, 12, 15, 16, 22, 23, 26, 36, 39, 61, 79), Petrescu Octavian (6503, 04, 07, 12, 15, 16, 19, 23, 25, 26, 39, 61, 63, 601).

Ş. m. 5 cl. IX. Lupoaie Marian (6504, 10, 25, 54, 61, 63, 601, 15 ; E : 2231, 36, 45). Cl. XI. Stoian Violeta (6522, 46, 54, 57, 58, 62, 79, 99, 601, 09, 15).

Şc. arte plastice cl. VII. Onu Costică (E : 2201, 04, 15—18, 20, 32), Roşca Daniela (E : 2201, 02, 04, 06, 10, 13, 15, 16, 18). Cl. VIII. Titinschneider Marc (E : 2206, 10, 11, 13, 15—18).

GĂTAIA (Banat). Ş. m. cl. IX. Dragalina Letiţia (E : 2207 ; 6510, 15, 19, 25, 27, 54, 79, 86, 601, 09). Cl. XI. Berder Petru (6504, 07, 10, 12, 19, 22, 38, 82, 83, 601), Ziperic Iosif (6510, 15, 16, 23, 35—27, 51, 82, 83, 601, 09).

GHERLA. Ş. m. cl. IX. Baumgarten Alexandru (E : 2203, 07, 28 ; 6510, 12, 22, 25—27, 54, 601, 09, 15).

GIURGIU. Şc. 8 ani cl. VII. Stancu Florina (E : 2027, 42, 45, 46, 56, 78—80, 98, 202, 06, 15, 17, 24, 26, 32). Tănase Maria (E : 2027, 42, 45, 46, 56, 85, 92), Ţigănilă Petruţa (E : 2178, 79, 82, 97—99, 202, 15, 20, 24—26, 32).

Ş. m. cl. X. Manea Adrian (6503, 04, 15, 16, 27, 83, 86, 97, 609, 15). Cl. XI. *Nicolae Ilie* (6443—45, 48, 49, 55—63, 66, 67, 71, 74—76, 80, 82, 84, 87, 88, 82, 96, 97, 504, 07, 10, 12, 13, 16, 18, 19, 22, 25—28, 30, 34, 39, 43—46, 53, 54, 61—64, 66, 67. 71, 72, 79), Rada C. Mircea (6443, 49, 57, 60, 62, 64, 69, 70, 76, 79, 96, 97, 518, 25, 31, 39).

Ş. m. 2 cl. IX. Marinescu Nicolae (6510, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 44, 61, 63, 83—86, 601, 09, 15, 203, 07, 09, 12). Cl. XI. Caloiu Traian (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 60), Robînca Nicolae Emil (6507, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 27, 32, 36, 39, 43, 49, 54, 97, 601, 03, 09, 15, 18).

GURA HUMORULUI. Ş. m. cl. X. Buguruzan Adrian (6510, 15, 16, 19, 25, 27, 61, 63, 80, 82—85, 609, 15).

HAŢEG. Ş. m. cl. VII. Petriu Mihai (E : 2190, 91, 93, 95, 98, 202, 06, 11, 13, 16, 17). Cl. IX. Berghian Ion (6504, 07, 10, 15—17, 19, 22, 25—28, 34, 54, 61—63), Maftei Nicolae (6515, 16, 19, 25—27, 34, 61, 63, 80, 84, 615).

HÎRLĂU (Iaşi). Ş. m. Ciumotaru Dan (E : 2211, 13, 16—19, 20, 24, 29, 32).

HOREZU (Argeş). Ş. m. cl. VIII. Hangiu Ştefan (E : 2211, 13, 15—18, 20, 27, 32), Tomescu Gh. (E : 2111, 15—18, 13, 20, 27, 32), Tudor I. Ion (E : 2211, 15, 18, 20, 22, 32, 40, 42, 46, 47), Tudor Maria (E : 2211, 15, 18, 20, 24, 26, 32, 36, 40, 42, 46, 47). Cl. X. Cretan Ion (E : 2207, 18, 19; 6458—61, 510, 19, 22, 54, 61, 63), Popa I. Gheorghe (E : 2209, 19, 29; 6488, 510, 19, 54, 59, 61, 63, 83, 601, 09, 15).

HUNEDOARA. Şc. 8 ani cl. VIII. Gottlieb Aurel (E : 2201, 18, 19, 24, 32; 6510, 19, 615), Beiu Maria (E : 2197—99, 203, 11, 13, 17, 18, 20, 32).

Ş. m. 1 cl. IX. Drăghici George (6519, 22, 25, 26, 36, 601, 15; E : 2186, 209, 28, 31), Loi Maria (E : 2009, 229; 6510, 19, 22, 25—27, 61, 99, 606, 15), Oprişa Doru (E : 2186, 209; 6457, 59, 61, 503, 10, 19, 22, 25—27, 63), Postelnicu Ileana (E : 286, 89, 203, 07, 09, 57, 64, 61, 59, 82, 89, 503, 10, 19, 22, 25—27). Cl. X. Petrescu Petre (6558, 60—63, 67, 83, 84, 86, 99, 601, 07, 09, 15, 16). Cl. XI. Belu Emil (6505, 06, 11, 13, 14, 16—19, 20, 21, 24, 32, 38, 39, 44, 45, 49—52, 54, 55, 57, 58, 61. 63, 74, 79, 81—85, 87, 601, 05, 15), *Căpăţînă Ion* (6503, 05—09, 11, 14, 17, 18, 2—027, 32, 44—46, 49—52, 54, 55, 57, 58, 61—63, 56, 69, 71, 74, 76, 79, 82, 84, 85, 87, 605), Lupu Alexandru (6512, 22, 25—27, 46, 51, 56, 61, 63, 67, 82, 609, 15), Tărăsie Gh. (6504, 07, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 26, 36).

Ş. m. 2 cl. IX. Lupu Iosif (6507, 10, 16, 19, 25—27, 61, 63, 83, 86, 609, 15).

HUŞI. Ş. m. Cuza Vodă cl. IX. Burone Gheorghe (6519, 22, 63, 71, 83—85, 88, 601, 15, 28). Cl. X. Darie Viorel (6505, 15, 23, 25, 38, 44, 61, 71, 83—86, 99, 615).

IANCA (Galaţi). Ş. m. cl. X. Stratan Mihai (6510, 15, 19, 22, 25, 27, 54, 58, 60, 61, 67).

IAŞI. Şc. 8 ani nr. 7 cl. VII. Drăgan Gh. (E : 2220, 23, 26, 27, 32, 33, 35, 38, 40, 42—44, 46, 47), Schram Hermina (E : 2171, 79, 82, 84, 85, 90. 91, 93, 95, 92, 215).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VIII. Grigoraş Natalia (E : 2210, 11, 15, 17—19, 63).

Ş. m. 1 cl. VII. Budui Liviu (E : 2184, 85, 87, 91, 92, 94, 215, 18), Carniol Simona (E : 2198, 201, 02, 06, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 23, 27, 32), Mîrzanca Magda (E : 2197—99, 201, 06, 13, 18, 20, 32). Cl. VII. Cozloschi M. Dan (E : 2201, 02, 06, 10, 15, 18, 23, 26, 31), Tighineanu Zamfira (E : 2206, 10, 11, 13, 15, 18, 20, 32, 33, 40, 43, 47). Cl. VIII. Nistor Silviu (E : 2184, 85, 91—95, 206).

Ş. m. 3 cl. VI. Doicioman Svetlana (E : 06, 10, 10, 15—17, 20, 23, 25, 32). Cl. VII. Receanu Dănuţ (E : 2206, 10, 13, 15, 17, 18, 20, 32). Cl. VIII. Enăşescu Ancuţa Elena (E : 2197, 200—02, 04, 06, 07, 09—11, 13, 15, 16, 18), Linde Radu (E : 2198—208, 10, 11, 13—19). Cl. IX. Gîrleanu Iosif (6516, 19, 22, 25, 26, 54, 86, 601, 10, 15), Iacob Florin (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27, 34, 60, 61, 63, 71, 83, 85, 615; E : 2228, 31), Irimia Constantin (6510, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63, 64, 601, 09, 15; E : 2209, 19), Niţă Constantin (E : 2209, 19; 6510, 22, 25—27, 54, 61, 601, 09, 43, 15), Pascal Stelian (E : 2209, 19, 31; 6510, 16, 26, 61, 63, 609, 15), Petrescu Vasile (E : 2219, 28, 29, 31, 6510, 19, 54, 63, 83, 601, 09, 15). Cl. IX. Surdu Mihai (E : 2219, 31; 6519, 54, 67, 80, 86, 601, 09, 15). Cl. X. Aizicovici Sergiu (6507, 12, 15, 16, 23, 26—28, 31, 32, 36, 54, 58, 60, 61, 63, 67, 71, 83, 84, 601, 07, 09, 15), Darabană Vasile (6510, 12, 15, 16, 19, 58, 51, 63, 80, 86, 601, 09, 15), Dămătar Andrei (6482, 510, 19, 22, 25, 61, 63, 83—86, 601, 09, 15, 16), Goraş Liviu (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 54, 61, 63, 83, 86, 601, 09, 15), Hanganu Romeo (6504, 10, 16, 19, 22, 26, 23, 61, 63, 83, 601, 09, 15), Herea Dumitru (6540, 15, 16, 19, 22, 58, 61, 63, 601, 09, 15), *Popa Eugen* (6503, 25—28, 36, 38, 39, 43, 44, 46, 49—54, 55—58, 60, 61, 63, 66—70, 72, 79, 80, 82, 83, 86, 97, 601, 05, P. N). Iacob Dumitru (6510, 12, 15, 16, 19, 52, 58, 61, 63, 80, 85, 86, 609, 15), Lefter Emilian (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 58, 61, 63, 601, 09, 15), Lupescu Florin (6504, 05, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 61, 63, 80, 83, 86, 601, 09, 15), Mardare Mirel (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 54, 58, 61, 63, 83, 601, 09, 15), Săceanu Florin (6504, 10, 15, 22, 25, 26, 27, 36, 54, 67, 86, 601, 05, 09, 15).

Ş. m. 4 cl. VII. Dendiuc Cristina (E : 2202, 06, 10, 10, 13, 16—18), ZoottaDiniţa (E : 2197—202, 06, 08, 10, 11, 13, 14. 16—18), Wechsler Paula (E : 2220, 27, 32, 33, 38, 40, 42, 43, 46, 47). Cl. VIII. Anglescu Romulus (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 27, 32), Focşa Gabriela (E : 2209—18), Săveanu Sanda (E : 2210, 11, 13, 15—18, 32, 33, 40). Cl. IX. Şerban Elena (6554, 50, 62, 63, 69, 83, 85, 96, 99, 601, 09, 15; E : 2228).

Ş. m. 5 cl. VIII. Builă Horia (E : 2210, 11, 13, 16—19, 32).

Ş. m. 6 cl. IX. Aronovici Paula (E : 2209, 10, 29, 36, 45; 6510, 26, 61, 601, 09, 15), Gabor Hevita (E : 2209, 31, 36, 45; 6525—27, 34, 54, 83, 601, 09, 15, 53), Gavril Magda (E : 2209, 19, 36, 45; 6510, 26, 34, 601, 09, 15), Onofrei Angela (E : 2207, 09, 31, 36, 45, 6510, 16, 25—27, 601, 15, 49, 56, 83).

Ş. m. 7 cl. VI. Ananiescu Carmen (E : 2201, 13, 17, 20, 24, 25, 27, 31, 32). Mardare Cornel (E : 2185, 91, 93, 206, 10, 11,

15—17). Cl. VII. Bîrleanu Dorel (E : 2206, 10, 11, 13, 15—18), Paul Ioan (E : 2192, 202, 06, 10, 11, 15—19, 20, 22, 25). Cl. VIII. Barbă Georgeta (E : 2211, 13, 15—18, 20, 24, 25, 32).

Ş. m. 8 cl. VI. Bucholtzer Cristine (E : 2201, 02, 06, 10, 11, 15, 17, 20). Cl. X. Eliescu Gheorghe (6503, 07, 16, 22, 25, 27, 29, 54, 58, 62, 69, 71, 615), Hulubei Marius (6503, 07, 10, 22, 27, 30, 54, 61, 69), Susai Emanoil (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 54, 55, 58), Todoricâ Ecaterina (6504, 07, 10, 19, 22, 25, 27, 31, 36, 58, 61, 63).

Ş. m. 9 cl. VII. Balan Rodica (E : 2198, 202, 06, 11, 13, 15—18).

Şc. de muzică şi arte plastice cl. VII. Filermann Adrian (E : 2198, 99, 201, 06, 11, 13, 15, 17, 43).

INEU (Crişana). Ş. m. cl. IX. Alexa Nicolae (E : 2209, 19; 6507, 10, 16, 19, 26, 27, 32, 36, 54, 63, 67, 69). Cl. X. Duse Ioan (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 26, 36, 61, 67, 86, 609, 15), Giurgiu Emil (6510, 15, 22, 25—27, 32, 34, 61, 85, 86, 99, 601, 09, 15), *Pop Marius* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—30, 32, 36, 38, 39, 43, 44, 46, 53, 54, 57, 58, 60—63, 65, 71, 72, 80, 82—84, 609, 14, 15, 18, 21). Cl. XI. Brîncoveanu Valeriu (6449, 56, 58, 60, 67, 76, 80, 84, 503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 44, 46, 56, 58, 61, 63, 76, 79), Pătruţ Popa Ion (6503—05, 07, 10—16, 19—27, 31, 32, 34, 37, 39, 44—46, 49, 51, 54, 55, 57, 58, 61, 67, 72, 79), Tăbîrcă Virgil (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 36, 45, 46, 80, 86, 615).

LIVADIA (Haţeg). Şc. 8 ani cl. V. Tîrjoianu Dan Marius (E : 2197, 98, 201, 06, 10, 16, 24, 26, 32).

LUGOJ. Şc. 8 ani nr. 2 cl. VII. Perii Silvia (E : 2215, 17, 19, 20, 22, 25, 32, 45).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Cristea Rodica (E : 2210, 11, 15—17, 20, 23, 26, 27, 32). Cl. VIII. Medelean Ion Horia (E : 2210, 11, 14—19).

Ş. m. cl. 1 VII. Marcu S. Flavia (E : 2185, 91—94, 98, 206, 10, 15—17, 20, 32). Cl. X. Băcilă Dan (6504, 07, 10, 16, 23, 25, 26, 34, 36, 52, 58, 85, 99, 609), *Hărăguş Ştefan* (6504, 10, 12, 15, 16, 19—28, 30, 32, 36, 38—40, 44—46, 49, 54—58, 61—63, 66—68, 70, 72, 69, 82, 84, 85, 97, 99, 601, 03, 05, 07, 09, 16), Ploscaru Gavriel (6510, 36, 54, 58, 61, 63, 65, 82, 84, 86, 87). Cl. XI. *Ghera Petru* (6505, 06, 11, 14, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 32, 38, 45, 49, 51, 54, 55, 58, 59, 61, 63, 65, 71, 76, 81—86, 88, 93, 95, 601, 09, 15, 41, 44, 63), *Iovănescu Ioan* (6503—05, 10—13, 16—19, 21—23, 26, 30, 32, 34, 36, 38, 39, 46, 49, 51, 52, 57, 61, 63, 72, 74, 82, 83, 85—88, 601, 07, 09, 44), Jurca Ioan (6452, 58, 80, 94, 517, 26, 28, 30, 38, 42, 47, 49, 54, 55, 61, 63, 72), Silaschi Ivan (6505, 07, 13, 14, 17, 18, 24—27, 30, 34, 36, 38, 39, 44, 46, 55).

Ş. m. 2 cl. IX. Orbulov Petru (E : 2207, 09, 12, 28, 31, 15, 16, 54, 83, 615).

MEDIAŞ. Ş. m. cl. VI. Călinescu Mariana (E : 2198, 206, 10, 15—18, 20, 27, 32).

Ş. m. 1 cl. XI. Mărgineanu Dan (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 615), Moldovan Liviu (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 27, 82, 86, 87, 615).

Ş. m. 2. *Orban Elek* (6503—32, 34—40, 42, 44—46), Şerbu Lucia (6505, 10, 12, 15, 22, 23, 25, 27, 54, 605).

MIERLEŞTI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VIII. Mezdrea I. Maria (E : 2199, 200, 01, 03, 05, 15—17).

MOINEŞTI (Bacău). Ş. m. cl. VIII. Ciocan Nicuşor (E : 2184, 85, 90—94, 96), Vrînceanu Gabriela (E : 2197—203, 06).

MORENI. Ş. m. cl. VIII. Nedelcu I. Constantin (E : 2211, 13, 17, 18, 32, 33, 40, 43, 47).

MOZACENI DEAL (Argeş). Ş. m. cl. X. Saru M. Gheorghe (6504, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 601, 09), Şerbănescu Teodora (6504, 07, 10—12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 31, 36, 39, 46, 57, 82—84, 87, 601, 03, 09, 15, 19, 39, 56). Cl. XI. Mirică M. Sorin (6504, 07, 10, 17, 19, 22, 23, 26, 87, 603, 15, 19).

NADLAC (Banat). Ş. m. cl. VII. Tiriac Ştefan (E : 2197, 200, 13, 16, 24, 26, 31, 32).

NADRAG. Ş. m. cl. X. David Nicolae (6503, 04, 12, 23, 29, 36, 71, 79, 83—86, 601, 09, 15), Hulubei Ioan (6512, 23, 26, 36, 71, 83—86, 601, 09, 15). Cl. XI. Bibescu Gheorghe (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25—27, 36, 79), Petrescu Zorel (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 25—27, 36, 79, 86, 601, 09, 15).

NĂSĂUD. Ş. m. cl. XI. Morari Ion (6457—59, 61—63, 84, 92, 504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 46, 54, 61, 63).

NEGREŞTI (Bahău). Ş. m. cl. VIII. Huma Adriana (E : 2210, 11, 13, 16—18, 20, 32), Roibu Niculina (E : 2198, 202, 06, 11, 15—18).

NEGRU VODĂ. Ş. m. cl. X. Merişor Matei (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63, 85, 601, 15).

NOVACI (Oltenia). Ş. m. cl. VI. Giurgiulan Gheorghe (E : 2197, 98, 206, 11, 15—18). Cl. VII. Berbecel Dumitru (E : 2197, 98, 200—02, 10, 11, 13, 16—19), Toadet Ionel (E : 2197, 201, 02, 06, 12, 15—18). Cl. VIII. Burlică Constantin (E : 2001, 02, 06, 09, 20, 21, 26, 32; 6615), Giurgiulan Ion (E : 2185, 87, 90—96, 98, 206), Păpurică Eugenia (E : 2197, 99, 202, 13, 15—18). Cl. X. Comănescu Gheorghe (6510, 16, 19, 22, 25—27, 36, 601, 09, 15, 16).

ORADEA. Ş. m. 4 cl. X. Ardelean Aurel (6507, 10, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 58, 61, 63, 609, 15).

ORAVIŢA (Banat). Ş. m. cl. X. Florescu Florian (6503, 10, 14—17, 19, 22, 23, 25—28, 34, 36, 54, 58, 62, 67, 71, 80, 81, 83, 86, 96, 601, 08, 09, 15).

OCNA MUREŞ. Ş. m. cl. IX. Grămadă Bazil (6507, 10, 16, 19, 25, 26, 44, 63, 83, 87, 99, 601, 09, 15).

ORAŞUL „GH. GHEORGHIU-DEJ" Ş. m. cl. VIII. Papanicolau Lefteris (E : 2211, 15—18, 20, 22, 27, 32, 33, 42, 43, 47). Cl. X. Ganea Gabriel (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 63, 601, 09, 15). C. XI. Cheinic Leonard (6504, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 26, 34, 38, 39), Şerban Nicolae (6503, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 26, 27, 30, 31, 34, 36, 38, 39, 43, 45, 46, 51, 54, 55, 58, 61, 63, 65, 67, 79, 87, 601, 09), *Timaru V. Theodor* (6503—05, 07, 10, 12, 13, 16, 16, 19, 22, 25—27, 30, 31, 34, 36, 38, 39, 46, 51, 53—55, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 74, 77. 79, 80, 82—85, 87), Tudor Darie (6510, 12, 15, 22, 26, 53—55, 58, 59, 61, 65, 67, 79).

ORADEA. Ş. m. 1 cl. X. Bora Gheorghe (6505, 10, 15, 16, 19, 25, 26, 61, 63, 83, 601, 15, 16), Crişan Liviu (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63, 84, 85, 96, 601), Hîncu Marius (6503, 07, 10, 16, 18, 19, 22, 25—28, 30, 31, 34, 36, 43, 44, 45, 54, 58, 59, 51, 63, 67, 69, 80, 83, 84, 86, 99, 601, 05, 06, 09, 13, 16, 18), Verna Mircea (6510, 16, 19, 22, 26, 61, 63, 84, 85, 601, 09, 15). Cl. XI. Borcia I. Sorin (6503, 04, 10, 12, 15, 16k 19, 22, 26, 39, 54, 61, 63), Gavirş Traian (6503, 05, 17, 10, 16, 19, 22, 25—27, 46, 60, 61, 63, 65, 80, 82, 83, 86), *Negruţiu Vasile* (6403, 05, 06, 09, 10, 11, 13—16, 18—21, 24, 25, 27, 29, 31, 36, 41, 43—46, 48—50, 54—66, 67, 69, 71, 74—76, 79, 80, 82, 84, 86—89, 92, 93, 97—99, 503, 07, 10—27, 34, 36, 38—41, 44, 45).

Ş. m. 2 cl. XI. Ianza Augustin (6507, 12, 16, 22, 25, 27, 36, 61, 82, 84, 85, 87). Ş. m. 4 cl. IX. Nemethi Saba (6503, 07, 10, 16, 19, 25—27, 53, 54, 61—63, 71, 83, 99, 609, 15). Cl. X. But Tiberiu (6503, 04, 07, 10, 16, 18, 19, 22, 23, 25—27, 36, 40, 54, 58, 61—63, 67). Cl. XI. Bolon Ion (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25—28, 36, 38, 39, 43, 46). Bordeş Arcadiu (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 27—30, 34, 36, 43, 44, 46), Deak Alexandru (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 36, 46), Sighet Gheorghe (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 25—27, 36, 38, 49).

ORĂŞTIE. Ş. m. cl. XI. *Hîndorean Constantin* (6457, 59, 61, 63, 67, 503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—27, 34, 37, 44, 46, 54, 60, 61, 63, 66, 80, 81—88, 96, 99, 605, 15, 23).

ORŞOVA. Cl. CI. Beck W. (E : 2201, 06, 15, 20, 24, 32). Cl. VII. Vişineanu Constantin (E : 2201, 05, 06, 11, 18, 27, 34, 35, 40, 47). Cl. VIII. Magelin Oana (E : 2197, 201, 10, 13, 15, 17, 18, 28, 32), Simec Beatrice (E : 2197—99, 201, 06, 15, 32).

OŢELUL ROŞU. Cl. VII. Taroata A. (E : 2199, 202, 06, 10, 11, 17, 20, 32, 42). Cl. VIII. Taroată Gh. (E : 2199, —203, 06, 10, 11, 13, 15—18, 20, 22, 47). Cl. X. Sabău Livia (6510, 63, 64, 59—61, 601, 06, 08, 15).

PANCIU. Cl. VII. Luca Georgeta (E : 2198, 99, 201, 15, 18, 22, 24, 26, 27, 32, 38, 40, 43, 47), Ioniţă Marin (E : 2210, 2198, 99, 201, 15, 18, 22, 24, 26, 27, 32, 38, 40, 43, 47), Ioniţă Marin (E : 2210, 15—18, 20, 31, 32, 40), Popa Marcel (E : 2211, 15, 17, 18, 2—27, 29, 31—33, 38, 40, 42, 43, 46, 47).

PAŞCANI (Iaşi). Cl. X. Plai N. Gheorghe (6504, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 63, 73, 85, 601, 09, 15).

PĂUNEŞTI (Bacău). Cl. VI. Novac G. Maria (E : 2190, 93, 97, 215—17, 19). Cl. VII. Georghe Gabriela (E : 2199, 200, 11, 13, 16, 17, 27, 32), Novac Maria (E : 2200, 06, 09—11, 13. 16, 19, 20, 27), Riziuc Rodica (E : 2200, 01, 06, 13, 16, 18, 20, 27, 32). Cl. VIII. Bacalu M. Lucia (E : 2190, 95—98, 201—03, 09—11, 16, 20, 27, 32), Banciu Virginia (E : 2184, 97—99, 200, 03, 06, 10, 11, 13—20), Berbece Maria (E : 2188—90, 99, 200, 02—10, 17, 19, 22, 27, 32), Gidea Otilia (E : 2187, 89, 97, 99, 208, 10, 11, 13, 15, 20—22, 26, 27, 32 ; 6497, 522, 61), Neagu Elena (E : 2194, 97, 98, 200, 03, 08, 10, 11, 13—17, 19, 20, 27, 32), Sandu). Victoriţa (E : 2194, 95, 98, 200, 03, 10, 11, 13—18, 20, 27, 32, 65, 63), Vişan Ştefan (E : 2183, 97, 98, 200, 01, 06, 10, 11, 13—18, 21, 27, 32), Ghiţă Eugen (E : 2209, 6503, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 26).

PĂTÎRLAGELE. Cl. IX. Toma Veronel (6519, 25, 26, 29, 61, 83, 601, 06, 09, 15). Cl. X. Băiculescu Ion (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 87, 91, 609, 15), Toma Florin (6504, 15, 19, 25, 27, 29, 34, 61, 63, 83, 86, 98). Cl. XI. Andrei Titus (6529—32, 34, 38, 40, 43, 44, 51, 58, 60, 61, 69, 71, 74, 79, 82—87, 97, 601, 03, 05, 07, 09, 15, 16, 21, 29, 42, 44, 63), Pavel Dumitru (6545, 53, 57, 58, 62, 69, 74, 79, 82—84, 86, 87, 97, 601, 05, 08, 09, 15).

PETROŞANI, Hunedoara Şc. 8 ani nr. 1 cl. VIII. Roman Adrian (E : 2201, 20, 21, 23, 26, 27, 32, 33, 42, 47).

Şc. 8 ani nr. 4 cl. VI. Duda Iordan (E : 2198, 210, 13, 16, 18, 20, 31, 32, 40, 43).

Ş. m. cl. IX. Tămaş Doru (6507, 10, 12, 15, 26, 27, 57, 61, 63). Cl. X. Anghel

Adrian (6503, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 25—27, 36), Bălan Ion Toma (6503, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 25—27, 36, 61, 63).
19, 22, 25—27, 36, 61, 63)

PIANUL DE SUS (Hunedoara) Cl VIII Nanu P Ion (E : 2198, 200, 10, 11, 13, 16—20, 23, 32),

PÎNCOTA (Banat) Cl IX, Chebeleu Petru (6522, 25, 27, 63, 83, 609, 15) Cl XI Giurgiu Florin (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—28, 36, 38, 39, 46),

PITEŞTI, Şc 8 ani nr. 8 cl. VIII. Blaj Cristian (E : 2197, 99, 200—04, 06—08). Ş. m. 1 cl. IX. Pavelescu Ion (6503, 07, 10, 11, 13, 25—27, 83, 609, 15), Rubinstein Magda (6510, 16, 19, 22, 25, 27, 61, 63, 71, 83, 601, 09, 15). Cl. X. Ancăr Simona (6505, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 36), Găişeanu Cornelia (6503, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 36, 61, 63, 83—85, 601), Maşela V. Ion (6507, 10, 15, 16, 17, 19, 22, 25, 71). Cl. XI. Floeea Amton (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 24, 61, 63, 67, 80, 83), Maftei Victoria (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 26, 45, 63, 82, 83). Ş. m. 2 cl. X. Grigore Mihai (6503, 05, 07, 10, 16, 19, 25, 83, 84, 605, 09, 15), Moisescu Ion (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—29, 31, 34, 36, 39). Cl. XI. Diaconescu Dorin (6503, 22, 27, 29, 31, 36, 38, 39, 55, 58, 59, 65, 67, 71). Ş. m. 3 cl. X. Nistorescu Constantin (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25——27, 29, 35, 39, 44—46, 53, 54, 61, 63, 66, 71, 80, 85, 601, 07, 9, 15, 16).

PLOIEŞTI. Şc. 8 ani nr. 4 cl. VII. Andreescu Luminiţa (E : 2206, 15, 16, 18, 22, 32, 40, 43), Grigorescu Georgeta (E : 2197, 206, 10, 16, 18, 22, 24, 32), Nichifor Magdalena (E : 2220—24, 26, 27, 32)

Şc. 8 ani nr. 9 cl. VII. Voiculescu Ileana (E : 2206, 11, 15—18, 20, 32). Şc. 8 ani nr. 10 cl. VI. Vişan George (E : 2202, 06, 10, 11, 13, 15, 16, 32, 40, 43, 46). Şc. 8 ani nr. 12 cl. VI. Dinu Ileana (E : 2198, 210, 13, 15—17, 24, 32). Şc. 8 ani nr. 17 cl. VII. Simion Eftimie (E : 2215, 18, 19, 21, 22, 32, 34, 45). Şc. 8 ani nr. 21 cl. VI. Păunescu Elisabeta (E : 2198, 206, 18, 15, 16, 18, 24, 32), Tudose Mihai (E : 2206, 10, 13, 15—17, 20, 32), Zielinski Roxana (E : 2191, 200, 10, 14, 13, 15, 18, 20, 26, 32). Cl. VIII. Andrei Dorina (E : 2219, 26, 31——33, 35, 45, 47), Antohi Lina (E : 2219, 20, 24, 25, 27, 29, 40, 43), Anton Victor (E : 2229, 32, 33, 35, 36, 38, 43, 45), Bogdan Hortesnia (E : 2220, 22, 23, 36, 40, 43, 47), Circioagă Teodora (E : 2219, 23, 26, 33, 35, 38, 42, 45, 47), Cristea Dobriţa (E : 2220, 27, 32, 38, 40, 43), Danielenco Ion (E : 2222, 32, 35, 36, 38, 40, 43), Drăgan Elvira (E : 2220, 27, 32, 38, 40, 43), Dragomirescu Argentina (E : 2219, 20, 24, 29, 36, 40, 43, 45), Horoş Dorin (E : 2229, 33, 35, 36, 38, 45—47), Drăjneanu Ion (E : 2229, 32, 33, 35, 36, 38, 43, 45), Dromca Dragomir (E : 2220, 22, 24, 25, 27, 29, 32), Marcu Augustin (E : 2232, 33, 35, 36, 38, 43, 47), Palangă Maria (E : 2210, 20, 24, 27, 36, 40, 43, 45), Sorescu Gabriela (E : 2210, 13, 15—18, 36, 38), Stanciu Gh. (E : 2219, 22, 32, 33, 36, 42, 43, 45), Şerban Sonia (E : 2219, 20, 24, 25, 29, 40, 43, 45), Toma Liviu (E : 2220, 31—33, 35, 36, 39, 40, 43, 45), Vrînceanu Virgil (E : 2229, 33, 35, 36, 38, 45, 46).

Ş. m. 1 ,,I. L. Caragiale'' cl. VI. Costache Dorin (E : 2199, 202, 13, 15, 17, 18, 20, 27, 33, 42). Cl. VII. Alter Marta (E : 2215, 20, 25, 27, 32—35, 40, 43), Bîzu Consuela (E : 2198, 202, 06, 10, 15—18, 40, 43), Cucurezeanu Mihaela (E : 2210, 11, 13, 15—18, 33, 40, 42, 43), Dodon Liana (E : 2211, 13, 15, 16, 18, 20, 32, 40, 43), Gafiţeanu Liliana (E : 2210—13, 15—19), Grigorescu Niculae (E : 2197, 99——202, 06, 10, 15, 16, 18), Ion D. Mihail (E : 2211, 20, 21, 24, 25, 33—35, 42, 43), Mărgăritescu Rodica (E : 2210, 13, 15—18, 33, 34, 42, 47), Necula Luiza (E : 2220, 27, 32, 33, 35, 39, 40, 43). Neguţ Elena (E : 2211, 13, 15, 18, 29, 32, 33, 40, 42, 43), Necuţă Tudora (E : 2220, 22, 25, 27, 32—35, 40, 43), Olteanu Gheorghe (E : 2202, 06, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 24, 25, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 47), Rişmoreanu Delia (E : 2211, 13, 16, 17, 20, 25, 33, 38, 42), Vasilescu Roxana (E : 2210, 11, 15—18, 40, 43). Cl. VIII. Birescu N Cri³xtina (E : 2199, 202, 10—18), Boaldă Nicolae (E : 2210, 11, 13—15, 17, 19, 20, 27, 28, 32; 6510, 61, 63), Brenner Mircea (E : 2198—203, 06, 10, 15, 18), Cristescu Olga (E : 2204, 06, 10, 11, 13—18), Dincă Cornelia (E : 2210, 11, 15, 17, 28, 33, 40, 43), Dobrescu Laurenţiu (E : 2210, 11, 13—18, 20, 32, 33, 38, 40), Gafiţescu Carmen (E : 2210—13, 16—19), Iordache Sorin (E : 2198—203, 06, 10, 11, 13—18), Iosif Carmen (E : 2200, 02, 08—10, 12—17, 19——21, 29, 32, 36, 37, 45), Popescu Mariana (E : 2210, 11, 13—17, 19—21, 26, 29, 32, 33, 35, 36, 38—40, 42—45; 6554, 48, 60——64, 69, 61, 96, 99, 609, 15, 36, 41, 46, 49, 53), Rothlender Luminiţa (E : 2210, 11, 14, 15, 27, 28, 31, 32), Seines Adina (E : 2210, 11, 15—20, 23, 32). Cl. IX. Breţcanu Sabina (6510, 22, 26—28, 32, 43, 54, 60—63, 69, 80, 86, 97, 99, 601, 09, 15, 18, 22, 28, 29, 31, 46, 53), Dumitrescu Constantin (6510, 26, 27, 34, 36, 61, 63, 601, 09), Ionescu A. Lucian (6554, 80, 83, 97, 99, 601, 15, 18, 22, 59), Neguţ Gheorghe (6507, 19, 25, 54, 58, 80, 85, 86, 663), Nicolescu N. Amelia (6510, 19, 22, 26—28, 61, 99, 601, 09, 15), Olariu Ion (6510, 19, 25, 26, 61, 63, 86, 97, 99, 601, 09, 15), Olteanu

Raluca (6510, 15, 19, 22, 61, 63, 94, 601), Roşan Dan (6510, 25, 27, 28, 58, 86, 99, 601, 15, 22, 46, 53), State Adrian (6503, 10, 22, 28, 32, 43, 61, 86, 601, 15). *Cl. X.* Apostolescu Dan (6561, 63, 82—84, 86, 88, 601, 05, p9, 15), Rădulescu Doru (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 2527, 36), Bîzu Marius (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 27, 36, 54, 58, 61, 63, 67), Vruceru Victor (6503—05, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 26, 27, 54, 58, 61, 63, 67, 615), Dinu Marian (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25—27, 29, 31, 34, 36, 37, 43, 45, 46, 53, 54, 58, 59, 61, 63, 65—67, 69, 71, 73, 79), Minculescu Octavian (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 36, 39, 43, 45, 54, 57, 58, 61—63, 85, 97, 601, 05—07, 15, 16, 18, 22), Minea A. Florea (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 40, 53, 54, 58, 61—64, 66, 67, 69, 71, 83, 99, 601, 65, 09, 15, 16, 19), Oprescu Teodor (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 2527—, 32, 36, 58, 63, 615), Simion Gheorghe 6517, 31, 35, 40, 43, 45, 53, 54, 58—60, 62, 64, 66, 67, 71, 72, 81—84, 87, 88, 97, 6601, 05—19, 14—16), Stan Ion (6507, 23, 29, 30, 36, 39, 43, 54, 57, 58, 61, 63, 601, 05—07, 09, 15, 16, 18). *Cl. XI.* Burt Liliana (6504, 10, 12, 15, 16, 23, 36, 38, 39, 45, 51, 57, 58, 62, 65, 67, 82, 86, 87, 88, 609, 15), Bratu Gh. Ştefania (6504, 10, 12, 15, 53, 55, 61, 63, 87, 601, 03, 05, 09, 31, 32, 44, 56), Bucşa Viorel (6301, 89, 446, 507, 12, 16, 63, 97, 99, 601), Davidescu Radu (6503—08, 10—27, 36, 38, 39), Ilisei Florin (6505, 06, 08, 09, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 24, 41, 44, 49, 54, 55, 57—59, 61, 63, 65, 72, 80, 82, 83, 84, 86—88, 97, 601, 05, 08, 09, 15), Mocanu Dan (6574, 82, 84, 99, 605, 09, 15, 22, 30, 31, 41, 46, 63), *Oprescu Gabriel* (65055, 06, 09, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 24, 29, 32, 37, 38, 39, 41, 43—46, 49, 51, 53—55, 57——59, 61—63, 65, 66, 71, 72, 82—87), Silaev Silvia (6518, 32, 38, 43, 61, 80, 82—85, 601, 27, 28, 30—32, 38, 41, 44, 46), Soare Cristi (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 22, 25, 26, 36, 38, 39, 44, 45, 51, 57, 58, 62, 63, 67, 80, 82, 84—88, 99, 601, 08, 15, 17, 24), Ştefănescu M. Viorel (6503——20, 22, 23, 25, 36), Vrînceanu Vasile (6518, 51, 61, 70, 74, 80, 82—85, 88, 96, 97, 99, 601, 04, 05, 07, 09, 15, 18, 22, 27, 28, 30—32, 39, 41, 44, 46, 49, 53, 56, 60, 63).

Ş. m. 2 cl. VI. Ionescu Mihaela (E : 2198, 201, 02, 06, 10, 15, 17, 18), Lupulescu Livia (E : 2201, 02, 04, 06, 10, 13, 15—17, 19), Tintă Marilena (E : 2198, 201, 02, 06, 10, 15—17). Cl. VII. Dumitrescu Mihai (E : 2210, 15, 17, 18, 20, 32, 33, 42), Nicolescu Ileana (E : 2215—18, 20, 32, 40, 43, 46), Nicolescu Traian (E : 2197, 202, 06, 10, 20, 24, 27, 32), Stătescu Virian (E : 2198, 200, 02, 06, 11, 15, 17, 18, 20, 32). *Cl. VIII.* Antonescu Adrian (E : 2211, 13, 15—17, 19, 20, 27, 31), Vişan B. Marian (E : 2203, 04, 06, 08, 09—22, 24, 25, 27—29, 31—38, 40, 42, 43, 45, 47, 506, 15, 16, 22, 26, 39, 51, 63, 83). *Cl. IX.* Beldescu N. Petre (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 27, 53, 54, 58, 59, 61—63, 71, 83, 601, 09), Cernat Laurenţiu (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63), Cernea Raul (6503, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 32, 34, 36, 43, 46, 53, 55, 58, 59, 61—63, 67, 69, 71, 72, 79, 83, 601, 06, 09, 15, 17), Enache Ion (E : 6510, 15, 19, 22, 25—27, 61, 63, 601, 09), Mignea Armenius (6553—55, 58—61, 63, 67, 71, 79, 85, E : 2252, 19) Neagoe A. Paulina (6510, 16, 19, 22, 36, 61, 63, 601, 09, 15, 22), *Orăşanu Laurenţiu* (6482, 503, 04, 07, 15, 16, 25, 28—31, 43, 46, 53, 54, 58, 61—63, 67, 71, 72, 80, 82—86, 97, 601, 09, 15, 33, 44, 46, 49, 53, 65), Spiridon Maria (6531, 44, 54, 60, 61, 63, 71, 83, 609, 11, 15, 36), Stoica V. Tudor (6516, 19, 22, 34, 61, 63, 83, 609, 15), Tigănuş Dan (6503, 15, 19, 25, 26, 27, 61, 63, 601, 09, 10). Cl. X. Andreescu Ioan (6504, 15, 17, 25—27, 29, 31, 32, 34, 36, 39, 43, 53—55, 58, 62, 63, 67, 72, 79, 80, 83—86, 88, 99, 605—07, 10, 14, 16, 31, 61), *Bădescu Alexandru* (6504, 07, 16, 19, 22, 25—32, 34, 36, 43, 44, 46, 53—55, 58, 59, 61—63, 67, 69, 72, 79—83, 99, 601, 05—09, 15,17), Dîmboviceanu Marilena (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 36, 58, 61, 63), Palancă Radu (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 61, 63, 82, 96, 601, 09), Soare Paula (6510, 22, 39, 58, 61, 63, 69, 83, 86, 87, 99, 601, 07, 09, 15), *Stan Emil* (6505, 06, 08, 09, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 29, 33, 35, 37, 38, 40—43, 45—48, 50, 53—56, 58, 60—62, 65, 67, 71, 72, 79, 80, 83—86, 97, 601, 05, 09, 15, 22, 31), Tudor Matilda (6504, 07, 10, 19, 20, 36, 54, 58, 61, 67, 79, 609, 15), *Tilimpea Viorel* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25—31, 34, 36, 39, 40, 43—46, 53—55, 58—63, 67, 69, 72), Ţintă Mircea (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 3,0 36, 39, 43, 45, 46), Vişan Ştefan (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—29, 31, 32, 35, 36, 39, 44, 45), Voinea Iulian (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 36, 41, 44, 51, 63, 615). Cl. XI. Gheorghiu Liliana (6563, 82, 83, 85, 98, 88, 601, 04, 15, 44, 48), Marica Smaranda (6507, 12, 13, 16, 63, 85, 97, 09, 44, 48), Radu Vasile (6549, 57, 59, 69—71, 78, 93, 607, 11, 14, 16, 20, 23, 26, 30, 32, 33, 35, 39, 41—44, 48, 52—57, 59—65), Ştefănescu Eliade (6503, 08, 10, 12, 13, 17—19, 23, 29, 31, 36, 39).

Ş. m. 4 cl. VII. Dumitrache Ion (E : 2197, 200—02, 06, 10, 11, 13—18). Cl. VIII. Ionescu T. Mihai (E : 2210, 11, 15—19;

6561, 63), Vasilache Dan (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 09, 15—17). Cl. IX. Albulescu Mircea (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 601, 09), Neguriţă Paul (6510, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 32, 36, 516), Oroviceanu F. Maria (6554, 62, 69, 83, 86, 88, 601, 09, 15). Cl. XI. Teodosiu Niculae (6510, 12, 13. 15 16, 19, 23, 25, 27, 36, 38, 39, 44).

Ş. m. 5 cl. IX. *Voicilaş Corneliu* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 29, 31, 36, 38, 39, 44, 53, 54, 58, 60, 61, 63, 71, 73, 82—86, 99, 601, 09, 15, 41, 48).

Ş. m. 6 cl. VI. Stoica Valentin (E : 2223, 25—27, 33, 35, 38, 40, 43). Cl. VIII. Stan Gh. Constantin (E : 2197, 98, 200—03, 06, 22, 25—27, 32, 35, 40, 43). Cl. IX. Steinecker Gabtiel (6457, 59—62, 510, 22, 26, 54). Cl. XI. Sanda Ion (6504, 10, 53, 55, 61, 63, 87, 603, 05, 09, 32, 44, 56), Tudoran Constantin (6504, 10, 12, 15, 53, 55, 61, 63, 82, 87, 601, 03, 09, 32, 44, 56).

Absolvent Minculescu Gheorghe (6561, 63, 80, 82, 86, 87, 601, 05, 09, 15, 27, 30, 31, 32, 34, 44, 48).

PLOPENI. Cl. X. Olaru Ion (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 34, 83—86, 601, 09, 15).

PREDEAL. Cl. XI. Ioniţă Maria (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 30, 32, 34, 36, 39, 43—46, 54, 57, 59, 61—63, 65—67, 80, 82—88, 601).

POIANA (Bucureşti). Cl. VI. Marin D. Aurelia (E : 2198, 201, 02, 06, 10, 11, 15, 17—20, 32).

PRISĂCARI (Iaşi). Cl. VIII. Cristea Cecilia (E : 2197—200, 02, 06, 20—27, 31, 32).

PRUNDUL BÎRGĂULUI (Cluj). Cl. IX. Vrînceanu Andrei (6421, 50, 510, 23, 25, 61, 67). Cl. X. Vlad Ilie (6507, 09, 10, 15, 19, 22, 36, 54, 57, 61, 63).

PUCIOASA. Cl. IX. Călinescu Nciolau (6510, 34, 53—55, 61—63, 67, 80, 83, 91, 601, 09, 15), Cimpoca Gh. Gheorghe)6510, 26, 27, 34, 53, 58, 61—63, 86, 601, 09, 15, 49), Comănoiu Maria (6510, 15, 16, 19, 22. 25, 27, 54, 61, 83, 601, 09), Diaconu Gh. Gh, (6510, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 53, 54, 59, 60, 61, 65, 69, 71, 83, 84, 601, 09), Firetean, Valeria (6507, 10, 16, 19, 22, 54, 58, 62, 99, 601, 09, 15), Lăzăroiu Maria (6510, 25, 54, 61, 63, 609, 15), Lică N. Chirita (6510, 16, 54, 61, 63, 601, 09, 15), Poll Elisabeta, (6510, 16, 19, 22, 25, 27, 54, 61, 63, 601, 09), Sprinceană Eliza (6510, 16, 19, 22, 25 54, 61, 63, 601, 09, 15), Tabacu Ion (6510, 15, 22, 25, 54, 61, 63, 601, 09, 15), Ţugui Ion (6510, 25, 54, 61, 63, 601, 09, 15), Ţuţuianu Mihai (6510, 19, 34, 54, 59, 61—63, 79, 99k 601, 09, 15). Cl. X. Mărculescu Corneliu (6554, 61, 63, 70, 72, 79, 82, 83, 86, 87, 605, 09, 15, 19, 20, 31, 41, 42, 44, 46, 49, 57, 69—63), Negulescu Rodica (6504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 54, 61, 63, 67. 86, 601, 09, 15), Stoian V. Ion, (6503, 04, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25—27 42, 44, 54, 55, 58—63, 67, 80, 82—99, 061, 05, 06, 09, 15, 17), *Vasilescu Nicolae* (6503—05, 07, 10—12, 14—17, 19—24, 26, 27, 31, 32, 34, 36, 38—40, 43—46, 49, 54, 57, 58, 60—65, 69—72, 74, 79—86, 96, 97, 99, 603, 05, 07, 09, 11, 15, 19, 23). Cl. XI. Firetеanu Virgil (6503—07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 34, 36, 36, 39, 34, 45, 54—56, 58, 59, 61—63, 71, 82——88, 99, 601, 09, 15), *Vasilescu Ana* (6504, 41, 51, 54, 57, 58, 60—65, 69—72, 74, 79——87, 96, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 11, 15, 19, 23, 30, 32—36, 39, 41, 43, 44, 46, 48, 49, 53, 61—63).

RADOMIREŞTI (Oltenia). Cl. VI. Sîrbuleasa Radu (E : 2215, 17, 18, 20, 32, 40, 43, 47). Cl. IX. Duică Gheorghe (6553, 54, 59—61, 63, 71, 96, 601, 06, 09, 15). Cl. X. Andrei Ion (6504, 07, 10, 12, 19, 22, 25, 26, 28, 61, 63, 601, 05, 09, 15), Ene Gheorghe (6503, 04, 12, 15, 25, 58, 83, 96, 601, 09, 15), *Dincă Gheorghe* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 31, 39, 43, 45, 46, 53—55, 57—59, 61, 63, 67, 71, 79, 82, 83, 601, 03, 05, 09, 15, 16, 21), Roşu Gheorghe (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—27, 34, 61, 63, 71, 83, 601, 06, 09), Stanciu Dumitru (6503, 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 38, 39, 43, 54, 57, 58, 61), 63, 67, 71—73, 79, 83, 83, 85, 86, 601, 05—07, 09, 13, 15—18, 22).

RĂDĂUŢI. Cl. VI. Weinstein Berta (E : 2198, 202, 06, 10, 15, 16, 20, 24, 32, 40, 45). Cl. XI Weinstein Jack (6549—52, 54, 57—59, 61—63, 68, 69, 72, 79).

REŞIŢA. Cl. IX. fără nume (6510, 19, 23, 26, 36, 44, 54, 60, 61, 69). Cl. XI. Mănescu Tiberiu (6503, 04, 07, 10, 15, 16, 18, 19, 22, 27, 46, 61, 63, 605).

RÎMNICU SĂRAT. Cl. VI. Apostol Mariana (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 10, 15——18, 20, 25—27), 32, 35, 38, 40, 43, 46, 47). Cl. X. Apostol V. Ovidiu (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 37, 44, 45), Popescu Constantin (6583——85, 89, 609, 15, 29, 39, 46, 48, 49, 63). Cl. XI. Dina Marian (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 30, 32, 36, 38, 39, 45, 46), Droaşcă Bogdan (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 30, 32, 36, 39, 46), Niculicioiu Gh. (6551, 55, 58, 61, 73, 84—86, 92, 606, 14, 31, 34, 39, 41, 44, 46, 49, 56, 59, 62, 63, 65), Stratulat P. Florin (6507, 10, 13, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 39, 44, 45), Voinescu D. Ionel (6503, 04, 10, 12, 15—19, 22, 23, 26, 36, 83, 87, 97, 601, 09, 15).

RÎMNICUL VÎLCEA. Cl. X. Catargiu Virginia (6507, 10, 15, 22, 44, 61—63, 83, 86, 601, 05, 09, 15). Cl. XI. Munteanu Dumitru (6503—32, 34, 36, 38, 39, 43, 46),

Niculescu Gh. (6557, 80—83, 87, 601, 07, 09, 15, 19, 21).

ROMAN. Cl. VI. Planton Emilia (E, 2197—99, 201, 02, 06, 10, 15—18). Cl. IX. Ardeleanu Rodica (6507, 10, 15, 19, 22, 25—27, 54, 61, 63). Cl. X. *Bercovici Nelu* (6482, 92, 504, 12, 13, 18, 23, 29, 36, 39, 53, 54, 59, 80, 82—88, 97, 99, 601, 05, 06, 09, 15—18, 39, 41, 44, 46, 53, 61, 63), Căpăţînă Valeriu (6504, 12, 23, 36, 80, 82—86, 97, 601, 05, 09, 15, 16), Lăzăroiu Dan (6561, 63, 82—88, 97, 99, 601, 06, 09, 11), Pamfil Valeriu (6472, 523, 27, 45, 58—61, 63, 66, 67. 72, 83, 97, 99), Ovidiu Teodor, (6472, 523, 26, 27, 34, 36, 39—41, 44—46, 58, 59, 61, 63, 83—85, 68, 87, 88, 96, 97 99, 601, 05, 09, 15, 16), Smit Petru (6504, 23, 45, 58—63, 67, 69, 80, 82—85, 87, 88, 98, 97, 99, 601, 05, 09, 15, 16, 34, 39, 44, 46, 63). Cl. XI. *Gavriliu Mihai* (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25——27, 29, 31, 36, 39, 46, 51, 53—55, 58, 59, 61—63, 65, 67, 71, 73, 80, 83, 84, 86, 88, 96, 97, 99, 601, 05, 06, 09, 15—18).

ROŞIORII DE VEDE. Cl. VII. Antonescu Domnica (E : 2202, 06, 11, 63, 83, 86, 601, 15), Cîmpeanu Gheorghe (6553, 54, 61, 63, 71, 86, 615), Bălan I. Gheorghe (6503, 10, 11, 14, 15, 16, 19—22, 24—28, 34, 40, 53, 61, 63). Cl. X. Bădica Dumitru (6510, 15, 16, 19, 22, 25—27, 61, 63, 83, 86, 601, 15), Călin Ion (6510, 16, 19, 61, 63, 83, 86, 99, 609, 15), Dumitru Petre (6504, 10, 12, 15, 16, 23, 26, 36, 39, 61, 63, 83, 87, 601, 09, 15), Nat Simina (6507, 10, 19, 26, 54, 61, 93, 94, 601, 09, 51), Sandu Marin (6554, 58, 60, 69, 80, 83, 84, 86, 601, 07, 09, 15, 16), Stanciu Gheorghe (6504, 12, 15, 61, 63, 67, 83, 84, 86, 87, 97, 601, 05, 09, 15). Cl. XI. Blotz Adrian (6456, 59, 603, 04, 10, 12, 15, 22, 25, 26, 36, 34, 39, 46, 64, 74, 83, 605), Nedelea Ion (6507, 17, 18, 34, 40, 55, 67, 80, 630, 33, 36, 39, 34, 48).

RUSENII VECHI (Iaşi). Cl. VIII. Despea Anica (E : 2210, 11, 15, 17—19 ; 6561, 69, 79), Luca Virginia (E : 2210, 11, 15, 17—19 ; 6561, 63, 71, 79).

RUDINA (Oltenia). Absolvent Giurgiuc Costel (6628, 30, 31, 36, 37, 39—41, 44, 46, 53, 57, 62, 63).

SĂCELE (Braşov). Cl. IX. Cvere Lenke (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 36, 38, 61, 63, 84, 601).

SALCIA (Bucureşti), Cl. VII. Cherca Elena (E : 2201, 02, 10, 11, 16—18, 20, 32), Prună I. Constantina (E : 2201, 02, 10, 11, 15, 16, 18, 20, 32). Cl. VIII. Bunescu Ion (E : 2198, 202, 03, 11, 15, 18, 20, 23, 26), Marian Cristina (E : 2202, 03, 11, 15, 16, 18, 20, 23, 26, 32), Stănescu Florea (E : 2198, 215, 17, 18, 20, 23, 26, 32).

SATU MARE . Ş. m. 1 cl. IX. Ciornău Ion (6443, 507, 16, 19, 22, 25, 27, 55, 61, 63, 79, 609, 15), Oprea Viorica (6507, 10, 19, 22, 25, 27. 61, 63, 83, 86, 609, 15), Sichet Margareta (6507, 27, 34, 53, 55, 61, 63, 71, 79, 609, 15, 19, 28, 31). Cl. X. Bacov Carol (6554, 58, 67, 80, 84, 99, 609, 34, 36, 39, 41, 45, 46, 69), Chişu Corneliu (6503, 04, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 29, 61, 63), Ciornău Nicolae (6503, 07, 16, 22, 54, 61, 63, 71, 79, 83, 601), Moldovan Mariana (6507, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 29, 54, 58, 63, 79, 601, 05, 15), Palti Emil (6503, 07, 10, 15, 19, 22, 25, 27, 37, 40, 63, 91), Taloş Gheorghe (6510, 15, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 80, 83, 85, 609, 15), Tătaru Ştefan (6510, 15, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 80, 83, 85, 605), Vákár Francics (6510, 15, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 80, 83, 615). Cl. XI. Hossu Alexandru (6512, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 57, 67, 72, 74, 615). Ş. m. 2 cl. X. Nemeş Gavril (6504, 12, 15, 18, 29, 36, 40, 54, 54, 58, 61, 83).

SĂVENI (Suceava). Cl. VIII. Fără nume (E : 2210, 11, 17, 20, 25, 27, 33, 42, 43, 47). Cl. IX. Teleş Aron (6507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 501, 63, 83, 85, 601).

SIBIU. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Zaharia Nicolae (E : 2197, 98, 200, 01, 02, 04, 16—08, 10—19.

Şc. 8 ani nr. 4 ccl. VII. Laschescu Dorin (E : 2197—202, 04, 06). Cl. VIII. Stănculescu Nicolae (E : 2210, 11, 15—18, 20, 28, 32 ; 6561). Şc. 8 ani nr. 7 cl. VII. Marinuş Marin (E : 2208, 10, 11, 13, 15—19, 32). Şc. 8 ani nr. 8 cl. VIII. Găvozdea Adrian (E : 2210, 15, 17, 18, 20, 32, 33, 40, 43, 47). Şc. 8 ani nr. 9. Mitrea Ion (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 32, 40, 43). Şc. 8 ani nr. 12 cl. VII. Holdiş Diana (E : 2210, 11, 15, 16, 18, 33, 40, 42, 43), Nicu Olguţa (E : 2217, 18, 21, 24, 26, 31, 33, 40, 43). Şc. 8 ani nr. 15 cl. VI. Schuster F. (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20). Cl. VII. Benkö Brigitte (E : 2210, 11, 13, 15, 19, 40, 43), Cornea Mariana (E : 2210, 13, 15—17, 19, 20), Gründisch Helmut (E : 2210, 13, 16—17, 19, 20), Graf Ilse Renate (E : 2210, 13, 15—17, 19, 20 43), Grigorescu Dorrit (E : 2210, 11, 13, 15—17, 20), Waner Betsy (E : 2211, 13, 15—17, 19, 20). Cl. VIII. Bucur Ioan (E : 2199, 203, 06, 08, 15, 18, 20, 22, 32 ; 6526), Kaldeba Sabina (E : 2210, 13, 16, 17, 19, 20), Kuchel Anne-Marie (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20, 45), Horedt Brigitte (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20), Leşiţă Dan (E : 2202, 09, 15, 16, 18, 19, 22, 31, 32), Vîrbănescu Mariana (E : 2210, 11, -o3, 15—17, 19, 20). S.m. 1 él. IX. Aloman Iuliana (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 26, 32, 54, 61, 63), Babeş Carmen (6503, 07, 10 16, 19, 22, 32, 54, 61), Buzoianu Mureş (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 31, 32, 54, 60—63), Buzgoriu Mircea (6503, 07,

100 19, 22, 25—27, 32, 61, 63), Biţu Radu (6503, 07, 16, 19, 22, 25, 54, 71). Bualdenciu Ion (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 29, 61, 63, 83, 601, 15), Dobra Mariana (6507, 10, 12, 16, 19, 22, 26, 27, 36, 61, 63), Homoghi Mircea (6510, 19, 22, 23, 61, 63, 86), Kértesz Andrei (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 24, 26, 59, 605, 15), Lesiacu Dan (6507, 16, 19, 22, 25, 27, 32, 61, 71, 83, 601, 09, 15, 28), Mitran Nicolae (6503, 07, 10, 19, 22, 25, 27, 32, 53, 61, 63, 601), Mazon Victoria (E : 2219 ; 6510, 26, 32, 54, 609, 15), Petrescu N. Daniel (6503, 07, 16, 19, 22, 26, 61, 63, 601, 09, 15), Rusnac Adriana (6507, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 32, 61, 63, 86), Surdu Cornel (6510, 19, 20, 25, 34, 54, 61, 63, 71, 615). Cl. X. Buzoianu Rodica (6507, 10, 16, 19, 22, 25—27, 36, 61, 63, 609, 15), Cuşmur Dana (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26), Dulgheru Ştefan (6507, 10, 12, 15, 16, 22, 25, 27, 615), Moldovan Gheorghe (6446, 59, 61, 510, 12, 16, 26, 36, 86, 601, 05, 06, 09), Nemeş Sorin (6507, 10, 22, 26, 36, 54, 61, 63, 64, 67, 71, 615), Petrescu Anton (6507, 12, 15, 16, 19, 20, 60, 61, 83, 609), Rădoi Oliviu (6504, 10, 15, 16, 22, 23, 34, 55, 61, 85, 86, 601, 09), Roman Emil (6507, 10, 12, 16, 19, 25, 60, 61, 609, 15), Stoia Maria (6507, 10, 12, 25, 27, 61, 63, 70, 86, 605, 15), Todor Elvira (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 81, 85, 97, 605, 15), Vasile Alexandra (6507, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 27, 29, 615, 84). Cl. XI. Căliman Ionel (6546, 54, 55, 65, 80, 81, 82, 86, 87, 97, 611, 15), Pompilian Anca (6510, 19, 22, 32, 54, 61—63, 83, 509, 15).

S.m. 2 cl. IX. Fulea Mihai (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 25—27, 31, 34, 36, 39, 44, 46, 53, 58, 59, 61—63, 67, 71, 80, 83—86, 96, 601, 09, 15). Hostor Livia (6503, 10, 16, 25, 83, 85, 601, 09, 15). Cl. X. Bulca Alexandru (6507, 26, 28, 54, 58, 63, 67, 83, 84, 86, 615, 49, 66), Gavriş Maria (6510, 36, 53, 54, 58, 59, 61, 63, 67, 80, 83, 84), Trif Nicolae (6448, 49, 65, 79, 80, 804, 05, 07, 23, 25—27, 29, 32, 34, 36, 37, 39, 40, 43—46, 53, 59—63, 67, 71, 80, 83—86, 88, 99, 601, 05, 15). Cl. XI. Cristea Nicolae (6504, 07, 10, 12, 15, 17, 18, 19, 22, 23, 26, 36), Durac Adrian (6504, 07, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 26, 36), Homner Emil (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 36, 45, 61), Monţia Ioan (6503, 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26), Stoica Virgil (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 30, 58, 61, 63).

S.m. 3 cl. IX. Chitic Elena (6459, 510, 16, 19, 25, 26, 63, 66, 86, 601, 09, 15). Cl. X. Modron Liviu (6504, 07, 12, 15, 16, 18, 23, 25, 27, 30, 31. 46), Zăgan I. Dumitru (6551, 54, 55, 58, 59, 66, 67, 73, 82, 83, 85, 86, 601, 05—07, 09, 15—17, 26, 31, 32, 34, 36, 41—44, 48, 53, 55—57, 60, 63, 65). Cl. XI. *Bucur Liliana* (6505, 06, 08, 09, 11, 14, 20, 21, 24, 28—30, 34, 35, 37, 38, 42—45, 47, 50—52, 54, 55, 57—60, 62, 6 4, 66, 68—74, 76, 77, 80—91, 92, 95, 97, 99, 601, 05, 09—19, 21, 25), *Geleriu Dan* (6551, 53, 54, 57—59, 63, 64, 70, 77, 79, 80, 82—88, 97, 99, 601, 03, 05—07, 09, 11, 14—24), Hudiţan Adriana (6504, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 25, 49, 85, 87), Lăutărescu D. (6507, 12, 18, 19, 26, 39, 74, 82, 87, 605, 09), Moga Lucian (6504, 07, 10, 12, 19, 22, 26, 34, 61, 67, 74, 87, 605, 09, 15), Marcu Grigore (6503, 06, 07, 09—13, 16—19) 22—34, 36, 38, 49, 53— 56, 66, 67, 72, 79), *Marinuş Radu* (6503, 04, 07, 08, 10, 12, 13, 15—19, 22, 23, 25—27, 29, 32, 34, 36, 38, 39, 45, 46, 49, 53, 59, 61—63, 65—67, 70, 72, 74, 79), Năstoiu Aneta (6453, 58, 60, 65, 74, 75, 92, 96—99, 536), Popescu Adriana (6505, 13 , 17, 34,4, 54, 61, 63, 67, 69, 80, 83, 86, 87, 97, 601, 05, 09, 15), Potra Gabriela (6515, 57, 58, 61, 63, 68, 72, 74, 601, 05, 07, 09). *Dăncilă Ioan* (6446, 47, 53, 60, 66, 73—75, 77, 82, 84, 89, 91, 93, 96, 500, 15, 16, 18, 21, P). 01, 05—09, 11, 17, 18, 20, 24, 29, 49, 53——59, 61, 63, 66, 67, 71, 72, 79, 80, 82, 99, 601, 05—07, 09,

SIGHET. Cl. VI. Meteşan Gheorghe (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 10, 15—17). Cl. XI. Richard Maria (6503, 04, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 46, 51 605).

SIGHIŞOARA. Cl. VII. Moraru V. Cristian (E : 2185, 91, 93, 95—99). Cl. X. Duca Bodgan (6510, 22, 58, 61, 63, 80, 83, 84, 86, 87, 98, 99, 601, 05, 15, 22, 29, 35). Cl. XI. Cozac Andrei (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26, 54, 61—63, 615), Florea Gheorghe (6503—08, 10—12, 14—27, 30—32, 34, 36, 38, 39, 44, 45, 49, 51, 54, 55, 57, 58, 61, 62, 66, 67, 69, 71, 72, 79—88, 93, 95—97, 99, 601, 04, 06, 07, 09, 11, 14, 15, 17—19, 22, 23), Kopan Sandor (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 32, 36, 39), Măruşcă Constantin (6505, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 36, 44, 54, 55), Schuler Paul. (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15—17, 19, 22, 23, 26, 32, 36, 39, 43, 45, 46, 53—55, 57, 58, 60—65, 67, 69, 72, 74, 78, 79), Tibrea Adrian (6503—05, 07, 10, 12, 15—19, 22, 27, 31, 36, 39, 49, 51, 54, 55, 62, 71, 80, 82, 88, 99, 615, 22).

SIMERIA. Cl. VI. Vernischescu Monica (E : 2197, 99, 201, 10, 15, 16, 18, 20, 26, 32). Cl. XI. Neagu Rodica (6504, 10, 12, 15, 22, 45, 49, 74, 82, 84—88, 99, 609, 15), Petrescu Titi (6504, 10, 12, 16, 19, 22, 61, 63, 82, 83, 97, 615).

SINMARTIN (Crişana). Cl. X. Lcza Miron (6503, 04, 07, 15—19, 22, 23, 25—29, 31, 36, 38, 43). Cl. XI. Leuca Moise (6503, 04, 07, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39, 45).

SIPET (Banat). Cl. VI. Florescu Petru (E : 2198, 206, 09, 15, 17, 18, 21, 27, 32).

SIRETEL (Iaşi). Cl. X. Nichita Vasile (6516, 18, 19, 54, 63, 99, 601, 09, 15).

SIRIU (Ploieşti). Cl. VIII. Prundel Gheorghe (E : 2210, 11, 13, 15, 18, 20, 31, 32).

SLĂNIC. Cl. VII. Popescu V. Maria (E : 2198, 201, 06, 15, 16, 18, 20, 26, 40, 43). Cl. X. Bărbieru Gheorghe (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 36, 45).

SLATINA. Cl. VII. Hogea Violeta (E : 2211, 13—18, 22, 23, 32). Cl. IX. Ştefănescu Ştefan (6516, 22, 29, 32, 53, 54, 60—63, 69, 71, 83—85, 88, 96, 99, 609). Verescu Sergiu (6503, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 29, 34, 36, 53, 54, 61, 63, 67, 69, 83, 85, 86, 97, 99, 601, 07, 09, 15). Cl. X. Buicescu Radu (6561, 63, 80, 82, 84—87, 97, 601, 05, 15), Efodie Mircea (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 36, 45, 83, 85, 601), Seulescu C. (6510, 16, 19, 26, 27, 34, 36, 61, 83, 609, 15)

STOENEŞTI (Bucureşti). Cl. VII. Năchilă Petre (E : 2210, 11, 15—17, 20, 27, 32, 40, 43).

SUCEAVA. Cl. X. Acasina Leonora (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 34, 36, 601, 15). Cl. XI. Moldovan Mariana (6504, 05, 10, 12, 13, 15—17, 19, 22, 23, 45).

SARDAR (Focşani). Cl. VII. Manole Petre (E : 2211, 13, 15—17, 20, 27, 31, 33, 36, 40, 43).

SIMLEUL SILVANIEI (Crişana). Cl. XI. Bozga Petru (6504, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 26, 27).

SOMCUŢA MARE. David Vasile (6580, 82—86, 88, 601, 05, 09, 15, 18).

STEFĂNEŞTI (Bucureşti). Cl. VII. Căpăţînă Gh. Nicolae (E : 2197, 98, 201, 06, 10, 11, 13, 16, 17), Gheorghe P. (E : 2197, 204, 06, 08, 09, 6526), Haret Viorel Nicolae (E : 2197, 98, 200—02, 06, 10, 15, 17, 18). Cl. VIII. Burlan C. Gheorghe (E : 2202, 03, 06, 10, 11, 15—18), Răducu Aurel (E : 2197—99, 201—03, 06, 08, 15). Cl. X. Axinte Ioan 6507, 10, 16, 19, 25—27, 36, 61, 83, 85, 96, 601, 09, 15), Balotă D. Mihai (6503, 05, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 34, 36, 39 44, 46, 53, 59—61, 63, 64, 67, 80, 83, 85, 86, 96, 99, 601, 09, 15, 18, 20), Haret Ion Bogdan (6504, 10, 12, 15, 16, 22, 26, 39, 82, 88, 601, 05, 09, 15).

TANSA (Iaşi). Şc. elem. cl. VIII. Bratu N. Gheorghe (E : 169—71, 73, 79, 82, 95, 92, 94, 210, 12, 15—18), Ciobanu Andrei (E : 2171, 73—79, 82, 86, 92, 96, 210, 12, 15, 16, 18), Dascălu Aurel (E : 2169—71, 73, 79, 82, 94, 210, 11, 15, 17, 18), Grigoraş G. Mihai (E : 2171, 73, 79, 85, 94, 210, 11, 13, 16, 17), Mantale P. Natalia (E : 2170, 73, 79, 82, 85, 210, 11, 13, 15—17), Pintea Elena (E : 2173, 79, 82, 211, 15, 16, 19), Preju Emilia (E : 2210, 11, 13, 15—18), Radu Aurel (E : 2169—71, 73, 79, 82, 85, 92, 210, 15—18), Radu Paraschiva (E : 2171, 73, 79, 82, 85, 94, 211, 13, 15, 17, 18), Spiridon G. Elena (E : 2169, 71, 73, 82, 92, 210, 13, 15, 17), Spiridon Vasile (E : 2171, 73, 79, 82, 86, 92, 210, 13, 15, 16, 18), Vîrlan Lucica (E : 2170, 73, 79, 82, 85, 94, 210, 11, 13, 15. 16) (La problema E : 2212, toţi elevii au dat soluţii identice şi greşite.)

TĂUT (Crişana). Şc. 8 ani cl. VI. Cornea Marioara (E : 2211, 13, 16, 17, 20, 24, 25, 27, 32). Cl. VII. Cornea Octavian (E : 2211, 13, 16, 17, 20, 24, 25, 27, 32), Mateuţ Cornel (E : 2210, 11, 13, 16, 20, 24—26, 32), Sudrigan Maria (E : 2210, 11, 13, 16, 17, 20, 24——27, 32). Cl. VIII. Cios Eva (E : 2211, 13, 16, 17, 24—27, 32), Sucigan Eva (E : 2210, 11, 15—17, 24—27, 32), Todinca G. Teodor (E : 2211, 13, 17, 21, 27, 32). (La problema E : 2212 toţi elevii au dat soluţii identice şi greşite.)

TECUCI. S.m. cl. VIII. Păunescu M. Liviu (E : 2201, 02, 06, 16—20, 23, 47). Cl. X. Baniţă Mihai (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 61, 63, 83, 85, 601, 15, 46), Kontici Adrian (6510, 19, 26, 61, 63, 86, 601, 15, 26, 46), Oproiu Aneta (6510, 12, 15, 19, 22, 23, 25, 54, 83, 85, 615), Pădure C. (6517, 10, 16, 19, 26, 61, 63, 83, 85, 86, 601, 15, 16). Cl. XI. Alter Surica (6515, 17, 18, 22, 26, 54, 61, 63, 67, 74, 605, 15, 24, 25, 39), Ceate Constantin (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 27, 76), Fulger Mihail (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 27, 36, 43).

TIMIŞOARA. Şc. 8 ani nr. 8 cl. VII. Halalai Lucreţia (E : 2210, 11, 15, 17, 20, 22, 31, 32). Şc. 8 ani nr. 10 cl. VIII. Iancu Maria (E : 2191, 200, 02, 03, 06, 10, 13, 16, 17, 20, 32).

S.m.l. cl. VIII. Maghiaru Florica (E : 2202, 10, 13, 17, 20, 22, 23, 25, 26, 32), Teleagă Maria (E : 2200, 03, 04, 20, 22, 25, 26, 31, 32). Cl. X. Căpăţînă Felicia (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 25, 80, 83, 85, 609, 15), Teleagă Petru (6459, 61, 67, 76, 82, 510, 14, 22, 26, 36, 45, 59, 61, 63, 67, 72, 80, 86, 601, 05, 15, 16, 18).

S.m. 2 cl. XI. Iritz Nicolae (6504, 10, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 38, 45, 46), Petri Norbert (6504, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 39, 46), Sehr Richard (6507, 17, 23, 26, 51, 54, 58, 61, 63, 65, 72, 82, 83, 84, 86, 87, 601, 09, 15). S.m. 3 cl. VIII. Constantin Brînduşa (E : 2211, 13, 15—18, 27, 32), Messinger Maria (E : 2210, 13, 165, 16, 18, 20, 22, 32). Cl. XI. Lăzărescu Stela (6510, 12, 15, 18, 19, 23, 32, 38, 39, 54, 57, 59, 61, 63). S.m. 7 cl. VIII. Streza Romaniţa (E : 2210, 13, 15, 16, 18—20, 22, 32). S.m. cl. XI. Roman Ola (6582, 83, 87, 97, 601, 03, 15, 19, 41, 59). S..m. 10 cl. IX. Topan Corina (6516, 19, 25, 30, 54, 59, 61, 63, 67, 86, 601, 13).

TÎRGOVIŞTE. S.m.1. cl. IX. Bobei George (6510, 15, 16, 19, 22, 25, 27, 63, 99, 601, 09, 15), Frăţiloiu Nicolae (6507, 10, 15,

22, 3, 25, 27, 34, 53, 54, 83, 88, 98, 609, 15), Martac Georgeta (6507, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 54, 60, 63). Cl. XI. Atanasiu (6503, 18, 37, 38, 39, 54, 55, 58, 59, 62, 65).

S.m. 2 cl. X. *Enache Gheorghe* (6353, 54, 59, 59, 61—63, 67, 71—73, 79, 80, 82—86, 88, 97, 601, 05—07, 09, 10, 15, 17, 18, 22, 29, 36i 39, 41, 42, 44, 46, 48, 57, 61).

S.m. 3 cl. IX. Niculescu Ştefan (6503, 10, 16, 19, 22,-23, 25—27, 61, z63, 601, 15, 16). Cl. X. *Stanciu Virgil* (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 29, 31., 34,3g, 39, 44, 46, 55, 61, 63, 71, 79, 80, 82—88, 97, 99, 601, 03, 06, 09, 14, 15, 17, 19), Ştefănescu Călin (6503, 07, 29, 31, 34, 53, 54, 60, 62, 71, 609, 15, 49). Şc. prof. metal. an I. Bratu Gheorghe (6510, 26, 601, 09; E: 2202, 10, 15, 17, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 31, 32).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI (Oltenia). S.m. cl. XI. Chitu Dumitru (6504, 10, 12, 15, 36, 45, 46, 80, 82, 83, 605, 07, 23).

TÎRGU JIU. Şc. 8 ani cl. VII. Udrică Mioara (E: 2217, 20, 27, 32, 33, 40, 42, 43). *S.m.l.* cl. IX. Bardan I. Viorel (6503, 05, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 29, 83, 601, 03, 41), Ciocîrlie Valeria (6503, 07, 10, 16, 19, 25—27, 34, 36, 39, 53, 54, 60, 83, 601, 09, 15). Cl. X. Boros Ion (6525, 27, 29, 44, 46, 71, 83, 86, 97, 609, 15), Buşe Florin (6503, 07, 12, 16, 27, 30, 53, 61, 83, 601, 09, 15), Curcanu George (6503, 17, 20, 24, 29, 53, 54, 59, 64, 66, 80, 82—88, 601, 06, 08, 09, 15—19), Stroie Dumitru (6510, 12, 16, 19, 22, 23, 26, 61, 83, 609, 15). Cl. XI. Bîrsan Dorel (6539, 45, 80, 82, 83, 85—87, 97, 99, 601, 05, 09, 11, 15).

TÎRGU LĂPUŞ. S.m. cl. X. Kerekeş Iosif (6507, 03, 16, 22, 27, 36, 61, 83, 601, 09, 15).

TÎRGU MUREŞ. S.m.1 cl. VIII. Simovici Igor (E: 2197—202, 06, 10, 11), Vamoş Vasile (E: 2233, 35, 35, 38, 39, 42, 46, 47). Cl. IX. Palade Elena (6525, 29, 32, 34, 54, 61, 63, 79, 86, 601). Cl. X. Doboş Alexandru (6504, 07, 15, 16, 22, 23, 27, 36, 39, 54, 60, 63, 80, 83, 607, 15). *S.m. 4* cl. X. Laslo Georgeta (6504, 07, 10, 15, 22, 25, 27, 16, 19, 25—27, 44, 83, 601, 09, 15). Cl. XI. Ferenczi Coloman (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25—29, 36, 46, 53, 54), Simovici Melita (6503, 04, 07, 08, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 35—38, 45, 46, 51, 54, 55, 57, 61, 63, 82, 83, 85—87, 97, 601, 09, 15), Stratan Valeriu (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 25——29, 36, 39, 43, 45, 46, 51, 53, 5, 63, 71).

TÎRGU NEAMŢ. Şc. 8 ani cl. VII. Axinte Marta (E: 2220, 22—25, 27, 31, 32). S.m. cl. VII. Sateş Luiza (E: 2198, 99, 201, 02, 06, 10, 13, o5, 16—18).

TÎRGU OCNA. S.m. cl. IX. Motreanu Dumitru (6510, 25—27, 60, 63, 71, 601, 09, 15).

TITU (Bucureşti). S.m. cl. X. Bărbulescu Alexandru (6554, 59—62, 67, 69, 73, 96, 601, 09).

TORMAC. Şc. 8 ani cl. VI. Duică Alexandru (E: 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 20, 32). Cl. VII. Nagy Iuliana (E: 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 20, 32), Szöcke Sigismund (E: 2185, 92—94, 206, 10, 15—18), Szücs Iuliana (E: 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 20, 32).

TRUSEŞTI (Suceava). S.m. cl. IX. Aluculesei Dumitru (6459, 6o, 503, 07, 10, 22, 25—27, 54, 63), Livădaru Emil (6503, 07, 10, 16, 19, 25—27, 54, 86, g01, 09, 15). Cl. X. Schiop Constantin (6504, 12, 15, 31, 33, 36, 46, 83, 85, 615). Cl. XI. Achiţei Ioan (6503, 07, 19, 25—27, 34, 45, 46, 49, 54, 55, 57—59, 61, 63, 67, 79, 80, 82, 83, 85, 87, 97, 601, 05, 07, 68, 15, 16, 18), Damian Ilie (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 36, 39, 57, 58, 61, 63, 67, 79, 80, 82, 83, 87, 95, 601, 05, 09), Rotaru Adrian (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 36, 39, 54, 57, 58, 61, 63, 67, 79, 80, 82, 83, 87, 95, 601, 05, 09, 10, 15, 16, 18).

TULCEA S.m.1 cl. VI. Conţescu Vlad (E: 2199, 202, 10, 16, 17, 20, 26, 32), Stoina Maria (E: 2199—201, 06, 10, 15, 16, 18, 20, 23—27, 32). Cl. VII. Ilie Adrian (E: 2217, 18, 20, 23, 25, 40, 42, 43, 46, 47). Cl. VIII. Filipov Victor (E: 2210, 11, 13, 15, 18, 20, 33, 40, 43, 47). Cl. X. Policet Simion (6425, 27, 36, 53, 54, 61, 63, 71, 99, 615, 29, 41).

TURDA. Şc. 8 ani nr. 6 cl. V. Bonţeanu Marius (E: 2215, 16, o9, 25, 26, 27, 29, 32). Cl. VII. Adam Laurenţiu (E: 2210, 11, 15, 17, 18, 20, 22, 29, 32; 6601). Cl. IX. Bălaj Lia (6503, 07, 16, 19, 25—27, 51, 61, 63), Serban Viorel (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—29, 32, 34, 36, 39, 53, 54, 58—61, 63, 67, 71, 72, 79, 80, 83, 86, 96; 6601, 05, 09, 15, 16, 18, 22. Cl. X. Bogdan Mircea (6505, 12, 16, 32, 54, 58, 61—63, 67, 86, 601, 09, 15), Ciortea Otilia (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 23, 25, 26, 36, 61, 63), Ciugulea Nicolae (6504, 07, 15, 23, 25, 32, 54, 58, 62, 67, 601, 09, 15), Chişu Ioan (6507, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 54, 58, 61——63, 67, 83, 609, 15), Dobre Iosefina (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 57, 61, 63), Inocan Rodica (6503, 10, o2, 15, 16, 19, 23, 26, 32, 36, 43, 45), Răduţ Aurel (6503, 07, 12, 25, 32, 54, 58, 61, 63, 67, 601, 15), Russu Epaminonda (6507, 15, 54, 58, 60—63, 67, 86), Turcu Dumitru (6516, 19, 22, 23, 25—28, 36, 43, 54, 60—63), Şerban Petru (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—32, 34, 36—39, 44—46, 53—61, 63, 65, 68, 71, 72, 74, 79).

ŢĂNDĂREI (Bucureşti). Mihalache Reia (6505—7, 10, 11, 13—16, 20, 21, 23, 24, 50, 51, 54, 80—82).

ŢĂNDĂREI GARĂ (Feteşti). Cl. VII. Chiron Ion (E : 2201, 06, 11, 14—18k 20).

URLAŢI. Cl. IX. Zotta Dan (E : 2203, 07, 09, 28, 36, 37, 41, 45, 515, 25—27, 61, 63, 609, 46). Cl. XI. Popescu Sorin (6504, 10, 15, 16, 22, 36, 39, 45, 51, 57, 82, 84—87, 605, 16, 22).

VATRA DORNEI. S.m. cl. X. Fodorea Mihail (6561, 63, 67, 82, 83, 85—87, 602, 15, 44, 48).

VALENI (Vaslui). Cl. VI. Zălimescu V. Constantin (E : 2210, o1, 13, 15—17, 19, 20, 24, 31, 32).

VÎCOCUL DE SUS (Suceava). Cl. IX Gheorghiţă Elena (E : 2203, 07, 09, 12, 19, 28, 31, 525—27, 31, 36, 54, 99, 609, 15).

VEDEA (Argeş). Anca Alexandru (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 27, 83, 85, 87, 601).

VÎRTOAPELE DE SUS (Bucureşti). Cl. VII. Nedelea M. Stancu (E : 2201, 02, 06, 18, 32—36, 43, 46, 47).

VIŞEUL DE SUS. Şc. 8 ani nri 1 cl. V. Andreica Ileana (E : 2191, 92, 206, 15, 17, 18, 24, 32), Ilniţchi Aurora (E : 2192, 206, 15, 17, 18, 24, 32), Griga Maria (E : 2191, 92, 206, 15—18, 24, 32), Gavriloiu Ana Maria (E : 2191, 92, 206, 15—18, 24, 32). Cl. VI. Andreica Elvira (E : 2191, 9 , 206, 15—18, 24, 32), Ulici Mariana (E : 2191, 9 , 206, 15, 17, 18, 24, 32), Zaveţchi Maria (E : 219o, 92, 206, 15, 17, 18, 24, 32). Cl. X. Juga Ion (6503, 07, 10, 12, 16, 22, 25, 27, 34, 53, 61, 63, 71). Cl. XI. Cioplan Gheorghe (6525—27, 39, 43, 45, 57, 67, 77, 79, 609, 15).

ZĂLĂU. Cl. X. Costea Grigore (6507, 10, 15, 16, 25, 26, 34, 35, 54, 63, 601), Turcaş Teodor (6507, 10, 15, 16, 22, 36, 44, 61, 63, 601, 09, 15).

ZLATNA. Cl. IX. Oprea Nicolae (6507, 10, 16, 19, 25—27, 54, 61, 63).

ZLĂTUNOAIA. Cl. VII. Lău Didina (E : 2197, 218, 19, 32, 36, 40, 43, 45, 526).

EVIDENŢIAŢI

Pînă la 1 martie 1965 s-au mai evidenţiat ca rezolvitori de probleme propuse în ultimele trei numere apărute, următorii :

1. *Lungulescu Eugen Bogdan* (cl. X s.m.l Piteşti), 2. *Ralescu Dan Andrei* (cl. IX ş. m. 12 Bucureşti), 3. *Chifescu Ion* (cl. XI ş. m. 10 Bucureşti), 4. *Cătană Ilie* (cl. XI ş. m. Sinaia), 5. *Voiculescu Dan* (cl. IX ş. m. 1 Bucureşti), 6. *Popa Eugen* (cl. IX ş. m. 3 Iaşi), 7. *Laşiţă Ileana* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 8. *Bădescu Constantin* (cl. XI ş. m. 11 Bucureşti), 9. *Jenea Aurel* (cl. XI ş. m. 1 Caranşebeş), 10. *Dăncilă Ioan* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 11. *Stănescu Dan* (cl. IX ş. m. 1 Ploieşti), 12. *Vasiliu Dan* (cl. X ş. m. 1 Ploieşti), 13. *Lău Gheorghe* (cl. X lic. militar Cîmpulung Moldovenesc), 14. *Popovici Cornel* (cl. XI ş. m. 2 Timişoara), 15. *Bena I. Dorin* (cl. XI ş. m. 1 Caransebeş), 16. *Călugăreanu Grigore* (student Cluj), 17. *Geleriu Dan* (cl. XI ş. m. 3 Sibiu), 18. *Poenaru Paraschiva* (cl. VIII Vlahi), 19. *Filipoiu St. Alexandru* (cl. XI ş. m. 1 Buzău), 20. *Aionesei Ivan* (cl. X Truseşti), 21. *Gheorghiu Doina* (cl. X ş. m. 6 Bucureşti), 22. *Filimon Nicolae* (cl. XI lic. militar Breaza), 23. *Bîscă Octavian* (cl. XI ş. m. 1 Craiova), 24. *Popescu Eleodor* (cl. XI ş. m. 1 Turnu Severin), 25. *Popescu A. Ovidiu* (cl. IX lic. militar Cîmpulung Moldovenesc), 26. *Gonciar Ştefan* (cl. XI Feteşti-gară), 27. *Kivu Ileana* (cl. XI ş. m. 12 Bucureşti), 28. *Aron Constantin* (cl. XI ş. m. Pucioasa), 29. *Almer David* (cl. XI ş. m. 17 Bucureşti), 30. *Sabău Ioan* (cl. IX ş. m. 1 Baia Mare), 31. *Ioniţă Georgeta* (cl. IX ş. m. 39 Bucureşti), 32. *Badea Lori* (cl. X complexul şcolar Bîrlad), 33. *Ghiţuleasa Dan* (cl. XI ş. m. 3 Craiova), 34. *Butnaru Dumitru* (cl. XI Truşeşti), 35. *Noje Vasile* (cl. XI ş. m. Vasul Crişului), 36. *Turculeţ Demostene* (cl. XI Truşeşti), 37. *Archip Petre* (cl. XI Truşeşti), 38. *Ştefănescu Mircea* (cl. IX ş. m. 1 Caransebeş), 39. *Răduinea Vasile* (cl. XI ş. m. 3 Constanţa), 40. *Cheriu Mihail* (cl. IX ş. m. 3—Ploieşti), 41. *Frangu Octavian* (cl. XI ş. m. 2 Brăila), 42. *Niculescu Constantin* (cl. XI ş. m. 3 Tîrgovişte), 43. *Diaconescu Nicolae* (cl. XI ş. m. 20 Bucureşti), 44. *Rudenco Corneliu* (cl. X lic. militar Cîmpulung Mold.), 45. *Cosmanciuc Dumitru* (cl. XI ş. m. Truşeşti), 46. *Mîrza Mihai* (cl. XI Truşeşti), 47. *Novac Constantin* (cl. XI Truşeşti), 48. *Listeş Vasile* (absolvent Hunedoara), 49. *Eremia Vasile* (cl. XI ş. m. 3 Constanţa), 50. *Pălteanu Cornel* (cl. XI ş. m. 1 Buzău).

Pînă la 1 martie 1965 s-au primit soluţii bune la probleme ropuse în G.M.B., de la:

ADÎNCA (Ploieşti). Şc. 8 ani cl. VIII. Ene R. wujor (E : 2202, 06, 08, 09 ; 6505, 10, 116, 19, 22, 25—27, 34).

AGNITA. Şc. 8 ani cl. VII. Creangă Mircea (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 10, 17, 18).

ADJUD. Ş. m. cl. VI. Apostol Lucia (E : 2200, 11, 13, 15—17, 24, 27, 32). Donciu Viorica (E : 2211, 13, 15—17, 24, 27, 32). Cl. VII. Iftimie Mircea (E : 2197—99, 202, 06, 10, 11, 15, 16, 20, 25—27, 32). Cl. VIII. Aportu Mariana (E : 2197, 98, 215—17, 26, 27, 30—32 ; 6520, 26). Cl. XI. Cartoafă Marin (6585, 86, 605, 07, 09, 15, 44, 46, 53, 70—76), Cernăuţeanu Mircea (6632, 70—77, 710, 13,

15, 20, 22, 78), Pamfil Ilie (6670—77, 710, 15, 20, 22), Varvara Iordache (6666, 70—78, 80, 81, 710, 15, 20, 22).

AIUD. Şc. 8 ani cl. VI. Pîrlea Florin (E : 2220, 25, 32, 33, 40, 43, 48, 50, 59). Cl. VII. Popa Emil (E : 2223, 24, 27, 32, 33, 35, 40, 43, 47, 48). Cl. XI. Hamorsky Iosif (6630, 66, 67, 70—78, 83, 85), Molnar Iuliana (6582, 84, 97, 605, 30, 33, 34, 41, 57, 66, 70—74, 76, 77, 85, 706).

ALBA IULIA. Ş. m. Cl. C. cl. X. Haţegan Ion (6580, 82—85, 99, 601, 05, 09, 15, 34, 44, 48, 65, 70, 73—77), Patachi Mircea (6582—84, 86, 601, 05, 09, 15, 34, 39, 44, 48, 65, 70, 71, 73—76).

ALBOTEŞTI. Şc. 8 ani cl. VIII. Badea Manuela (E : 2220, 23—26, 29, 31, 32).

ALEŞD (Crişana). Ş. m. cl. IX. Fonai Florian (E : 2260, 63 ; 6670, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 83, 85, 720, 22). Secară Florian (E : 2236, 60, 63 ; 6673, 74, 76, 77, 80, 81, 720, 22).

ALUNIŞ (Argeş). Şc. 8 ani cl. VIII. Ciocîrlan Oct. Const. (E : 2220, 21, 24, 32, 33 40, 48, 49).

ANINA Ş. m. cl. VIII. Roşianu Maria (E : 2248, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 63). Cl. XI. Petric Mircea (6580—88, 601, 05, 09, 15, 31, 34, 36, 37, 48, 53, 57).

ARAD. Şc. 8 ani nr. 14 cl. VI Micşa Lavinia (E : 2198, 213, 16, 17, 20, 24, 27, 32), Stoicescu Grigore (E : 2211, 13, 20, 25, 33, 40, 42, 43). Ş. m. 1 Ion Slavici cl. IX. Lucuţa Petru (6504, 05, 07, 12, 16, 19, 22, 25, 27, 44, 53, 59—61, 63, 67, 71), Volinter Petru (E : 2228, 31 ; 6553, 54, 59—61, 71, 96, 601, 09, 15). Cl. VIII serală. Suciu Florian (E : 2233, 35—39, 42, 43). Ş. m. 2 cl. V. Greuceanu Radu (E : 2201, 06, 11, 16, 20, 24, 27, 32), Podea Delia (E : 2225, 33, 38, 42, 45—47 ; 6599), Zabb Mia (E : 2232, 33, 42, 45—48 ; 6599. Cl. VIII. Boscoiu Voicu (E : 2220, 23—27, 31—33, 42, 43 ; 6615). Cl. IX. Cerchizan Doina (E : 2231 ; 6510, 19, 22, 25, 27, 53, 54, 61, 63, 71, 615).

Ş. m. 5 cl. X. Budean Teodor (6505, 10, 22, 25—27, 34, 36, 44, 58, 61, 67, 83, 84, 86, 97, 99, 601, 09, 15, 39, 41, 53 ; E : 2207, 09, 1 2, 19, 28, 29, 30, 36, 37, 45).

AVRIG. Ş. m. Gheorghe Lazăr cl. X. Ionescu Maria (6510, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 53, 54, 61, 62, 71), Popica Elena (6504, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 36, 54, 61, 63, 615). Cl. XI. Tancu Ana (6503, 04, 10, 15, 16,

BACĂU. Ş. m. 1 cl. VII. Cartaş Radu (E : 2215, 18, 22, 27, 31, 32, 34, 40, 43, 47). Cl. VIII. Knoll Raul (E : 2198, 200, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 31, 32), Oltean Mirela (E : 2220—22, 26, 27, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 43, 48, 63, 65, 68, 71). Cl. X. Abramovici Rozica (6553, 54, 59, 63, 80, 83, 84, 86, 601, 09, 15, 39, 46, 53, 63). Ciochină Silviu (6553, 54, 56, 67, 71, 82—84, 96, 601, 15, 17, 19, 15, 18). Cl. XI. Eremia I. (6512, 23, 25, 27, 34, 39, 44, 80, 83—85, 87, 601, 15), Kaufmann Eugen (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 36, 39).

Ş. m. 4 cl. IX. Cuparencu Mircea (E : 2228, 31 ; 6553, 54, 59, 60, 63, 69, 601, 19, 15). Cl. XI. Buruiană Marcel (6580, 82, 85, 88, 95, 609, 15, 41, 44, 57, 59, 70, 71, 73—78), Simşensohn Arthur (6549—52, 55, 61, 63, 81—85, 95, 601, 05, 09, 27, 32, 34, 59, 70—77).

BAIA MARE .Ş. m. 1 cl. IX. Avram Mircea (E : 2236, 61, 63 ; 6615, 57, 70, 71, 76, 77, 80—82), Fried Zoltan (E : 2228, 30, 36, 37, 41 ; 6586, 99, 601, 09, 15, 36, 37, 65, 80), Moldovan Liana Mirela (E : 2219, 31, 36 ; 6554, 59, 61, 63, 69, 601, 09, 15, 46), Omeset Elisabeta (E : 2228, 29, 36, 45 ; 6554, 61, 69, 71, 83, 601, 09, 15), *Sabău Ioan* (E : 2229—31, 36, 37, 41, 45, 60, 61, 63, 64, 79, 80 ; 6580, 83, 85, 86, 97, 99, 615, 18, 53, 57, 70, 71, 73, 74, 77, 80—83, 85, 716). Cl. X. Oprea Alexandru (6523, 25—27, 36, 58, 63, 67, 84, 601, 05, 09, 16). Cl. XI. Apostolescu Radu (6503, 04, 10, 12, 13, 15—19, 22, 26, 54), Oprea Dan (6523, 25—27, 38, 51, 54, 58, 61, 63, 67, 74, 82, 84, 601, 05, 09), Sîrbu George (6581, 82, 615, 70, 71, 73—77, 96, 715). Ş. m. 3 cl. VIII. Condor Dana Liana (E : 2210, 11, 13, 15—21, 23—25, 27, 31—33, 36, 40, 43, 45). Cl. IX. Grosfeld Mihai (E : 2226, 29, 31, 36, 37, 45 ; 6618, 36, 39, 46, 53, 57, 63). Cl. X. Radu Mircea (6582, 87, 601, 05, 15, 70—77). Student Luca Gheorghe (6631, 67, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 82, 711, 15, 20, 22).

BALŞ (Oltenia). Ş. m. cl. IX. Alexandru Gh. Ovidiu Mihai (E : 2228, 36, 37, 61, 63 ; 6583, 601, 09, 15, 53, 70, 76, 77, 81), Oniceanu Petre (E : 2228, 36, 37, 61, 63 ; 6601, 09, 15, 53, 70, 73, 74, 76, 77). Cl. XI. Teişanu Gabriel (6666, 60, 62, 75—78, 82, 711, 15, 20, 26).

BĂLTENI (Bucureşti). Ş. m. m. cl. IX. Dincă P. Ion (E : 2228, 29 ; 6553, 54, 71, 99, 601, 09, 15)..

BEIUŞ. Ş. m. 1 cl. IX. Toma Ioan (E : 2231, 36, 37 ; 6554, 61, 63, 71, 83, 84, 601, 09, 15, 36). Cl. X. Gavruţă Teodor (6583—85, 96, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80). Cl. XI. Diaconu Adrian (6505, 06, 11, 14, 20—22, 24, 36, 46, 49, 60, 65—67).

BELINT (Banat). Şc. 8 ani cl. VI. Neghină Dan (E : 2210, 13, 15—18, 20, 21, 32).

BISTRIŢA (Cluj). Şc. 8 ani nr. 2 cl. VII. Fucă Mihai (E : 2220, 23, 24, 26, 42, 43, 48, 50, 58).

Absolvenţi : Rusu Alexandru (6503, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 39, 42, 45, 80—92, 95, 96, 601, 15, 11, 15, 28, 31, 34), Verveagă T. (6534, 36, 44—46, 48, 53, 60, 61, 63, 80, 82—89, 601, 05, 09, 15, 19).

Ş. m. 1 cl. IX. Cotoc Ioan (E : 2226, 36, 37, 45 ; 5507, 09, 10, 16, 19, 22, 25, 29, 54, 61, 63, 84——86, 89, 601, 06, 09, 15, 46), Nour Toma (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34), Papare Valeria (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34), Simonca Aurelia (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23 25, 27, 31, 32, 34), Singeorzan Lucia (6503, 07, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 31, 32, 34) Cl. X. Fucă Sergiu (6580, 83—85, 601, 05, 32, 70—72, 74—76, 80), Lucaci Rodica (6583—85, 87, 97, 670, 71, 73, 75, 76, 80, 81), Lupşa Nicolae (6580, 82—85, 87, 88, 97, 601, 05, 19, 15, 36, 46), Mihăilaş Liana (6632, 44, 48, 70—77, 80, 81), Mocodean Melania (6583, 84, 87, 97, 609, 22, 32, 48 70, 71, 73, 75, 76). Cl. XI. Buta Grigore (6551, 74, 84, 85, 87,97, 601, 05, 09, 20, 32 34, 35, 37, 41, 46, 53, 59, 72—75, 78, 97, 706), Ivănescu Grigoraş (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 46), Popescu Şerban (6580, 82—88, 97, 99, 601, 05, 09), Titieni Remus (6504, 10, 12, 13, 15, 16*l* 18, 19, 22, 26, 27, 45, 46, 51, 54, 61, 63, 65, 72 80—82, 84—87, 97, 601, 09, 15, 30, 37).

Ş. m. 2 cl. VIII. Petri Adriana (E : 2197—203, 06, 15, 16). Cl. XI. Pleşca Constantin (6551, 54, 55, 61, 63, 83—86, 88, 99, 601, 07, 09, 15).

BÎRCA (Oltenia). Ş. m. cl. X. Drăgoi M. Marin (5510, 16, 22, 26—28, 54, 59, 61 63, 71, 601, 09, 15), Mitu Ion (6585, 99, 631, 70, 71, 74—77, 80, 81, 95, 97, 98). Cl. XI. Crînguş Florea (6582, 84—87, 97, 60 , 05, 07, 09, 15, 16, 18, 22, 24, 25, 34, 42, 44, 61 63, 66, 68, 70—77, 80—82, 93), Poenaru O. Nicolae (6504, 16, 19, 54, 66, 82, 83, 85—88, 99, 601, 07, 09, 15).

BÎRLAD. Ş. m. 2 cl. VIII. Duda Doina (E : 2228, 33, 35, 36, 40, 43, 45, 47, 48, 52, 58, 59, 61, 63), Ionescu Grigore Eugen (E : 2228, 33, 36, 37, 40, 42, 43, 63), Radoveanu Radu (E : 2220, 32, 33, 35, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 54, 58, 63). Cl. X. Aghiţei Alexandrina (6507, 10, 16, 19, 22, 26, 34, 36, 61, 63, 99, 609, 15), Postăvaru Elena (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 34, 61, 63, 99, 609, 15). Cl. XI. Creţu Claudius (6504, 07, 10, 12, 13, 15—17, 19, 22, 23, 25—27).

Ş. m. 3 cl. VI. Anghel Georgeta (E : 2210, 15—18, 20, 24—26, 32), Carp Alexandru (E : 2210, 15—17, 20, 24, 27, 32, 40, 43), Vasiliu Gelu (E : 2210, 15—18, 20, 25, 27, 32). Cl. VIII. Crăescu Tigheliu (E : 2197, 99, 200, 13, 15—20), Minciună Alexandra (E : 2220, 24—27, 32—35, 38, 40, 42, 43, 45). Cl. IX. Cînepă Victor (E : 2230, 31, 61, 63 ; 6601, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 85, 716, 22, 35), Cristea I. Victor (E : 2228, 30, 36, 37, 61, 63 ; 6601, 09, 15, 70, 73, 76, 80, 85), Ghiur Gh. (E : 2236, 37, 60—64, 77—80 ; 6648, 49, 53, 70, 73, 74), Ionescu Ioan (E : 2236, 61, 63 ; 6583, 609, 15, 70, 76, 77, 80).

Complexul şcolar cl. IX. Catenca Ioan (E : 2231, 36, 37, 63 ; 6583, 86, 601, 09, 15, 70, 73, 76), Popa Doina (E : 2228, 31, 36, 37, 61, 63 ; 6609, 15, 70, 73, 76, 853), Simion Cornelia Diana (E : 2236, 61, 63 ; 6583, 86, 601, 15, 39, 70, 76, 77, 80). Cl. X. *Badea Lori* (6580, 82—86, 96, 99, 607, 09, 15, 16, 18, 30, 31, 33, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 57, 62, 63, 70—78, 80—85, 90, 93, 98).

BÎRLEŞTI (Iaşi). Ş. m. cl. VIII. Raţă Titi (E : 2220, 33, 35, 36, 38, 43, 48, 50, 57, 63).

BOROAIA (Suceava). Şc. 8 ani nr. 1. Petrescu Viorica (E : 2199, 200, 02, 06, 10, 11, 13, 15—18, 31, 33, 35, 38, 39, 46).

BORŞA (Maramureş). Ş. m. cl. IX. Peici Stelian (E : 2207, 09, 29, ; 6303, 10, 12, 15, 26, 54, 71, 97, 601, 09).

BOTOŞANI. Ş. m. 1 A. T. Laurian cl. VII. Grigoriu Şerban (E : 2197—99, 201, 02, 06, 11, 16—18). Cl. VIII. Andrei Ana (E : 2220, 32, 33, 36, 40, 42, 43, 63), Hirsch Rodica (E : 2220, 30, 32, 33, 36, 40, 42, 43, 63). Cl. IX. Botezatu Doina (E : 2236 ; 6510, 19, 22, 25—27, 63, 96, 601, 15), Herşcovici Amy (E : 2236, 37, 39, ; 6554, 61, 63, 67, 97, 601, 09, 15, 49). Cl. X. Dale Constantin (6554, 61, 63, 67, 79, 97, 601, 05, 09, 15, 44, 49), Grigoriu Livia (6503, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 54, 61, 63). Ş. m. 2 Mihail Eminescu cl. VII. Taşcu Ştefania (E : 2192, 93, 98, 206, 11, 14—16, 18, 20, 27, 32). Şc. de muzică cl. VIII. Wagner Richard (E : 2210 11, 13—20, 22, 23, 26, 29, 32, 33, 35—40, 42—47 ; 6563, 99, 615, 69).

BOZOVICI (Banat). Ş. m. cl. VII. Ignea Ana (E : 220, 32, 33, 35, 38, 40, 45, 48, 50, 55). Cl. XI. Piescu Călina (E : 2220, 27, 32, 33, 38, 40, 43, 45, 59).

BRAD. Şc. de 8 ani cl. VIII. Cordonescu Gabriel (E : 220, 21, 26, 27, 32—36, 38, 40, 42, 43, 47).

Ş. m. cl. X. Drig Simion (6582, 83, 85, 87, 601, 09, 15, 44, 70, 71, 73—77, 82), Fornade Cornel (6554, 60, 61, 63, 67, 82—87, 96, 99, 601, 05, 09, 15, 33, 34, 36, 44, 48).

Braşov. Şc. 8 ani sr. 2 cl. yII. Melenciuc Alexandru (E : 2232, 33, 40, 43, 46, 48, 54, 57, 60, 63).

Şc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Vătui Lucian (E : 2210, 11, 13—18).

Ş. m. 1 cl. X. Caminski Corneliu (6583—85, 601, 05, 09, 39, 63, 70, 73, 74, 76, 77).

Ş. m. 4 cl. VI. Bocanu Mihaela (E : 2210, 15—17, 20, 32, 33, 40, 43), Dițescu Dan (E : 2210, 11, 13, 16, 17, 31—33, 38, 40, 43, 47), Gal Patricia (E : 2220, 26, 32, 40, 42, 43, 48, 50, 58, 59), Galea Maria (E : 2220, 10, 13, 16—18, 20, 31, 32, 47), Pascu Gheorghe (E : 2231—33, 38, 47, 48, 52, 54, 55, 56), Popovici Elena (E : 2210, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 31, 32). Cl. VII. Başag Georgeta (E : 2210, 11, 13, 15, 16, 18, 27, 32, 43),

Başag Livia (E : 2210,11, 13, 16, 18, 27, 32, 40, 43), Cotoma Lidia (E : 3210*l* 11, 17, 18, 29, 26, 32, 23, 40, 43), DeacGeorgeta (E : 2210, 15—18, 23, 33, 40), Diaconu Cătălin (E : 2217—18, 32, 40, 42), Grigoraş Dumitru (E : 2210, 13, 16—18, 32, 33, 40, 42, 43), Mucha Tatian (E : a 2206,10, 15—18, 32, 40), Nicolau Teodor (E : 2210, 13, 16, 17, 32, 33, 42, 43), Olteanu Valentina (p : 2213, 18, 20, 24, 27, 32, 33, 38, 40, 42), Pandea Monica (E : 2211, 17, 18, 20, 26, 32, 33, 40, 43), Popp Eva (E :-2210, 15—18,32 ,33, 40). Cl. IX. Bontaş Vasile (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45 ; 6503, 10, 16, 22, 25—29, 83, 86, 601, 06, 09, 15, 39, 46, 49, 65). Cl. X. Pitiş Gheorghe (6504, 47' 10, 12, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 26, 34, 36, 39, 54).

BRĂILA, Şc. 8 ani nr. 4 cl. VIII. Cărbunaru Mihai (E : 2221, 25, 26, 32, 33, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 45—48, 50—52).

Ş. m. 1 cl IX. Muşat Georgeta (E : 2228, 36, 37, 63 : 6599, 601, 09, 15, 70, 76, 877,81 Cl. X. Băiaşu Mariana (6586, 609, 15, 70., 71, 73, 76, 77, 80, 82, 83, 724). Cl. XI. Leu Gheorghe (6587, 601, 15, 31, 34, 70, 71, 73—76, 605), Loescher Vanda (6586, 88, 605, 09, 30, 32, 34, 44, 48, 59, 70—77), Lovin Gheorghe (6582, 85—87, 99, 601, 05, 09, 15, 32, 34, 70, 71, 73, 75—77), Tudorache Radu (6554, 57, 60, 82, 83, 85, 86, 601, 05, 09, 15, 09, 15, 31, 49, 53).

Ş. m. 2 cl. X. Bădescu Iulia (6503, 07, 10, 19, 25—27, 36, 54, 61, 63). Cl. XI. Barasch Mariana (6549, 51, 54, 56—58, 61 63, 73, 74, 82, 87), *Frangu Octavian* (6556—58, 60—63, 65, 67, 69, 71—74, 80—88, 95, 96, 99, 601, 05, 07, 09, 15, 24, 25, 30, 32, 35, 44, 48, 49), Lazariu Adrian (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 54, 83, 87). Lăzărescu Vasile (6580, 82—84, 87, 97, 601, 05, 07, 1515, 31, 32, 34, 37, 44, 59, 60, 63, 67—78, 80, 85, 92, 96, 793).

Ş. m. 3 cl. IX. Bucur Camelia (E : 2228, 36, 37, 45, 61, 63 ; 6599, 601, 09, 53, 70, 76), Nicolescu Gabriel (E : 2228, 36, 37 ; 63 ; 6585, 86, 96, 601, 09, 15, 76, 85), Pincu Mya (p : 2228, 36, 45, 60, 61m 63 : 6601, 15, 07, 74, 76, 77).

BREAZA, Liceul militar cl. IX. Cartoze Vasile (E : 2207, 09 ; 6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25—29, 31, 32, 34, 36, 44, 46,53, 54, 57—63, 71). Cl. X. Năstac Corneliu 46, 53, 54, 57—63, 71). Cl . X. 16, 44, 45, 71, 83—86, 601, 09, 15). C. XI. Berceanu Constantin (6582, 85, 87, 907, 601, 06, 09. 15, 34, 48, 55, 59, 63, 70—78, 81, 703, 09). *Filimon Nicolae* (6580, 82—85, 87, 88, 96, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 13, 15, 16, 22, 32, 34, 37, 44, 46, 48, 53, 63, 65, 67, 70—7 80—82, 84, 93), Peterescu Stelian (6583, 87, 601, 09, 37, 55, 59, 70, 71, 73—77, 84). Pruiu Petre (6517, 31, 32, 38, 43—45, 51, 54—58, 61, 65, 67, 72, 74, 79, 80, 82—85, 88, 97, 601, 07, 09, 10, 15, 16, 19), Rădzcanu Petre (6580, 82, 83, 85, 88, 97, 601, 09, 15, 70. 71, 73, 74, 76), Voinea Ion (6580, 82, 601, 07, 09, 15, 16, 34, 42, 44, 46, 53, 70—77, 80, 93).

Ş. m. m. Aurel Vlaicu cl. I. IX. Termişteanu Eugen (E : 2236, 61, 63, 77, 80 ; 6657, 70, 73, 74, 76, 77, 82, 720 22).

BUCIUMENI)ecuci). Şc. 8 ani cl. VIII. Paraschiv Victor (E : 2210, 11, 13, 15, 16. 18, 26, 32, 40, 43), Tătaru Mariana (E : 2210, 15, 32, 33, 40, 42, 43, 47).

BUCUREŞTI. *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VI. Tiţeica Ştefana (E : 2210, 15, 16, 18—20, 32). Cl. VIII. Cornea Maria (E : 2198, 200—03, 06, 10,13, 15—18, 20, 26, 27, 32, 33, 38, 40, 43, 46), Ruşinoiu Carmen (E : 2240, 42, 43, 48, 61, 63, 68 ; 6670, 76, 720, 22).

Şc. 8 ani nr. 26 cl. VII. Rovenţa Daniela (E : 2233, 35, 38, 40, 42—44, 46, 47). Cl. VIII. Popescu Eugenia (E : 2210—18).

Şc 8 ani nr. 40 cl. VIII. Nicolae Cristian (E : 2220, 22—24, 26, 28, 32—37). *Şc. 8* ani *nr. 41* cl. VIII. Staticescu Ion (E : 2220, 24, 27, 31—33, 36, 38, 42, 43, 46,—48, 56—58, 61, 63 ; 66 15).
(E : 2211, 13, 14, 19, 22, 24, 31, 33. 44, 45).

Şc. 8 ani nr. 71 cl. VII. Mahalniski Andrei (E : 2201, 02, 04, 06, 10, 13, 15—18). Cl. VIII. Vasiliu iAlexandru (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 26, 27, 32, 33, 36, 42, 47). Weinberg Daniela (E : 2210, 15, 16, 18, 20, 24, 27, 32). *Şc. 8 ani nr. 75* cl. VII. Dumitriu Adrian (E : 2215, 16, 18, 19, 24, 25, 40, 43). *Şc. 8 ani nr. 76* cl. VIII. Tiron Liviu (E : 2210, 11, 13, 15—17, 20—28, 31—33, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 45—47 ; 6554, 61—63, 99, 615).

Şc. 8 ani nr. 96 cl. VII. Spuderca Antoaneta (E : 2220, 23—27, 31, 32, 40, 42, 43). *Şc. 8 ani nr. 116* cl. VIII. Bichir S. Tatiana (E : 2218, 20, 21, 26, 32, 33, 36, 38, 42, 47). *Şc. 8 ani nr. 122* cl. VI. Brătescu Ştefana (E : 2235, 38, 40, 43, 46—48, 50, 52, 53), Florică Giorgian (E : 2230, 38, 40, 42, 43, 46—48, 50, 53), Jipa Felicia (E : 2210, 16, 32, 38, 40, 43, 47, 48, 54, 57), Poru Ecaterina (E : 2220, 24, 25, 32, 35, 38, 43, 48), Petrescu Felicia (E : 2220, 23, 25, 27, 32, 43, 46, 47), Rotschild Mihail (E : 2215, 18, 20, 23, 25, 27, 39, 46, 47), Trufin Angela (E : 2220, 25, 27, 32, 35, 40, 43, 47, 48, 53). C. VII. Balaure Eugenia (E : 2210, 11, 13, 16—18, 20, 25, 35), Florian Andrei (E : 2215—18, 20, 25, 33, 38, 47), Nistor Irina (E : 2210, 11, 13—18, 20, 22, 25, 26, 33—45, 38, 42, 43, 47)., Popescu Baran Mirela (E : 2210, 11, 13, 14, 16—18, 20, 26).

1965 AUG 25.

Şc. 8 ani nr. 128 cl. VII. Alexandrescu M. (E : 2215—18, 20, 22, 27, 32), Bivolaru Carmen (E : 2211, 16—18, 20, 22, 27, 32), Ciontea M. E : 2213, 16—18, 20, 22, 27. 32), Gruia Vladimir (E: 2211, 13—17, 20, 27, 32), Ştefănescu Gilda (E : 2211, 16—18 20, 22. 27 32). Cl. VIII. Oprescu Rodica (E : 2210, 11, 13—18, 20—22, 25—28, 31, 32) Şerban Corina (E : 2210, 11, 13—19). *Şc. 8 ani nr. 142* cl. VII. Dobre Silvia (E : 2215—18, 20, 31, 40, 42, 43), Lungu Nicu (E : 2215—18, 20, 31, 40, 43). *Şc. 8 ani nr. 146* cl. VII. Bădescu S. (E : 2233, 24, 38—40, 42—44, 46, 47; 6596). *Şc. 8 ani nr. 154* cl. VI. Alexandru Radu (E : 2220, 42, 33, 38, 40, 43, 48—50). *Şc. 8 ani nr. 166* cl. VI. Cernescu Gabriela Mariana (E : 2220, 23—26, 31— 38, 33, 40, 42, 53, 43, 46, 47). *Şc. 8 ani nr. 169* cl. VII. Vijelie Luminiţa (E : 2220—25, 27, 32). Cl. VIII, Ştefan Andrei (E : 2197—203, 0,6, 07).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 35—40 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate şi citeţ semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunţaţi în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puţin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat şi să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată. Preţul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicaţie şi altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.

I P. „Informaţia" — c. 1683

INDEX 41601

. Lei 2

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) — iulie 1965

7

ORSZÁGOS MŰSZAKI ... DOKUMENTÁCIÓS ... 1883

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI (II), nr. 7 — iulie 1965

SUMARUL

	Pag.
1. Transformări geometrice de D. Rimer	289
2. Legi de compoziţie de Traian Cohal	296
3. Dispozitive pentru desenarea unor figuri de Dan Brînzei	302
4. Note matematice de Eugen Popa şi Valeria Nicola	304
5. Probleme rezolvate (6441, 6498, 6558, 6579, 6615, 6661, E: 2222, 2241)	306
6. Chestiuni de examen (6987—7017)	312
7. Probleme propuse (7018—7047)	317
8. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E:2336—2353)	322
9. Rezultatul Olimpiadei de matematică 1965	325
10. Cărţi noi	326
11. Rubrica rezolvitorilor de probleme	326

ANUL XVI, 7 IULIE

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Iaşi a Societăţii de ştiinţe matematice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent; *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

OMSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 7 iulie 1965

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

DAVID RIMMER, lector Iași

1. În articolul „Despre unele transformări geometrice" de prof. univ. C. Ionescu-Bujor [1]) au fost prezentate : simetria axială, translația, rotația, simetria centrală și produsele lor — deplasările. Cu ajutorul lor s-au demonstrat și cîteva proprietăți ale figurilor geometrice. De remarcat că prin aceste transformări se schimbă doar poziția figurii dar se păstrează întocmai lungimile și unghiurile, adică elementele prin care se determină măsura figurii. Din această cauză aceste transformări se numesc într-un cuvînt, *transformări metrice* (metron în limba greacă înseamnă *măsură*), iar proprietățile unei figuri care nu se schimbă (rămîn *invariante*) la transformările metrice se numesc *proprietăți metrice*. Toate proprietățile cuprinse în manualele școlare de geometrie, în care intră ca element esențial egalitatea segmentelor, sînt proprietăți metrice, iar studiul acestor egalități se numește *geometrie metrică* (exemple : proprietățile triunghiului isoscel, cazurile de egalitate a triunghiurilor, corespondența între unghiurile și laturile unui triunghi, corespondența între arce și coarde, perpendiculare și oblice duse dintr-un punct pe o dreaptă).

Există însă și alte transformări importante, în care distanța dintre două puncte nu se conservă ci se modifică într-un anumit mod. Ne vom ocupa de unele transformări de acest gen : omotetia, asemănarea, transformarea perspectiv-afină și transformarea afină.

2. *Omotetia.* Fie un punct fix O în plan și un număr real $(k \neq 0)$ Putem stabili o corespondență între punctele planului astfel ca fiecărui punct M să-i corespundă un punct M', pentru care $\overline{OM'} = k.\overline{OM}$.[2]) Punctul M' astfel obținut se numește *omoteticul* punctului M în raport cu centrul de omotetie O și cu coeficientul k. Se mai spune că M' este transformatul punctului M prin omotetia de centru P și de coeficient k. Se

---

[1]) Gazeta matematică, seria B nr. 5/1965.

[2]) Produsul unui vector $\overline{OM}$ cu un număr real k $(\neq 0)$ este un vector $\overline{OM'}$ care are : a) aceiași direcție cu $\overline{OM}$; b) același sens sau sens contrar cu $\overline{OM}$, după cum $k > 0$ sau $k < 0$; c) mărimea egală cu mărimea lui $\overline{OM}$ înmulțită cu numărul $|k|$, valoarea absolută a numărului k.

folosește notația $O_k(M) \equiv M'$. În fig. 1 avem : $O_3(M) \equiv M'$ și $O_{-5/2}(N) \equiv N'$. Se înțelege că pentru $k \equiv 1$; $O_1(M) \equiv M$; transformatul punctului M este deci el însuși adică avem transformarea identică. De asemenea, pentru $k = -1$ avem simetrie centrală $O_{-1}(M) \equiv M'$ (fig. 2). Se mai

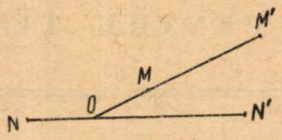


Fig. 1

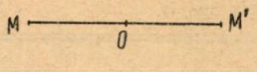


Fig. 2

observă imediat că, dacă $O_k(M) \equiv M'$ urmează $O_{-1/k}(M') = M$; astfel, în fig. 1, $O_{1/3}(M') \equiv M$ și $O_{-2/5}(N') = N$.

De la puncte omotetice să trecem la figuri omotetice. Dacă punctele unei figuri F' sînt omoteticele punctelor unei alte figuri F, în raport cu același centru și cu același coeficient, cele două figuri se zic *omotetice*.

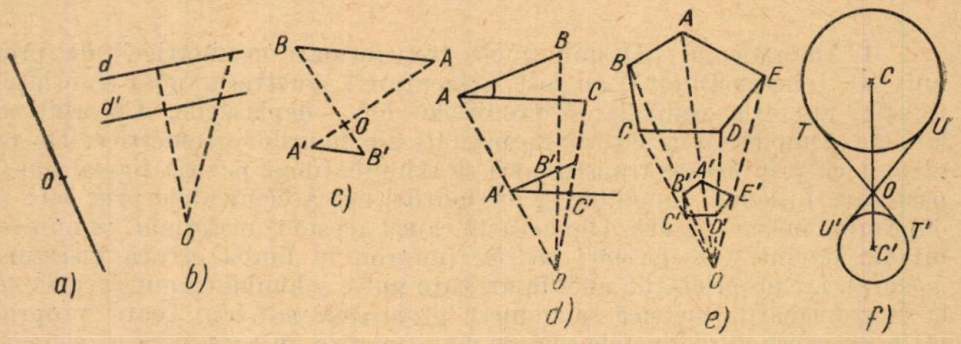


Fig. 3

Lăsăm în seama cititorului demonstrațiile următoarelor teoreme :

a) Omotetica unei drepte ce trece prin centrul de omotetie este însăși acea dreaptă (fig. 3 a),

b) Omotetica unei drepte care nu trece prin centrul de omotetie este o dreaptă paralelă cu ea (fig. 3 b),

c) Omoteticul unui segment este un segment paralel cu el, raportul lungimilor segmentelor fiind egal cu $|k|$ (fig. 3 c),

d) Omoteticul unui unghi este un unghi egal cu el, laturile celor două unghiuri fiind paralele (fig. 3d),

e) Omoteticul unui poligon este un poligon care are unghiurile respectiv egale cu ale poligonului dat, laturile respectiv paralele, raportul a două laturi corespondente fiind egal cu $|k|$ (fig. 3 e),

f) Omoteticul unui cerc este un cerc ; linia centrelor și tangentele comune trec prin centrul de omotetie (fig. 3 f) *).

---

*) Indicație. Pentru teoremele a) și b) se va folosi doar definiția ; pentru c) se va recurge și la teorema lui Thales ; teoremele d), e) f) rezultă imediat prin primele trei.

De aici rezultă imediat şi alte proprietăţi ale omotetiei :

Dacă A, B, C sînt trei puncte colineare, omoteticele lor A', B', C' în raport cu acelaşi centru sînt de asemenea coliniare (teoremele a), b)). Cum pe de altă parte $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = |k|$ (teorema c)), urmează $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$, adică raportul simplu $\frac{AB}{BC}$ a trei puncte coliniare (A, B, C) este invariant, la o omotetie.

În general, prin omotetie lungimile laturilor unui triunghi deci şi aria sa, se modifică. Se arată însă uşor, că, dacă :

$$\begin{cases} \Delta A'B'C' = O_k(\Delta ABC) \\ \Delta D'E'F' = O_k(\Delta DEF) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \frac{\text{aria } \Delta ABC}{\text{aria } \Delta DEF} = l$$

atunci avem şi

$$\frac{\text{aria } \Delta A'B'C'}{\text{aria } \Delta D'E'F'} = l.$$

3. *Asemănarea.* Fie o figură F şi omotetica ei $F' = O_k(F)$. Să considerăm şi o figură F'' egală cu F', adică obţinută din F' printr-o deplasare : $F'' = D(F')$, unde prin D am notat deplasarea (translaţie, rotaţie, simetrie sau produse ale lor). Deci, figura F'' a fost obţinută din figura iniţială F printr-o succesiune (printr-un produs) de două transformări : o omotetie şi o deplasare, ceea ce se scrie : $F'' = D.O_k(F)$. Se spune că figura F'' este *asemenea* cu figura F, iar transformarea prin care am obţinut figura F'' din figura F se numeşte *asemănare.* Considerînd din figura F un segment, avem (fig. 4) :

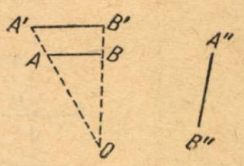


Fig. 4

$$A'B' = O_k(AB), \quad A''B'' = D(A'B')$$

deci : $A''B'' = D.O_k(AB) = a(AB)$, unde prin a am notat transformarea prin asemănare.

Din definiţia asemănării rezultă că sînt invariante la o transformare prin asemănare acele proprietăţi care sînt invariante atît la omotetie, cît şi la deplasare, adică :

a) O dreaptă se transformă tot într-o dreaptă, în general neparalelă cu prima, deci puncte coliniare se transformă în puncte tot coliniare,

b) Un segment se transformă tot într-un segment ; raportul lungimilor celor două segmente este egal cu coeficientul omotetiei luat în valoare absolută,

c) Un vector se transformă într-un vector, în general necoliniar (neparalel) cu el,

d) Un unghi se transformă într-un unghi egal cu el,

e) Un poligon se transformă într-un poligon, unghiurile lor sînt respectiv egale, iar lungimile laturilor corespunzătoare sînt proporţionale,

f) Raportul simplu a trei puncte coliniare se păstrează cînd înlocuim punctele prin transformatele lor,

g) Raportul ariilor a două poligoane rămîne neschimbat cînd înlocuim poligoanele prin transformatele lor.

S-a observat desigur, că lungimea unui segment nu este invariantă la transformarea prin asemănare.

Proprietățile cunoscute din manualul școlar, obținute prin folosirea asemănării sînt denumite *proprietăți euclidiene* *). (Exemple : cazuri de asemănare a triunghiurilor, relațiilor metrice în triunghiul dreptunghic și în cerc, teorema privitoare la raportul perimetrelor a două poligoane asemenea.) Studiul proprietăților invariante la asemănări se numește *geometria asemănărilor* sau *geometria euclidiană*. În particular, putem considera omotetia de coeficient $k = 1$, adică identitatea ; cum $D.O_1 = A$, conchidem că $D = A$, deci și deplasarea poate fi considerată o asemănare. Urmează că toate proprietățile metrice sînt și euclidiene ; geometria metrică este un capitol al geometriei euclidiene.

4. *Transformarea perspectiv-afină* **). Reamintim că în cazul simetriei axiale avem : o axă de simetrie s care determină două semiplane și fiecărui punct A situat într-unul din semiplane îi corespunde prin simetrie axială, un punct A' situat în celălalt semiplan, astfel că s este mediatoarea segmentului AA'.

Dacă cele două puncte A, A' sînt astfel încît axa s nu este mediatoarea segmentului AA', atunci A' se zice că este corespunzător lui A prin *transformarea perspectiv-afină*. Mai mult, direcția AA' poate să nu fie perpendiculară pe AA' ; de asemenea, punctele A și A' pot fi în același semiplan. În fig. 5 a, este reprezentată simetria axială : $AA' \perp s$ și

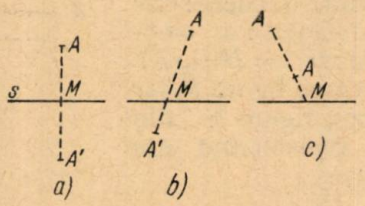


Fig. 5

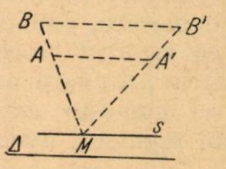


Fig. 6

$\frac{AM}{MA'} = 1$, iar în fig. 5b și 5c este reprezentată transformarea *perspectiv-afină* : $\frac{AM}{MA'} = k$ (oarecare). Deci, simetria axială este un caz particular de transformare perspectiv-afină.

Dreapta s se numește axa, AA' este direcția, iar k este raportul transformării perspectiv-afine. O transformare perspectiv-afină este determinată cînd se dă : 1) axa s ; 2) o direcție Δ și 3) un număr k. În locul direcției Δ se poate da o pereche de puncte corespondente A, A'.

În cazul cînd direcția Δ este paralelă cu axa s transformarea este determinată numai de axa s și o pereche de puncte corespunzătoare A, A'.

Dat un punct B, transformatul său B' se construește astfel : ducem prin B paralela la Δ (la AA'). Fie N intersecția ei cu s. Luăm pe această paralelă punctul B' astfel ca $\frac{BN}{NB'} = k$.

*) Justificarea denumirii o găsim în faptul că toate aceste proprietăți sînt stabilite în geometria lui Euclid.

**) citiți : afină.

Dacă $\Delta \parallel s$, atunci transformatul B' al unui punct B se construeşte astfel (fig. 6) : se duce dreapta BA. Fie M intersecţia ei cu axa s. Dreapta MA' întîlneşte paralela prin B la AA' în punctul B'.

Justificare : M se transformă în el însuşi, A se transformă în A', dreapta MA se transformă în MA', deci transformatul lui B este situat pe MA'. Cum BB' trebuie să fie paralel cu AA', rezultă construcţia dată mai sus.

Sînt invariante la o transformare perspectiv-afină :

1) Coliniaritatea punctelor (adică puncte coliniare se transformă tot în puncte coliniare sau, ceea ce este tot una, o dreaptă se transformă tot într-o dreaptă) ;

2) Raportul simplu a trei puncte coliniare ;

3) Paralelismul dreptelor (două drepte paralele se transformă tot în două drepte paralele) ;

4) Raportul lungimilor a două segmente de drepte paralele ;

5) Raportul ariilor a două triunghiuri, a două poligoane oarecare.

Vom demonstra numai prima teoremă. Fie axa s şi o dreaptă d neparalelă cu s ($d \cap s \equiv P$) (fig. 7a). Fie A un punct pe dreapta d şi A', transformatul său ; transformatul punctului P este el însuşi. Punctele A' şi P determină o dreaptă d'. Să arătăm că transformatul B' al unui punct oarecare B de pe dreapta d se află pe dreapta d'. Conform definiţiei, BB' şi AA' sînt paralele. Dacă M şi N sînt intersecţiile axei s cu AA', respectiv BB', trebuie să avem : $\frac{BN}{NB'} = \frac{AM}{MA'} = k$. Or, dreptele s, AB şi $A'B'$ care determină pe paralelele AA' şi BB' segmente proporţionale formează un fascicol. Cum $s \cap d \equiv P$, urmează că şi $B'A'$ trece prin P, adică B' este situat pe dreapta $PA' = d'$.

Dacă dreapta d este paralelă cu axa s (fig. 7b) şi dacă A', B', C' sînt transformatele punctelor A, B, C avem : $\frac{AM}{MA'} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CR}{RC'}$. Din primele două rapoarte urmează că dreptele s, d, $A'B'$ determină pe paralelele AA' şi BB' segmente proporţionale. Cum s este paralelă cu d, urmează că şi $A'B'$ este paralelă cu d. Analog, din ultimele două rapoarte urmează că $B'C'$ este paralelă cu d. Deci, în baza axiomei paralelelor, $A'B'$ şi $B'C'$ formează o singură dreaptă.

Observaţii. *a*) Dacă îndoim planul după axa s, aşa fel ca cele două semiplane să formeze un diedru de axă s, corespondenţa devine o proiecţie a punctelor unui semiplan (plan) pe alt semiplan (plan) proiecţie efectuată paralel cu o direcţie dată. Cititorului este familiarizat cu ea de la desen.

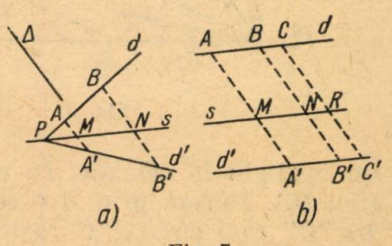


Fig. 7

b) S-a observat că nu s-a menţionat la proprietăţi, invarianţa unghiului. În adevăr, printr-o transformare perspectiv-afină, un unghi se transformă, în general, într-un unghi neegal cu el. Ca exemplu se verifică imediat că $\sphericalangle (d,s) \neq \sphericalangle (d', s)$, (fig. 8).

5. *Transformarea afină.* Să efectuăm succesiv, două transformări perspectiv-afine față de două axe neparalele s_1 și s_2 (fig. 9).

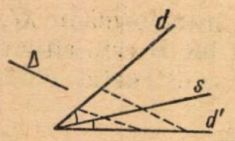


Fig. 8

Avem : $AA_1 \parallel BB_1$; $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Dar AA_2 nu este paralelă cu BB_2, deci, A_2 și B_2 nu pot fi obținute din A și B printr-o transformare perspectiv-afină ; oricîte transformări perspectiv-afine am fi luat succesiv, produsul lor nu este, în general,o transformare perspectiv-afină. Se observă însă, imediat că punctele coliniare se transformă tot în puncte coliniare ($A,B,C \to A_2$, B_2, C_2) și că raportul simplu se păstrează :

$$\frac{CB}{AB} = \frac{C_2B_2}{B_2A_2} \left(= \frac{C_1B_1}{B_1A_1} \right).$$

Definim astfel o transformare nouă, produsul mai multor transformări perspectiv-afine și pe care o numim transformare afină.

După cum se vede mai sus, ea este o corespondență între punctele planului, astfel că punctele coliniare se transformă în puncte coliniare, iar raportul simplu a trei puncte coliniare este egal cu raportul simplu al punctelor transformate. Pe scurt, *afinitatea* este o transformare care conservă coliniaritatea și raportul simplu.

Fiind un produs de transformări perspectiv-afine, invarianții transformării perspectiv-afine sînt invarianți și la transformarea afină, adică, coliniaritatea punctelor, raportul simplu a trei puncte coliniare, paralelismul dreptelor, raportul lungimilor a două segmente de drepte paralele, raportul ariilor a două triunghiuri oarecare.

Cititorul poate verifica ușor, că toate transformările prezente pînă aici sînt transformări afine, deoarece prin toate se conservă coliniaritatea punctelor și raportul simplu, ceea ce este suficient ca o transformare să fie afină.

O teoremă cu importante consecințe este următoarea : Date două triunghiuri oarecare, există o transformare afină care duce (transformă)

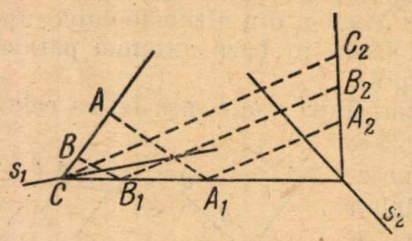


Fig. 9

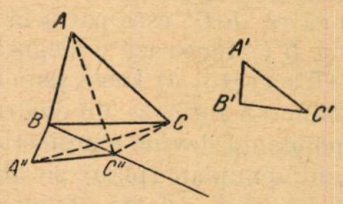


Fig. 10

un triunghi în celălalt. În adevăr, fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri (fig. 10). Ducem prin B o semidreaptă oarecare ; construim un triunghi $BA''C''$ egal cu $A'B'C'$, astfel ca $B' \equiv B$ și $B'C'$ să fie situat pe semidreapta considerată. Considerăm transformarea perspectiv afină determinată de axa BC și de perechea de puncte A și C'' ; ea duce triunghiul ABC în triunghiul $C''BC$. Fie apoi, o a doua transformare perspectiv-afină determinată de axa BC'' și de perechea de puncte C și A''. Ea duce

triunghiul BCC'' în triunghiul $BA''C''$. Fie acum, deplasarea care duce triunghiul $BA''C''$ în triunghiul $B'A'C'$. În felul acesta, prin produsul (succesiunea) a două transformări perspectiv-afine şi o deplasare, deci printr-o afinitate, triunghiul ABC a fost dus în triunghiul $A'B'C'$.

Am văzut că două figuri se zic *egale* dacă există o deplasare care transformă una din figuri în cealaltă; analog, două figuri se zic *asemenea* dacă există o *asemănare* (în sens de *transformare*) care transformă una în cealaltă. La fel spunem că două figuri sînt *echivalente afin* dacă există o *afinitate* (*transformare afină*) care duce una în cealaltă.

Pe lîngă noţiunile anterioare de proprietăţi metrice şi proprietăţi euclidiene introducem noţiunea de *proprietăţi afine* ale figurilor: acele proprietăţi care sînt invariante la transformările afine. Studiul proprietăţilor afine ale geometriei constituie obiectul *geometriei afine*. Noţiunile cu care operează geometria afină se numesc *noţiuni afine* (exemple: raportul simplu a trei puncte coliniare, triunghiul, paralelogramul, trapezul), deaorece printr-o afinitate ele se transformă respectiv, în acelaşi raport simplu, într-un triunghi, paralelogram, trapez. Cercul, unghiul drept, dreptunghiul, pătratul, rombul nu sînt noţiuni afine, deoarece prin afinitate ele se transformă respectiv, în elipsă, unghi oarecare, paralelograme oarecare.

6. **În încheiere putem sintetiza concluziile în următorul tabel: da (nu) situat pe linia i, coloana j înseamnă că elementul situat pe linia i este (nu este) invariant la transformarea indicată în coloana j.**

Transformarea / Invarianţi	Simetria axială	Translaţia	Rotaţia	Omotetia	Transformarea perspectiv-afină
	Deplasarea				
	Asemănarea				
	Afinitatea				
Coliniaritatea (dreapta)	da	da	da	da	da
Raportul simplu	da	da	da	da	da
Paralelismul	da	da	da	da	da
Raportul ariilor	da	da	da	da	da
Conciclicitatea (cercul)	da	da	da	da	nu
Distanţa	da	da	da	nu	nu

Consideraţiile de mai sus se extind şi la geometria în spaţiu. Ideea fundamentală poate fi clarificată însă şi cu aceste definiţii şi proprietăţi aplicate la transformarea figurilor plane.

Menţionăm că multe demonstraţii din geometria elementară clasică pot fi uşurate simţitor, folosind transformările geometrice.

Pentru informarea sa este bine ca cititorul să consulte următoarele cărţi, apărute în Biblioteca S.S.M.:

A. Haimovici, Grupuri de transformări,

C. Ionescu-Bujor, Elemente de transformări geometrice,

T. Roman, Simetria.

LEGI DE COMPOZIȚIE

TRAIAN COHAL, profesor, Iași

Gazeta matematică — seria B a publicat începînd cu nr. 4 din 1961*, o serie de probleme legate de noțiunea de lege de compoziție sau de operație. Unii rezolvitori, fiind puțin familiarizați cu acest gen de probleme au întîmpinat dificultăți în rezolvarea lor. Considerăm că ar fi util pentru cititorii Gazetei, să cunoască mai amănunțit această noțiune, cît și unele elemente legate de ea.

Definiție. Spunem că pe o mulțime E există o lege de compoziție (operație) dacă la fiecare pereche ordonată (a, b) de elemente din E, distincte sau nu, putem face să corespundă în mod unic, un element c din E.

În forma cea mai generală scriem :

$$c = a \ast b$$

și numim c, compusul lui a și b. (Semnul $\ast$ utilizat este convențional)

I. Exemple de legi de compoziție. Pentru cele ce urmează vom folosi următoarele notații : N — mulțimea numerelor naturale ; Q — mulțimea numerelor raționale.

1. Perechii de numere $a \in Q, b \in Q$ facem să-i corespundă suma celor două numere, pe care o notăm cu c. Deoarece $c \in Q$ rezultă că legea definită astfel este o lege de compoziție. Ea poartă numele de adunare. Se notează în particular,

$$a + b = c.$$

(Aici semnul $\ast$ este înlocuit prin semnul $+$).

2. Perechii de numere $a \in Q$, $b \in Q$ facem să-i corespundă produsul celor două numere, pe care îl notăm prin c. Evident, avem de-a face cu o lege de compoziție. Ea poartă numele de înmulțire. Se notează :

$$a.b = c.$$

3. Perechii de numere $a \in Q$, $b \in Q$ facem să-i corespundă numărul $c = a + b + ab$. Evident $c \in Q$. Deci avem de-a face cu o lege de compoziție. Notăm :

$$a \ast b = a + b + ab.$$

4. Să facem corespondența între perechea de numere $a \in N$, $b \in N$ și numărul c care este *c.m.m.d.c.* al numerelor a, b. Aceasta este o lege de compoziție. Notînd operația prin D avem :

$$aDb = c.$$

Și corespondența dintre perechea de numere $a \in N$, $b \in N$ și numărul c, care este *c.m.m.c.m.* al numerelor a, b este o lege de compoziție. Notînd operația prin M avem :

$$aMb = c.$$

*) Problema 4659.

De exemplu : $18\ D\ 24 = 6$; $18\ M\ 24 = 72$.

5. Să facem corespondenţa între perechea de numere $a \in Q$, $b \in Q$ şi numărul c, care este media aritmetică a celor două numere. Deoarece $c \in Q$, rezultă că această corespondenţă este o lege de compoziţie şi avem :

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

6. Fie E mulţimea vectorilor din plan, care au aceiaşi origină. Corespondenţa dintre perechea de vectori $\bar{a} \in E$, $\bar{b} \in E$ şi vectorul $\bar{c}$ (fig .1), care este suma geometrică a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este o lege de compoziţie ; se notează :

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

7. Fie E mulţimea translaţiilor din planul P. Perechii de translaţii $T_1 \in E$; $T_2 \in E$ facem să-i corespundă o translaţie T, care este produsul (succesiunea) celor două translaţii. Deoarece produsul a două translaţii este tot o translaţie, iar pentru T_1, T_2 date, translaţia T este unic determinată în mulţimea translaţiilor, rezultă că această corespondenţă este o lege de compoziţie. Se notează :

$$T = T_1 \cdot T_2.$$

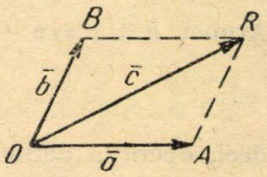


Fig. 1

8. Fie numerele $a \in Q$ şi $b \in Q$. Perechea ordonată (a, b) este un element al mulţimii produs cartezian $Q \times Q$ *).

Să facem corespondenţa între perechile $(a\,;\,b) \in Q \times Q$; $(c\,;\,d) \in Q \times Q$ şi perechea $(a + c\,;\ b + d)$. Deoarece $(a + c\,;\, b + d) \in Q \times Q$, rezultă că legea definită astfel este o lege de compoziţie. Notînd legea (operaţie) prin $\ast$ avem :

$$(a\,;\ b) \ast (c\,;\ d) = (a + c\,;\ b + d).$$

9. Corespondenţa între perechile $(a\,;b) \in Q \times Q$, $(c\,;d) \in Q \times Q$ şi perechea $(ab - bd\,;\ bc + ad)$ este şi ea o operaţie. Notînd operaţia prin $\ast$ avem :

$$(a\,;\ b) \ast (c\,;\ d) = (ac - bd\,;\ \ bc + ad).$$

II. Legi comutative. Definiţie. Die a, b două elemente ale unei mulţimi E. O lege de compoziţie pe E, notată $\ast$ se numeşte comutativă dacă oricare ar fi perechea (a, b) avem

$$a \ast b = b \ast a.$$

Exemple. 1. În mulţimea Q adunarea şi înmulţirea sînt legi comutative, deoarece $a + b = b + a$ şi $a.b = b.a$, oricare ar fi a şi b din Q.

2. În mulţimea Q, legea de compoziţie definită prin $a \ast b = a + b + ab$ este comutativă, deoarece :

$$a \ast b = a + b + a.b = b + a + b.a = b \ast a.$$

---

*) Produsul cartezian $E \times F$ este mulţimea formată din perechi ordonate $(x\,;y)$ cu primul element x din mulţimea E şi al doilea element y luat din mulţimea F.

3. Fie $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ vectorii care definesc translaţiile T_1 şi T_2. Deoarece $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v}_2 + \overline{v}_1$ rezultă că :

$$T_1 . T_2 = T_2 . T_1,$$

deci, produsul translaţiilor este comutativ.

4. Operaţia definită în exemplul I. 8 este comutativă deoarece $(a ; b) \ast (c ; d) = (a + c ; b + d)$ şi $(c ; d) \ast (a ; b) = (c + a ; d + b) = (a + c ; b + d)$.

Observaţii. Nu orice lege de compoziţie este comutativă. Această afirmaţie se dovedeşte cu ajutorul următoarelor exemple :

1. Fie $a \in Q$, $b \in Q$, $(b \neq 0)$ şi legea definită prin

$$a \ast b = a + \frac{1}{b}$$

Atunci, $b \ast a = b + \frac{1}{a}$; rezultă că pentru $a = b$ avem :

$$a \ast b \neq b \ast a,$$

deci, operaţia definită mai sus nu este comutativă.

2. Fie $a \in N$, $b \in N$ şi legea de compoziţie numită exponenţiere definită prin $a \ast b = a^b$. Atunci $b \ast a = b^a$. Rezultă că pentru $a \neq b$ avem :

$$a \ast b \neq b \ast a.$$

Spre exemplu, $2 \ast 5 = 2^5 = 32$; $5 \ast 2 = 5^2 = 25$.

III. Legi asociative. Definiţie. Fie a, b, c trei elemente ale unei mulţimi E. O lege de compoziţie pe E, notată $\ast$, se numeşte asociativă dacă, oricare ar fi a, b, c avem :

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c),$$

cu $(a \ast b)$ notînd compusul dintre a şi b.

Dacă legea este asociativă, rezultatul se poate nota

$$a \ast b \ast c.$$

Exemple. 1. În mulţimea Q, adunarea şi înmulţirea sînt legi asociative, deoarece : $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi a, b, c din Q.

2. În mulţimea Q, operaţia $\ast$ definită în exemplul I.3 este asociativă. În adevăr :

$$(a \ast b) \ast c = (a + b + ab) \ast c = (a + b + ab) + (c) + (a + b + ab)c =$$
$$= a + b + ab + c + ac + bc + abc = a + b + c + ab + bc + ca + abc.$$

Pe de altă parte :

$$a \ast (b \ast c) = a \ast (b + c + bc) = (a) + (b + c + bc) + a.(b + c + bc) =$$
$$= a + b + c + bc + ab + ac + abc = a + b + c + ab + bc + ca + abc,$$

deci : $(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$, oricare ar fi a, b, c din Q.

3. În mulțimea N legea care face corespondența între perechea (a,b) și *c.m.m.d.c.* al numerelor a, b este asociativă, adică :

$$(aDb)Dc = aD(bDc).$$

4. În mulțimea vectorilor din plan, care au aceeași origină adunarea geometrică este asociativă. Fie vectorii OA, OB, OC. Notăm prin OR_1 suma vectorilor OA, OB ; prin OR_2 suma vectorilor OB și OC, iar prin OR suma vectorilor OR_1, OC (fig. 2). Rezultă că :

$$(\overline{OA} + \overline{OB}) + \overline{OC} = \overline{OR_1} + \overline{OC} = \overline{OR}.$$

Deoarece patrulaterele OAR_1B ; OBR_2C și OR_1RC sînt paralelograme, rezultă că și $OARR_2$ este paralelogram. Deci :

$$\overline{OA} + \overline{OR_2} = \overline{OR}$$

sau :

$$\overline{OA} + (\overline{OB} + \overline{OC}) = \overline{OR}.$$

Obținem :

$$(\overline{OA} + \overline{OB}) + \overline{OC} = \overline{OA} + (\overline{OB} + \overline{OC}).$$

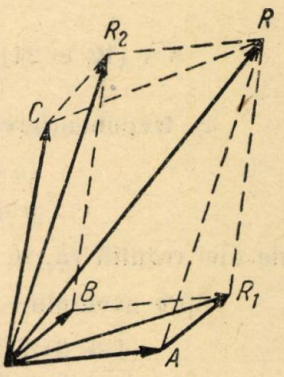


Fig. 2

5. Operația definită în exemplul I.8 este asociativă deoarece :

$$[(a\,;\,b) * (c\,;\,d)] * (f\,;\,g) = (a + c\,;\,b + d) * (f\,;\,g) = \\ = (a + c + f\,;\,b + d + g)$$

și :

$$(a\,;\,b) * [(c\,;\,d) * (f\,;\,g)] = (a\,;\,b) * (c\,;\,f\,; \\ d + g) = (a + c + f\,;\,b + d + g),$$

deci :

$$[(a\,;\,b) * (c\,;\,d)] * (f\,;\,g) = (a\,;\,b) * [(c\,;\,d) * (f\,;\,g)].$$

6. Legea definită în exemplul I.9 este asociativă deoarece :

$$[(a\,;\,b)\Delta(c\,;\,d)]\Delta\,(f\,;\,g) = (ac - bd\,;\,bc + ad)\Delta\,(f\,;\,g) = \\ = [(ac - bd).f - (bc + ad)\;g\,;\,(bc + ad).f + (ac - bd).g] = \\ = (a\,;\;b)\Delta(cf + dg\,;\;df + cg) = (a\,;\;b)\Delta\,[(c\,;\;d)\;\Delta(f\,;\;g).]$$

Observație. Nu orice lege de compoziție este asociativă. Vom ilustra această afirmație prin următoarele exemple :

1. Fie $a \in Q$, $b \in Q$ și legea definită în exemplul I.5. Din egalitățile :

$$(a * b) * c = \frac{a+b}{2} * c = \frac{\dfrac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4},$$

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{2} = \frac{a + \dfrac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$$

rezultă că egalitatea :

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$$

are loc numai în cazul particular $a = c$.

Deci, această operație nu este asociativă.

Spre exemplu :

$$(8 \ast 12) \ast 24 = \frac{8 + 12}{2} \ast 24 = 10 \ast 24 = \frac{10 + 24}{2} = 17;$$

$$8 \ast (12 \ast 24) = 8 \ast \frac{12 + 24}{2} = 8 \ast 18 = \frac{8 + 18}{2} = 13.$$

2. Exponențierea nu este asociativă. În adevăr, avem :

$$(a \ast b) \ast c = (a^b) \ast c = (a^b)^c = a^{bc},$$
$$a \ast (b \ast c) = a \ast (b^c) = a^{b^c},$$

de aici rezultă că, în general : $(a \ast b) \ast c \neq a \ast (b \ast c)$.

Spre exemplu :

$$(4 \ast 3) \ast 2 = (4^3) \ast 2 = 64 \ast 2 = 64^2 = 4096,$$
$$4 \ast (3 \ast 2) = 4 \ast (3^2) = 4 \ast 9 = 4^9 = 262144.$$

IV. Element neutru. Definiție. Dacă pentru legea de compoziție considerată există un element particular e în mulțimea E, așa ca pentru orice element $a \in E$ să avem :

$$a \ast e = e \ast a = a,$$

spunem că e este element neutru pentru legea de compoziție $\ast$.

Observație. Dacă legea de compoziție $\ast$ admite un element neutru, atunci în mod necesar, acesta este unic.

Pentru demonstrație, vom presupune că ar mai exista un al doilea element neutru e', așa ca,

$$a \ast e' = e' \ast a = a.$$

Din egalitățile : $e \ast e' = e' \ast e = e$; $e' \ast e = e \ast e' = e'$, rezultă că $e = e'$.

Exemple. 1° Pentru adunare, în mulțimea Q, numărul 0 este elementul neutru căci, $a + 0 = 0 + a = a$.

2° Pentru înmulțire, în mulțimea Q, numărul 1 este elementul neutru, deoarece $a.1 = 1.a = a$.

3° În mulțimea N, pentru legea care asociază unei perechi $(a; b)$, c.m.m.m.c. al numerelor a și b, 1 este elementul neutru, deoarece $aM1 = 1Ma = a$.

4° Numărul 0 pentru legea definită în exemplul I.3 este elementul neutru, deoarece : $a \ast 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$; $0 \ast a = 0 + a + 0 \cdot a = a$.

5° Perechea $(0; 0)$ este elementul neutru pentru legea definită în exemplul I.8 deoarece : $(a; b) \ast (0; 0) = (0; 0) \ast (a; b) = (a; b)$.

6°. Perechea $(1; 0)$ este elementul neutru pentru legea definită în exemplul I.9, deoarece $(a; b)\ (1; 0) = (1; 0)\ (a; b) = (a; b)$.

7° În mulțimea vectorilor din plan care au aceiași origină vectorul $\overline{O}$ ($\overline{O}$ reprezintă vectorul care are originea și extremitatea în același punct) este elementul neutru pentru adunarea geometrică, deoarece $\overline{a} + \overline{O} = \overline{O} + \overline{a} = \overline{a}$.

8° În mulțimea translațiilor plane, translația de vector $\overline{O}$ este elementul neutru pentru produsul translațiilor. Dacă notăm prin T_0 translația de vector $\overline{O}$ avem: $T \cdot T_0 = T_0 \cdot T = T$.

Observație. Nu orice mulțime admite un element neutru față de o lege de compoziție dată. Spre exemplu, să considerăm mulțimea numerelor pare în care, ca lege de compoziție luăm înmulțirea. Evident, în această mulțime nu există nici un element care să fie neutru față de înmulțire.

V. Inversul unui element. Definiție. Fie mulțimea E și legea de compoziție notată $*$, posedînd elementul neutru e. Elementul a' se numește inversul elementului $a \in E$, în raport cu legea $*$, dacă $a * a' = a' * a = e$ și $a' \in E$.

Exemple. 1. În mulțimea Q elementele a și $-a$ sînt inverse în raport cu adunarea, deoarece $a + (-a) = -a + (a) = 0$.

2. În mulțimea Q elementele a și $\frac{1}{a}$, $(a \neq 0)$ sînt inverse în raport cu înmulțirea, deoarece $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

3. În mulțimea Q elementul $-\frac{a}{1+a}$, $(a \neq -1)$ este inversul lui a în raport cu legea definită prin $a * b = a + b + ab$, deoarece

$$a * \left(-\frac{a}{1+a}\right) = \left(-\frac{a}{1+a}\right) * a = 0.$$

4. În mulțimea $Q \times Q$, perechea $(-a; -b)$ este inversul perechii $(a; b)$ în raport cu legea definită în exemplul I.8, deoarece: $(a; b) * (-a; -b) = (-a; -b) * (a; b) = (0; 0)$.

5. În mulțimea $Q \times Q$ perechea $\left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ este inversul perechii $(a; b)$ în raport cu legea definită în exemplul I.9 deoarece

$$(a; b) \Delta \left(\frac{a}{a^2+b^2}; -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \Delta (a; b) = (1; 0).$$

6. Să notăm prin T translația de vector $\overline{v}$ și T' translația de vector $-\overline{v}$. Evident, $T \cdot T' = T' \cdot T = T_0$, deci, translațiile T și T' sînt inverse în raport cu produsul translațiilor.

Observație. Dacă operația $*$ este asociativă și dacă elementul a admite un invers a', atunci a' este unic determinat.

Pentru demonstrație să presupunem că elementul a ar avea două elemente inverse a', a'', adică: $a * a' = a' * a = e$ și $a * a'' = a'' * a = e$.

Din egalitățile :

$$a'' * a * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''\,;\ a'' * a * a' = (a'' * a) * a' = e * a' = a'$$

rezultă că $a'' = a'$.

VI. Distributivitatea unei legi față de o altă lege. Definiție. Fie o mulțime E pe care am definit două legi de compoziție, notate $*$ și Δ. Spunem că legea Δ e distributivă față de legea $*$ dacă avem :

$$m \Delta (a * b) = (m \Delta a) * (m \Delta b).$$

Exemplu. Fie mulțimea Q pe care luăm ca legi de compoziție adunarea și înmulțirea. Operația înmulțirii este distributivă în raport cu adunarea, deoarece $m.(a + b) = m.a + m.b$.

2°. Fie mulțimea $Q \times Q$ și legile definite prin exemplul I.8 și exemplul I.9. Avem :

$$(m\,;\ n)\Delta[(a\,;\ b) * (c\,;\ d)] = (m\,;\ n)\Delta(a + c\,;\ b + d) = (ma + mc - nb - nd\,;\ na + nc + mb + md)$$

și

$$[(m\,;\ n)\Delta(a\,;\ b)] * [(m\,;\ n)\Delta(c\,;\ d)] = (ma - nb\,;\ na + mb) * (mc - nd\,;\ ac + md) = (ma - nb + mc - nd\,;\ na + mb + nc + md)$$

deci :

$$(m + n)\Delta[(a\,;\ b) * (c\,;\ d)] = [(m\,;\ n)\Delta(a\,;\ b)] * [(m\,;\ n)\Delta(c\,;\ d)]$$

ceea ce ne arată că în mulțimea $Q \times Q$, legea Δ este distributivă față de legea $*$.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

DISPOZITIVE PENTRU DESENAREA UNOR FIGURI

DAN BRÎNZEI asist. Univ. Al. I. Cuza, Iași

În cele ce urmează vom descrie cîteva dispozitive simple destinate efectuării a diverse transformări plane simple, dispozitive realizabile cu mijloace tehnice modeste.

1. *Dispozitiv pentru realizarea simetriei față de o dreaptă.* Un romb $ABCD$ articulat mobil în vîrfurile sale, poate să alunece liber cu vîrfurile sale A și C de-a lungul unui șanț d săpat în lemn. Este evident că în timp ce vîrful B descrie o anumită curbă, punctul D, prevăzut cu un creion descrie o curbă simetrică față de d. Acest dispozitiv remarcabil de simplu a fost conceput și realizat la Universitatea „Alex. I. Cuza" din Iași. Observînd că toate mișcările plane se poate descompune în produs de simetrii față de drepte ne convingem imediat de larga aplicabilitate a acestui dispozitiv (fig. 1).

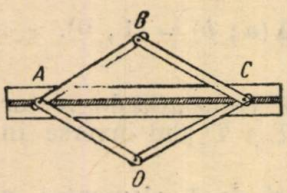


Fig. 1

2. *Dispozitiv pentru realizarea translațiilor.* Un astfel de dispozitiv, realizat la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași este cel schițat în figura 2.

Vîrfurile 1, 2 sînt prevăzute cu două *menghine* destinate fixării dispozitivului de marginea superioară a tablei și formează împreună cu vîrfurile 3, 4 un paralelogram deformabil. Vîrfurile 5, 6 diametral opuse în cercul de diametru 3, 4 determină astfel o direcție fixă. Cursorul din B se

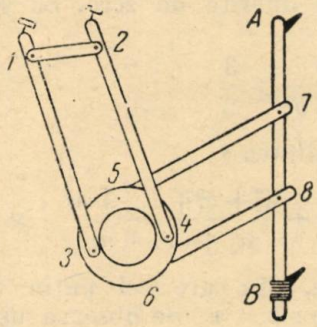


Fig. 2

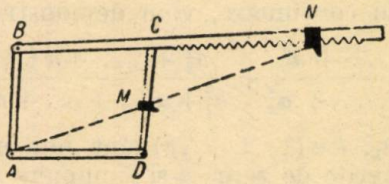
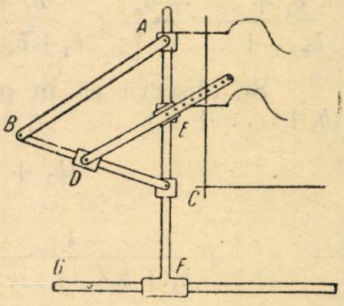


Fig. 3

fixează și atunci cînd vîrful A descrie o curbă, vîrful B, prevăzut cu o cretă descrie translatata acesteia.

3. *Dispozitiv pentru realizarea omotetiilor.* Un astfel de dispozitiv, cunoscut sub numele de pantograf, este deosebit de simplu și o singură privire aruncată asupra schiței sale din fig. 3 ne sugerează modul său de funcționare. Într-adevăr dacă fixăm vîrful A în centrul de omotetie și urmărim cu M o curbă, atunci N urmărește o curbă omotetică față de aceasta. Demonstrația revine la observarea asemănării triunghiurilor ADM și ABN.

4. *Dispozitiv pentru realizarea transformărilor afine.* Acest dispozitiv se compune din două tije AC și FG legate între ele printr-un cursor care menține AC perpendiculară pe FG. Cursoarele D și E se fixează astfel încît DE să fie paralelă cu AB, lucru ușor realizabil dacă laturile CB și CA sînt gradate în mod corespunzător. Articulațiile din A, B, C, D, E sînt mobile și dau posibilitatea triunghiului ABC să se deformeze, punctul C păstrîndu-și poziția iar DE rămînînd paralelă cu AB. Triunghiurile CBA și CDE sînt asemenea și avem



$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = k.$$

Așa dar, cînd vîrful A urmărește o curbă, care în sistemul rectangular xOy are ecuația $y = f(x)$, vîrful E urmărește o alta de ecuație $y = k \cdot f(x)$, adică ceea ce numim transformata afină a curbei C.

Ne oprim aici cu descrierea acestor dispozitive, dar un cititor inventiv își poate imagina singur astfel de dispozitive pentru realizarea simetriei față de un punct, a inversiuni, etc.

Generalizarea problemei 5907

Enunțul problemei 5907 este următorul: Fie a, b, c numere reale oarecare dintre care cel puțin două să fie diferite de zero. Să se demonstreze că:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

În continuare, vom demonstra inegalitatea:

$$\frac{a_1^2+\ldots+a_k^2}{a_{k+1}^2+\ldots+a_n^2}+\frac{a_2^2+\ldots+a_{k+1}^2}{a_1^2+a_{k+2}^2+\ldots+a_n^2}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2}{a_k^2+\ldots+a_{n-1}^2}\geqslant\frac{nk}{n-k}$$

unde a_k, $k\in(1, 2,\ldots,n)$ sînt numere reale, din care cel puțin $n-k$ sînt diferite de zero, n și k numere naturale: $k<n$. Se observă ușor că această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea:

$$\frac{b_1+\ldots+b_k}{b_{+1}+\ldots+b_n}+\frac{b_2+\ldots+b_{k+1}}{b_1+b_{k+2}+\ldots+b_n}+\ldots+\frac{b_n+b_1+\ldots+b_{k-1}}{b_k+\ldots+b_{n-1}}\geqslant\frac{nk}{n-k}$$

unde b_k, $k\in(1, 2,\ldots, n)$ sînt numere pozitive, din care cel puțin $n-k$ diferite de zero. Pentru a demonstra această inegalitate, vom aduna fiecărei fracții din primul membru 1. Fiind n fracții, vom aduna în membrul doi n. Avem de demonstrat acum inegalitatea:

$$\left(\frac{b_1+\ldots+b_k}{b_{k+1}+\ldots+b_n}+1\right)+\left(\frac{b_2+\ldots+b_{k+1}}{b_1+b_{k+2}+\ldots+b_n}+1\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{b_n+b_1+\ldots+b_{k-1}}{b_k+\ldots+b_{n-1}}+1\right)\geqslant\frac{nk}{n-k}+n$$

$$\frac{b_1+\ldots+b_n}{b_{k+1}+\ldots+b_n}+\frac{b_1+\ldots+b_n}{b_1+b_{k+2}+\ldots+b_n}+\ldots+\frac{b_1+\ldots+b_n}{b_k+\ldots+b_{n-1}}\geqslant\frac{n^2}{n-k}.$$

Se observă că în primul membru se poate scoate factor comun $(b_1+\ldots+b_n)$.

$$(b_1+\ldots+b_n)\left[\frac{1}{b_k+\ldots+b_n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b_1+b_{k+2}+\ldots+b_n}+\ldots+\frac{1}{b_k+\ldots+b_{n-1}}\right]\geqslant\frac{n^2}{n-k}.$$

Să notăm numitorii fracțiilor din paranteza dreaptă cu

$$N_1=b_k+\ldots+b_n;\ N_2=b_1+b_{k+2}+\ldots+b_n+\ldots;$$
$$N_n=b_k+\ldots+b_{n-1}$$

Se observă că:

$$N_1+N_2+\ldots+N_n=(b_k+\ldots+b_n)+(b_1+$$
$$+b_{k+2}+\ldots+b_n)\ldots+(b_k+\ldots+b_{n-1})=(n-k)(b_1+\ldots+b_n).$$

Deci avem de demonstrat inegalitatea

$$\left(\frac{N_1+N_2+\ldots+N_n}{n-k}\right)\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_n}\right)\geqslant\frac{n^2}{n-k};$$

$$\left(N_1+N_2+\ldots+N_n\right)\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_n}\right)\geqslant n^2\cdot$$

ceea ce este evident, deoarece $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sînt numere pozitive. Cu aceasta, inegalitatea propusă este demonstrată. Pentru $n=3$, $k=1$, se obține problema 5907. Avem egalitate numai în cazul $a^2_1 + a^2_2 = \ldots$ $\ldots = a^2_n$

Popa Eugen, elev Iași

Generalizarea relației lui Stewart

Dîndu-se un triunghi ABC și un punct D pe latura AB, există relația lui Stewart :

$$\frac{BC^2}{BD\cdot BA}+\frac{CA^2}{AD\cdot AB}+\frac{CD^2}{DA\cdot DB}=1, \qquad (1)$$

DA, DB fiind de semne contrare.

Această relație permite calcularea lui CD cunoscînd celelalte segmente.

Ne propunem să găsim o formulă prin care să determinăm segmentul determinat de 2 laturi ale triunghiului pe o transversală oarecare Δ care taie pe BC, AC, AB respectiv în a, b, c. Considerînd paralela CD la transversală, din asemănarea triunghiurilor Acb, ADC și cBa, DBC obținem :

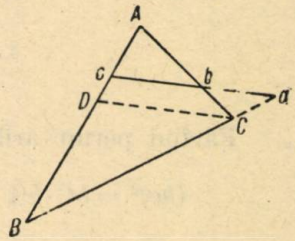


Fig. 3

$$\frac{Ac}{AD}=\frac{cb}{DC}=\frac{bA}{CA}, \qquad (2)$$

$$\frac{cB}{DB}=\frac{Ba}{BC}=\frac{ac}{CD}\cdot \qquad (3)$$

Înlocuind în relația (1) rapoartele $\frac{CA}{AD}, \frac{BC}{BD}, \frac{CD}{DA}, \frac{CD}{DB}$ cu valorile lor scoase din (2) și (3) obținem :

$$\frac{CA}{AB}\cdot\frac{bA}{Ac}+\frac{Ba}{Bc}\cdot\frac{BC}{BA}+\frac{bc}{cA}\cdot\frac{ac}{CB}=1,$$

sau :

$$BC\cdot aB\cdot cA + CA\cdot bA\cdot CB + AB\cdot cA\cdot cB = -AB\cdot bc\cdot ca, \qquad (4)$$

care reprezintă generalizarea relației lui Stewart.

În adevăr, făcînd $c\to D$, $b\to C$, $a\to C$ obținem :

$$BC^2\cdot AD + CA^2\cdot DB + AB\cdot DA\cdot DB = +AB\cdot CD^2,$$

sau :

$$BC^2\cdot AD + CA^2\cdot DB - CD^2\cdot AB = AB\cdot AD\cdot DB,$$

adică tocmai relația lui Stewart.

Făcînd în relaţia (4) permutări circulare obţinem încă două relaţii :

$$CA\cdot bc\cdot aB + AB\cdot cB\cdot aC + BC\cdot aB\cdot aC = -\,BC\cdot ca\cdot ab, \qquad (5)$$

$$AB\cdot cA\cdot bC + BC\cdot aC\cdot bA + CA\cdot bC,\ bA = -\,CA\cdot ab\cdot bc \qquad (6)$$

Eliminînd din (4), (5) şi (6) pe AB, BC, CA obţinem :

$$\begin{vmatrix} bc\cdot ca + cB\cdot cA & aB\cdot cA & bA\cdot cB \\ cB\cdot aC & ca\cdot cb + aB\cdot ac & aB\cdot bC \\ bc\cdot cA & aC\cdot bA & ab\cdot bc + bC\cdot bA \end{vmatrix} = 0,$$

în care, în cazul cînd transversala trece prin cîte un vîrf, se anulează cîte o linie.

Sistemul format de ecuaţiile (4), (5), (6), se rezolvă cu uşurinţă împărţind a doua ecuaţie cu BC şi a treia cu CA, apoi adunînd cele două ecuaţii se obţine :

$$(ab)^2 = \frac{CA}{BC}\cdot bc\cdot aB = \frac{AB}{BC}\cdot cB\cdot aC + aB\cdot aC +$$

$$+\frac{AB}{cA}\cdot cA\cdot bC + \frac{BC}{CA}\cdot aC\cdot bA + bC\cdot bA,$$

sau

$$(ab)^2 = aB\cdot aC + bA\cdot bC + aC\left(\frac{AB}{BC}\cdot cB + \frac{BC}{CA}\cdot ba\right) +$$

$$+ bC\left(\frac{CA}{BC}\cdot aB + \frac{AB}{CA}\cdot cA\right)$$

Făcînd permutările circulare obţinem relaţiile analoage :

$$(bc)^2 = bC\cdot bA + cB\cdot cA + bA\left(\frac{BC}{CA}\cdot aC + \frac{CA}{AB}\cdot cB\right) +$$

$$+ cA\left(\frac{AB}{CA}\cdot bC + \frac{BC}{AB}\cdot aB\right),$$

$$(ca)^2 = cA\cdot cB + aC\cdot aB + cB\left(\frac{CA}{AB}\cdot bA + \frac{AB}{BC}\cdot ac\right) +$$

$$+ aB\left(\frac{BC}{AB}\cdot cA + \frac{CA}{BC}\cdot bC\right).$$

Valeria Nicola, profesoară Prisăcani

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6441

Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant 3^\circ$ *avem :*

$$\sin(5x + 37^\circ)\cos(5x + 23^\circ) \geqslant \sin(11x + 19^\circ)\cos(11x + 5^\circ)$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluție dată de *Chițescu Ion*, București și *Dăncilă Ion*, Sibiu. Transformăm produsele în sume și obținem inegalitatea

$$\sin(10x + 60°) \leqslant \sin(22x + 24°)$$

echivalentă cu următoarea:

$$\sin(10x + 60°) - \sin(22x + 24°) \geqslant 0$$

Transformăm diferența în produs și avem:

$$\cos(16x + 42°) \sin(-6x + 18°) \geqslant 0$$

Dacă $0° \leqslant x \leqslant 3°$, atunci $42° \leqslant 16x + 42° \leqslant 90°$; $18° \geqslant -6x + 18° \geqslant 0°$, deci $\cos(16x + 42°) \geqslant 0$; $\sin(-6x + 18°) \geqslant 0$.

Rezultă că inegalitatea există.

Problema 6498

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se arate că are loc relația:

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc$$

(OIM 1964, Propusă de R.P.U.)

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. Notăm

$$x = \frac{-a + b + c}{2};\quad y = \frac{a - b + c}{2};\quad z = \frac{a + b - c}{2}$$ și

inegalitatea de demonstrat devine:

$$2\sum x(y + z)^2 \leqslant 3\prod(y + z)$$

Dezvoltînd și efectuînd reduceri ajungem la inegalitatea:

$$6xyz \leqslant \sum x(y^2 + z^2)$$

adică,

$$\sum x(y - z)^2 \geqslant 0$$

inegalitate evidentă pentru x, y, z reali și pozitivi.

Problema 6558

Să se arate că expresia

$$E = 16875 - 27^{3n} \cdot 5^{9n-1} - 4^{3n+1} \cdot 11^{6n+2}$$

este divizibilă cu 2891.

Constanța Grigoraș, Tecuci

Soluție dată de *Popa Eugen*, s.m.3 cl. IX, Iași. — Expresia devine succesiv:

$$E = 3375 \cdot 27^{3n} \cdot 5^{9n} - 484 \cdot 4^{3n} \cdot 11^{9n} = 15^3 \cdot 3^{9n} \cdot 5^{9n} - 22^2 \cdot 2^{6n} \cdot 11^{6n} =$$

$$= 15^{9n+3} - 22^{6n+2} = 3375^{3n+1} - 484^{3n+1}$$

Fiind diferență de numere la aceleași puteri expresia E este divizibilă și prin diferența : $3375-484 = 2891$.

Observație. — Dacă n este impar, expresia se divide prin 11 156 369.

Problema 6579

Să se demonstreze implicațiile următoare :

a) $x + y = a \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$;

b) $x + y + z = a \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{a^2}{3}$;

c) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n}$.

(*Journal de mathématiques élémentaires*)

Soluția. a) Ținînd seamă de relația $x + y = a$, indentitatea

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\,[(x + y)^2 + (x-y)^2]$$

devine :

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\,(x - y)^2$$

Avem atunci implicația

$$x + y = a \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{2} \qquad (1)$$

$\left(\text{egalitatea avînd loc pentru } x = y = \frac{a}{2}\right)$.

b) Ținînd seamă de relația $x + y + z = a$, identitatea

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}\,[(x + y + z)^2 + (y-z)^2 + (z-y)^2 + (x-y)^2]$$

devine

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{1}{3}\,[(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2].$$

Avem atunci implicația

$$x + y + z = a \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{a^2}{3} \qquad (2)$$

$\left(\text{egalitatea avînd loc pentru } x = y = z = \frac{a}{3}\right)$.

c) *Generalizare.* Dacă presupunem

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$$

identitatea

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{1}{n}\,[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \\ + \ldots + (x_1 - x_n)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2]$$

dă

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{a^2}{n} + \frac{1}{n}\,[(x_1 - x_2)^2 + \ldots \ldots + (x_1 - x_n)^2].$$

Avem deci implicația:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n}. \qquad (3)$$

Altă generalizare. Identitățile:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2,$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bcx - ay)^2 + \\ + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$$

și, mai general, identitatea lui *Lagrange*:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2 + \\ + (a_2 x_1 - a_1 x_2)^2 + (a_3 x_1 - a_1 x_3)^2 + \ldots + (a_n x_1 - a_1 x_n)^2 + \ldots \\ \ldots + (a_n x_{n-1} - a_{n-1} x_n)^2$$

conduc la implicațiile următoare:

$$ax + by = c \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant \frac{c^2}{a^2 + b^2} \qquad (1')$$

$$ax + by + cz = d \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (2')$$

și mai general la inegalitatea *Cauchy — Buniakovski*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = h \Rightarrow x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{h^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2},$$

Observație. Implicațiile (1), (2) și (3) nu sînt decît cazuri particulare ale implicațiilor (1'), (2') și (3').

Interpretare geometrică a implicațiilor (1) și (2'). Să presupunem planul raportat la sistemul de axe ortogonale (Ox, Oy) sau spațiul (Ox, Oy, Oz).

Implicația (1') traduce faptul că patratul distanței de la originea O a coordonatelor la un punct oarecare $M(x, y)$ de pe dreapta de ecuație $ax + by = c$ este superioară sau egală cu patratul distanței de la punctul O la această dreaptă.

De asemenea, implicația (2') exprimă faptul că patratul distanței de la punctul O la un punct oarecare $M(x, y, z)$ al planului de ecuație $ax + by + cz = d$ este superior sau egal cu patratul distanței punctului O la acest plan.

Problema 6615

Numărul total al școlilor profesionale, tehnice și de maiștri din agricultură era, în anul școlar 1962—63, de 361. Știind că numărul școlilor profesionale întrece cu 7 pătratul numărului școlilor de maiștri și cu 4 numărul școlilor tehnice, se cere să se afle numărul școlilor de fiecare fel, care au funcționat în anul școlar 1962—63.

Ion St. Mușat

Soluție dată de *Weinstein Jack*, elev Rădăuți.

Să notăm cu x numărul școlilor de maiștri. Numărul școlilor profesionale exprimat în funcție de x, va fi $x^2 + 7$, iar cel al școlilor tehnice $x^2 + 3$.

Ecuația problemei este:

$$x^2 + 7 + x^2 + 3 + x = 361,$$

sau

$$2x^2 + x - 351 = 0$$

Rezolvînd această ecuație, găsim:

$$x_1 = 13, \quad x_2 = -13{,}5$$

Evident, rădăcina a doua fiind negativă nu convine problemei.

Rezultă deci că în anul școlar 1962—1963, în învățămîntul agricol au funcționat 13 școli de maiștri, $13^2 + 1 = 176$ școli profesionale și $13^2 + 3 = 172$ școli tehnice.

Problema 6661

Dacă numerele întregi a, b, c sînt astfel încît $a^2 + b^2 = c^2$ atunci $a^n + b^n - c^n = \mathfrak{M}(a + b - c)$ și $a^n + b^n - (-c)^n = \mathfrak{M}(a + b + c)$ pentru orice număr n natural. (In legătură cu problema nr. 5704).

Voiculescu Dan, elev București

Soluție dată de *Popa Eugen*, elev, Iași. — Se poate demonstra ușor că relația $a^2 + b^2 = c^2$ implică $a + b + c = \mathfrak{M}2$. Ținînd seama de aceasta putem scrie egalitățile:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2} =$$

$$= \mathfrak{M}(a + b - c)$$

Folosind binomul lui Newton avem:

$$(a + b)^n = a^n + b^n + \mathfrak{M}\, ab = a^n + b^n + \mathfrak{M}(a + b - c)$$

Dar, $(a + b)^n - c^n = \mathfrak{M}(a + b - c)$, așa încît $a^n + b^n - c^n = \mathfrak{M}(a + b - c)$.

Demonstrația dată este valabilă pentru numere întregi pozitive sau negative. Relația $a^2 + b^2 = c^2$ fiind echivalentă cu $a^2 + b^2 = (-c)^2$ deducem:

$$a^n + b^n - (-c)^n = \mathfrak{M}[a + b - (-c)] = \mathfrak{M}(a + b + c).$$

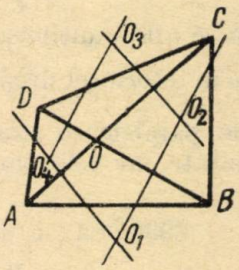
Observare. Dacă particularizăm problema pentru a, b, c numere pozitive și n impar vom găsi $a^n + b^n + c^n = \mathcal{M}(a + b + c)$, ceea ce face obiectul problemei 5704.

Problema E : 2222

Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$, iar O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Să se arate că $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram.

Popa Eugen, elev Iași

Soluția autorului. — Punctele O_1 și O_2 trebuie să se afle pe mediatoarea segmentului OB. Punctele O_2 și O_3 se află pe mediatoarea segmentului OC. Punctele O_3 și O_4 se află pe mediatoarea lui OD, iar O_4 și O_1 pe mediatoarea lui OA. Deci O_1O_2 este mediatoarea lui OB, O_2O_3 a lui OC, O_3O_4 a lui OD, iar O_4O_1 a lui OA. Se vede imediat că O_1O_2 și O_3O_4 sînt paralele, fiind perpendiculare pe BD.



La fel, O_2O_3 și O_4O_1 sînt paralele, fiind perpendiculare pe AC. Deci, $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram, avînd laturile opuse paralele.

Problema E : 2241

Să se arate că dacă : $a + b + c - d = 0$; $a + b - c + d = 0$; $a - b + c + d = 0$ și $-a + b + c + d = 0$, expresia

$$E = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 + 4\,abcd}$$

se reduce în fiecare caz la o constantă, a cărei valoare se cere.
(In legătură cu problema E : 2101).

Popa Eugen elev, Iași

Soluție dată de *Burduja Gheorghe*, cl. VIII S.m. 7 Iași
Să efectuăm produsul :

$$P = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) = [(a + b) + (c - d)][(a + b) - (c - d)][(c + d) + (a - b)][(c + d) - (a - b)] = [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2] = (a + b)^2(c + d)^2 + (c - d)^2(a - b)^2 - (a^2 - b^2)^2 - (c^2 - d^2)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2) + 8\,abcd - a^4 - b^4 - c^4 - d^4$$

În fiecare din cazurile de mai sus avem $P = 0$, deci,

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 + 4\,abcd),$$

așa încît :

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 + 4abcd} = 2, \text{ sau : } E = 2.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date la Olimpiada de matematică — etapa regională 4 aprilie — lucrare scrisă

Clasa a IX-a

6987. a) Să se afle mulțimea valorilor reale ale parametrului variabil m, pentru care ecuația

$$(m+1)^2x^2 - (m^2-1)x + 2 - 3m = 0,$$

are ambele rădăcini reale.

b) Fie $V(a, b)$ vîrful parabolei de ecuație

$$y = (m+1)^2x^2 - (m^2-1)x + 2 - 3m$$

Să se afle mulțimea valorilor parametrului m, astfel ca vîrful $V(a, b)$ să fie în interiorul dreptunghiului cu centrul în punctul $A\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ și cu laturile paralele cu axele de coordonate, laturile paralele cu xx' fiind de o unitate, iar cele paralele cu yy' de 4 unități.

N. Peligrad, Pitești

6988. Să se arate că dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$ avem

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

C. Ionescu-Țiu

6989. Mediatoarea laturei AB a unui triunghi întîlnește latura AC în F, iar mediatoarea laturii AC întîlnește pe AB în D.

a) Să se demonstreze că triunghiul ADF este asemenea cu triunghiul ABC; b) Să se calculeze lungimea segmentului DE.

* * *

Clasa a X-a

6990. Se dau numerele complexe: $z_1 = \frac{1+im}{1-im}$ și $z_2 = \frac{m+i}{m-i}$ unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se arate că imaginile geometrice ale acestor numere complexe se află pe un același cerc cu centrul în originea axelor de coordonate. Să se precizeze poziția acestor imagini față de axele de coordonate.

b) Dacă notăm cu $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ conjugatele numerelor z_1, z_2 să se arate că avem relația

$$z_1^{2n} + z_2^{2n} = \bar{z}_1^{2n} + \bar{z}_2^{2n}$$

Miron Oprea, Ploiești

6991. Se dau două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB = x$ și $\sphericalangle BOC = 2x$ unde $x \leqslant 30°$. Pe latura OB se consideră un punct oarecare M ale cărui simetrice față de laturile OA, OC se notează respectiv cu N, P. Se cere: a) valoarea lui x pentru care avem $\sin(MPN) = \cos(MNP)$; b) Să se arate că în cazul cînd avem $PN = OP + MN$, există relația

$$2(\sin 3x - \sin x) = 1$$

c) Presupunînd $PN > OP + MN$ să se arate că $\sin 4x > \cos x$.

Lucian Mănescu, R. Vîlcea

6992. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A. Pe planul triunghiului în A, se ridică perpendiculara AV. Se unește punctul variabil V cu vîrfurile B, C.

a) Din punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC ducem GM, GN, GP paralele la muchiile VA, VB, VC pînă întîlnesc respectiv fețele VBC, VCA, VAB în punctele M, N, P. Să se stabilească relația:

$$\frac{GM}{VA} + \frac{GN}{VB} + \frac{GP}{VC} = 1.$$

b) Să se arate că această relație este valabilă și în cazul cînd G este un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC.

Ion Sdrulla, Aiud

Clasa a XI-a

6993. Se consideră funcția

$$f(x) = \arcsin \frac{2 - x^2}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}.$$

a) Să se determine domeniul de definiție al funcției; b) Să se calculeze derivata funcției $f(x)$; c) Să se studieze comportarea funcției în vecinătatea punctului de abscisă $x = 0$.

Margareta Boer, Cluj

6994. Se dă un cerc O și tangenta în punctul A la cerc. Din punctul B diametral opus lui A se duce o secantă variabilă D care taie cercul în P și tangenta în Q.

a) Să se arate că perpendiculara dusă pe D prin mijlocul segmentului OP trece printr-un punct fix; b) Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care trec prin punctele O, P, Q; c) Să se afle locul geometric al punctului M de pe D, care satisface relația $\frac{m}{BQ} + \frac{n}{BP} = \frac{m+n}{BM}$, m și n fiind două numere reale, date.

C. Piscati, Craiova

Anul I școli profesionale

6995. O placă de tablă din alamă de forma unui triunghi echilateral cu latura de 42 cm, trebuie despărțită printr-o tăietură paralelă cu una din laturi, într-un triunghi echilateral și un trapez isoscel, de arii egale. Să se afle latura triunghiului echilateral mic.

N. Dumitru, București

6996. În două secții ale unei uzine, planul lunar prevedea fabricarea a 4000 piese. În cadrul întrecerilor socialiste, prima secție a depășit planul lunar cu 12%, iar a doua secție cu 8%. Să se calculeze cît era prevăzut în plan să producă fiecare secție pe lună, dacă după trei luni de la începerea întrecerilor, a doua secție a produs cu 1080 piese mai mult decît prima secție.

* * *

Anul II şcoli profesionale

6997. Un rezervor cilindric culcat (cu generatoarele orizontale) are lungimea de 8 m şi diametrul interior de 2,4 m şi conţine benzină. O vergea gradată arată că adîncimea benzinei este de 1,8 m. Să se afle greutatea benzinei din rezervor, ştiind că greutatea ei specifică este de 0,70 gf/cm^3.

* * *

Anul I şcoli pedagogice şi clasa VIII-a serală

6998. Să se arate că :

a) Expresia $E = (a - b)^2 \cdot (a^2 + b^2) + a^2b^2$ este patratul unui trinom.

b) Prin substituţia :

$$a = \frac{x(x+2)\sqrt{y\sqrt{y}}}{1 + x + yx^2}; \quad b = \frac{(x^2-1)\sqrt{y\sqrt{y}}}{1 + x + x^2}$$

expresia devine $E = y^3$.

Gh. Popescu, Lugoj

6999. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Bisectoarea exterioară a unghiului C întîlneşte bisectoarea interioară a unghiului B în punctul D şi înălţimea din A în punctul E. Să se arate că :

a) Triunghiul ACE este egal cu triunghiul CED; b) $BD < ED$; c) Dacă M este un punct pe dreapta BC diferit de C, triunghiul AEM este isoscel şi $MA + MD \geqslant AC + CD$.

Elena Flondor

Anul II şcoli pedagogice

7000. Se dă ecuaţia $x^2 + 4mx - (m^2 - 1)^2 = 0$, unde m este un parametru real şi se cere :

a) Să se discute natura şi semnele rădăcinilor; b) Notînd cu a şi b rădăcinile ecuaţiei, să se arate că fiecare din ele păstrează un semn constant şi apoi, să se reprezinte pe acelaşi grafic, luînd valorile lui m pe axa absciselor şi ale lui a şi b pe axa ordonatelor.

Lucia Ţene

7001. Se consideră trapezul $ABCD$ în care BC este baza mică. Fie M şi N, respectiv mijloacele bazelor AD şi BC. Paralelele duse prin N la AB şi CD taie baza mare respectiv în punctele P şi Q. Punctele O_1 şi O_2 fiind centrele paralelogramelor $ABNP$ şi $CDQN$, dreapta O_1O_2 taie segmentul NP în punctul R şi segmentul NQ în punctul S. Să se arate că :

a) Patrulaterul $MRNS$ este un paralelogram. În ce caz paralelogramul acesta devine romb şi în ce caz este un patrat?

b) $RS = \frac{AD - BC}{2}$; c) Diagonalele AC şi BD trec respectiv prin punctele R şi S.

Origen Măreulescu, Craiova

Anul I școli tehnice de maiștri

7002. O placă de forma unui trapez $ABCD$ are baza mare AB de 250 m. Diagonala AC face un unghi de 30° cu baza mare, este perpendiculară pe latura BC și este bisectoarea unghiului DAB. Să se calculeze perimetrul plăcii.

* * *

7003. Să se rezolve ecuația irațională:

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=1.$$

* * *

7004. Știind că diametrul unei bare cilindrice este de 6 cm să se afle perimetrul celei mai mari piulițe octogonale regulate care se poate confecționa din această bară, precum și deschiderea unei chei cu care se poate fixa piulița.

* * *

Anul II școli tehnice de maiștri

7005. Înălțimea unui trapez isoscel este egală cu 4 metri. Dacă se rotește trapezul în jurul bazei mari, corpul obținut are aria laterală egală cu $72\pi m^2$ și volumul de $96\pi m^3$. Să se calculeze aria trapezului.

* * *

7006. Fiind dată funcția $f(x)=(x+3)\sqrt{4-x}$, a) Să se studieze funcția și să se reprezinte grafic; b) să se afle panta tangentei la curbă în punctul $x=3$.

* * *

* * *

7007. Dacă n este natural atunci $(2n+1)^{n+2}+(2n+2)^{2n+1}$ se divide exact cu $(2n+1)^2+2n+2$.

Matematica, Sofia, 1963

7008. Se exportă 1500 exemplare dintr-un instrument de tip I și 800 de tipul II. Acest instrument este produs de uzinele A și B. Uzina A produce zilnic 30 exemplare din tipul I sau 20 din tipul II, B scoate zilnic 50 piese din tipul I sau 40 din tipul II. Cum ar trebui planificată în aceste două uzine pentru ca transportul să se facă în minimum de timp?

Wissenschaft und Fortschritt, R.D.G., Berlin 1964

7009. Un comitet internațional este compus din 5 membri și cîte un reprezentant din fiecare dintre cele 5 națiuni. Documentele cu care lucrează acest comitet sînt închise într-o casă de bani. Cîte broaște trebuie să aibă această casă de bani și cîte chei trebuie să aibă acest comitet, sau mai degrabă fiecare din membrii săi, pentru a nu avea acces la documente decît în cazul cînd trei membri din comitet sînt prezenți?

Matematika v skole, Moskova 1964

7010. AB şi CD sînt corzi paralele într-un cerc, AE este o paralelă la BC şi E este situat pe cerc. DE întîlneşte pe AB în F, iar FG este o paralelă la BC, punctul G fiind pe CD. Dovediţi că dreapta AG este tangenta cercului.

(*Eureka, Cambridge, 1963*)

7011. Se consideră transformarea punctuală care într-un reper cartezian ortonormat (coordonate rectangulare) face să corespundă la orice punct $M(x,y)$ punctul $M'(x',y')$ determinat de relaţiile $x'=2x+y-1$ şi $y' = -x+2y+1$.

a) Care este transformarea inversă? Există un punct dublu?

b) Să se arate că transformata dreptei (D) de ecuaţie $y = ax + b$ este o dreaptă (D') a cărei ecuaţie se cere.

c) Punînd $(D, D') = \varphi + k\pi$, să se arate că φ este constant, $\approx k\pi$, cînd a variază.

d) Se presupune $b = 1$. Cum variază (D) şi (D') cînd a variază? Să se găsească locul punctului lor de întîlnire P. Este de preferat o soluţie geometrică.

e) ω fiind punctul dublu al transformării, să se compare ωM şi $\omega M'$ şi să se calculeze unghiul $(\omega M, \omega M')$. Care este transformarea studiată? Să se dea o construcţie simplă a transformatei M' a unui punct dat M, folosindu-se rezultatele de la punctul d).

(*Bacalaureat matematic şi tehnic, Dakar*, iunie 1964

7012. Să se arate printr-o metodă algebrică sau grafică, că mişcarea rectilinie de ecuaţie orară

$$x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\frac{2\pi}{5}t + 2$$

este o mişcare sinusoidală simplă. Să se precizeze centrul de vibraţie, amplitudinea şi perioada. Unităţile folosite sînt centimetrul şi secunda.

(*Bacalaureat Montreal şi New York*, iunie 1964)

7013. În triunghiul ABC, fie A' piciorul bisectoarei vîrfului A, A'' simetricul lui A' în raport cu mijlocul laturii BC, iar B', C' simetricele punctelor în care cercul $AA'A''$ taie laturile AB, AC, în raport cu mijloacele acestor laturi. Să se arate că

$$(AB' + AC')\,(AB + AC) = BC^2.$$

(*Revista matematică din Timişoara, 1935*, C. Ionescu-Bujor)

7014. Cum trebuie să fie m, pentru ca rădăcinile ecuaţiei

$$(2 - m)x^2 - 2mx + m^2 - 3m = 0,$$

să fie, una mai mică decît -1 şi alta mai mare decît 1.

(*Revista matematică din Timişoara, 1935*, N. Abramescu)

7015. Să se arate că coarda comună a două parabole care au aceiași directoare este perpendiculară pe mijlocul dreptei care unește cele două focare.

(Revista din Timișoara, 1935, R. Vîlcovici)

7016. Să se arate că funcțiile

$$y = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2 \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$z = \arcsin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

au aceeași derivată.

(Revista de matematică din Timișoara, 1947, V. Alaci)

7017. Să se calculeze limita expresiei

$$E = \frac{x\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} - 3x + 2}{x\sqrt{x+2} + 14\sqrt{x+2} - 6x - 20}$$

cînd x tinde către 2.

(Revista matematică din Timișoara 1949)

PROBLEME PROPUSE *

7018. Se consideră sistemul:

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2 - 2m,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = m^3 - 3m^2 + 3,$$
$$xyz = 1$$

Să se arate că pentru orice m din intervalul $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ sistemul nu admite soluții astfel încît x, y, z să fie simultan reale.

Traian Cohal, profesor Iași

7019. Să se arate că într-un octogon regulat $ABCDEFGH$ există relațiile

$$MC^2 - MD^2 = MD \cdot MB - MC \cdot ME,$$
$$ME^2 - MF^2 = MD \cdot MF - ME \cdot MG,$$
$$MG^2 - MH^2 = MH \cdot MF - MA \cdot MG,$$

unde M este un punct oarecare pe arcul mic AB.

Antohi Ștefan, student, Iași

7020. Să se rezolve în numere reale:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx) + 8y + 16z - 56$$

Eugen Popa, elev, Iași

---

* IX (7018–7024), X (7025–7030), XI (7031–7038, (S 7039–7047). Soluțiile se primesc pînă la 30 septembrie 1965.

7021. Se consideră perechile de numere (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) astfel ca $x_1 < x_2 < x_3$ și satisfăcînd relația $ax + by = c$, unde $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Să se arate că :

1) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică, atunci și y_1, y_2, y_3 sînt în progrese artimetică și reciproc.

2) Dacă $c \neq 0$ și numerele x_1, x_2, x_3 sînt în progresie geometrică, atunci y_1, y_2, y_3 nu pot fi nici în progresie aritmetică nici în progresie geometrică.

Mircea Craioveanu, student, Iași

7022. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$x^2 y + xy^2 - 2x - 2y - xy = 1$$

Eugen Popa, elev, Iași

7023. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ fix și două cercuri (O_1) și (O_2) tangente în T, unul trecînd prin A și B, celălalt prin C și D. Să se găsească locul geometric al punctului T cînd cercurile (O_1) și (O_2) variază.

Gheorghe Nanu și *D. Brînzei*, Iași

7024. Se dă triunghiul ABC și o dreaptă AD(D pe BC) astfel încît $A_{ADC} = \left(\frac{CD}{AC}\right)^2 \cdot A_{ABC}$; (A_{ADC} = aria triunghiului ADC). Să se arate :

1) $AC^2 = BC \cdot DC$,

2) triunghiul CAD este asemenea cu triunghiul CBA,

3) $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Să se deducă construcția dreptei AD și să se arate că în acest caz proprietățile de mai sus sînt adevărate.

Mihai Cocuz, Prisăcani, Iași

7025. Să se afle soluțiile ecuației

$$\frac{\cos^2 x - m}{\cos^2 \alpha - m} = -\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg} x.$$

Gheorghe Nanu, Iași

7026. Să se găsească toate perechile de numere naturale m, n, nedivizibile simultan prin 3, și astfel ca expresia $m^n + n^m$ să se dividă prin 3. Pentru $n = 2$, să se găsească m, astfel ca E să se dividă prin 7.

Gheorghe Nanu și *Dan Brînzei*, Iași

7027. Să se demonstreze inegalitatea :

$$(n + 1)(n + 2) \leqslant 3\sqrt[n]{(n!)^2(n + 1)}$$

pentru orice n natural.

Mihai Gălățeanu, student, Iași

7028. Să se determine mărimile laturilor unui triunghi dreptunghic știind că verifică o ecuație de forma $x^3 - 12\ x^2 + (50 - \lambda)\ x - 20\ \lambda = 0$, unde λ este un parametru real.

Mirela Ștefănescu, Iași

7029. Un gnomon de lungime l suferă o înclinare laterală față de verticală, rămînînd perpendicular pe meridianul locului.

a) Să se determine diferența dintre umbra gnomonului vertical și cea a gnomonului înclinat, la o dată oarecare, la un loc de latitudine φ în momentul trecerii soarelui la meridian.

b) Care este înclinația maximă admisă ca unghiul dintre umbre să nu depășească o valoare ε_0? (Aplicație 21 martie, $\varphi = 45°$, $l = 100$ cm).

Viorel Vîlceanu, student, Iași

7030. Se consideră ecuațiile :

$$2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$m(m-1)x^2 + 2(m^3 + m^2 + 1)x + m^3 + m + 1 = 0$$

a) Să se arate că cea de-a doua ecuație admite rădăcini reale și distincte pentru orice valoare a lui m.

b) Să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile celor două ecuații se separă.

Traian Cohal, profesor, Iași

7031. Să se afle toate valorile lui x pentru care funcția $f(x) = \sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x)$ admite valori extreme.

Eugen Popa, elev, Iași

7032. Un trapez înscris într-un cerc are baza mică AB fixă și văzută din centrul cercului sub un unghi constant de 2α (ascuțit). Să se determine înălțimea trapezului cînd aria devine maximă.

Kurta Ferenc, student Iași

7033. Să se determine m, n astfel ca :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{mx^3 + (n+2)\,x^2 + 1} - \sqrt[3]{nx^3 + 2x^2 - 3}\right) = 1$$

și p,q astfel ca :

$$\lim_{x\to\infty}\left(p + \frac{qx}{x^2 - 1}\right)^x = e^2.$$

Ioana Iancu, studentă, Iași

7034. Un automobil pleacă din localitatea A spre B situată la distanța de L kilometri. După o oră de la plecare are o pană pe care o înlătură în 20 de minute, după care pornește din nou cu viteza de 50 de kilometri pe oră și ajunge după două ore în B. Cu 20 de minute înainte ca acest automobil să fi plecat, un alt automobil pleacă din localitatea B spre A cu viteza de 75 km/h, ajunge într-o localitate C situată între A și B la 150 km de B. După ce încarcă niște lăzi timp de 30 de minute se

întoarce înapoi în B cu aceeaşi viteză. Se cere : să se exprime distanţa între cele două automobile ca funcţie de timp, să se arate că această funcţie este continuă, dar nu este derivabilă în toate punctele.

C. C. Ilioi, Iaşi

7035. Se consideră în mulţimea R a numerelor reale următoarea lege de compoziţie : $a \ast b = e^{a+b}$.

a) Această lege este definită pentru întreaga mulţime a numerelor reale? Este comutativă? Să se arate că în general această lege nu este asociativă.

b) Să se arate că oricare ar fi numerele reale a şi c, $a < c$ există totdeauna cel puţin un număr real b, $a < b < c$ astfel încît :

$$(a \ast b') \ast c = a \ast (b' \ast c), \text{ unde } b' = -b.$$

Să se verifice de asemenea că $(a \ast b)\ a = a\ (b \ast a)$, oricare ar fi numerele reale a,b.

c) Să se arate că pentru fiecare număr real pozitiv a există un număr real negativ $\bar{a}$, astfel ca $a \ast \bar{a} = a$. Să se dovedească apoi că orice număr real a admite un număr a' astfel încît $a \ast a' = 1$.

d) Să se rezolve şi să se discute ecuaţia $a \ast x = b$.

e) Să se rezolve ecuaţia $x \ast 3 \ast x = e^{-2}$.

Mircea Craioveanu, student, Iaşi

7036. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi se iau în acelaşi sens punctele D,E,F care împart laturile în raportul $1/3$ şi simetricele lor faţă de mijloacele laturilor pe care sînt situate, D', E', F'. Segmentele AD, BE şi CF se taie două cîte două în punctele K, L, M. Să se arate :

a) Triunghiurile ABC, DEF, $D'E'F'$, KLM au acelaşi centru de greutate şi că noţiunea de centru de greutate a unui triunghi este o noţiune afină. *b*) $MK = 2AM = 8KD$.

D. Rimer, Iaşi

7037. Să se arate că dacă $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$, avem :

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) - x^7 - y^7 - z^7 = 6z^2y^2z^2(x + y + z),$$

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^5 + y^5 + z^5) - x^8 - y^8 - z^8 = 3x^2y^2z^2(x + y + z)^2,$$

C. Ionescu-Ţiu

7038. Fie AB şi CD, doi diametri ficşi perpendiculari ai unui cerc oarecare (O) şi M un punct variabil pe acelaşi cerc. Notăm cu N piciorul perpendicularei din M pe AB. Dreapta NBD şi paralela din C la AB se taie în P. Se cere locul geometric descris de punctul G, centrul de greutate al triunghiului MNP.

C. Săndulache, Negreşti, Iaşi

7039. Dacă $|a| > 1$, să se demonstreze că :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{a^n} = \frac{a^2 + ab - b}{(a-1)^2}.$$

Mocanu H. Ovidiu, student, Iaşi

7040. Fie o sferă S şi Γ un cerc mare al său, cu diametrul AB. Pe planul cercului se ridică o perpendiculară în A şi se ia un punct F pe această perpendiculară. Să se arate că :

a) M fiind un punct mobil pe cercul Γ, dreapta FM se află în planul perpendicular pe MB în punctul M ; *b*) Cînd M descrie cercul Γ proiecţia punctului A pe dreapta FM descrie tot un cerc al cărui diametru este AC, punctul C fiind intersecţia dreptei FB cu sfera dată ; *c*) cercul obţinut la punctul *b*) se află pe sfera S.

Lucia Ţene

7041. Se consideră mulţimea perechilor de numere reale (a,b) pentru care $a \neq 0$, $a + b \neq 0$. Două perechi (a,b) şi (c,d) sînt egale numai dacă $a = c$ şi $b = d$. Se defineşte operaţia $*$ astfel : $(a,b) * (c,d) = (ac \cdot ad + bc \cdot bd)$. Să se demonstreze :

1. Operaţia $*$ este comutativă şi asociativă.
2. Există element neutru (unitate).
3. Fiecare element (a, b) admite un invers.

Lidia Cohal, profesoară Iaşi

7042. Să se găsească toate matricele pătratice de ordinul al doilea care verifică ecuaţia $X^2 = X$. Să se arate că o matrice X este soluţie dacă şi numai dacă $I - X$ este soluţie $\left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Să se arate că, dacă X_1 şi X_2 sînt soluţii, atunci $X_1 + X_2$ este soluţie dacă şi numai dacă $X_1X_2 = X_2X_1 = 0$, unde $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(A se vedea articolul „Matrice" de I. Hitzig din G. M. seria B nr. 7/1964).

N. Gheorghiu, Iaşi

7043. Să se studieze mişcarea rectilinie definită prin ecuaţia orară

$$x = 2t^3 - 6t^2 + 6t, \qquad (t \geqslant 0).$$

a) Să se construiască diagrama acestei mişcări ; b) Să se spună în ce sens se face mişcarea şi la ce moment este accelerată sau întîrziată.

(Bacalaureat, Dakar, iunie 1964)

7044. Fie funcţia

$$y = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1},$$

unde ln x reprezintă logaritmul neperian din x.

a) Pentru care valori ale lui x funcția y este definită? b) Să se calculeze derivata lui y în raport cu x; c) Să se rezolve ecuația $y = 3$; d) Să se calculeze valoarea lui x care anulează pe y.

(Bacalaureat, Maroc, iunie 1964)

7045 Să se determine modulul și argumentul lui.

$$z = \frac{1+i}{1-i}.$$

Să se calculeze $u = z^{32}$.

(Bacalaureat de matematici elementare, Antille, iunie 1964)

7046. Se dă reperul ortogonal xOy; unitatea de lungime este 2 cm.

a) Să se găsească pe cale geometrică și să se construiască curba de ecuație $y = \sqrt{x.|x-1|}$, unde $|x-1|$ reprezintă valoarea absolută a numărului $x-1$.

b) Fie m un număr pozitiv dat; să se discute, după valorile lui m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\sqrt{x.|x-1|} - m = 0$. Să se rezolve ecuația pentru $m = 1/2$.

(Bacalaureat de matematici elementare, Franța, 1964)

7047 *a*) Să se verifice relația:

$$\frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1} = 2\cos a - 1. \qquad (1)$$

b) Să se aplice această relație la calcularea sumei:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \ln\left(2\cos\frac{a}{2^i} - 1\right),$$

în care a reprezintă un unghi astfel ca $0 < a < \frac{\pi}{3}$ și n un întreg aritmetic.

c) Să se determine limita sumei S cînd n crește nedefinit.

(Journal de mathématiques élémentaires, Franța 1964)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII *

E: **2336**. La o librărie s-au adus mărfuri cuprinzînd: caiete de 1,10 lei bucata, creioane a 0,85 lei bucata, stilouri de 65 lei bucata și coli de hîrtie albastră a 0,30 lei bucata, în valoare totală de 9865 lei. Știind că s-au adus de $4\frac{4}{5}$ ori mai multe caiete decît creioane, de 5 ori mai multe creioane decît stilouri, de 10 ori mai puțin stilouri decît coli de hîrtie albastră, să se determine cîte caiete, cîte creioane, cîte stilouri și cîte coli de hîrtie albastră au fost aduse.

Dumitru Vlașcu, student Iași

* V (E: 2336–2337), VI (2338–2342), (VII (2343–2346), VIII (2347–2353). Soluțiile se primesc pînă la 30 septembrie 1965.

E : **2337**. Termenul mediu de dare în folosinţă a unui bloc mijlociu este de 6 luni, din care $\frac{1}{9}$ pentru săpături şi fundaţii, 50% pentru zidărie iar restul pentru celelalte lucrări. Intrebuinţînd metode noi de muncă şi prefabricate timpul reduce ca 10% la săpături şi fundaţii, şi cu 20% la celelalte lucrări. În cît timp poate fi dat în folosinţă un bloc în aceste condiţii?

Dorin Moisă, profesor Iaşi

E : **2338**. Planul de stat prevede ca producţia globală de cereale pînă în 1965 să fie de 16.10^6 tone din care 35% grîu iar porumb cu 3.10^6 tone mai mult. Care va fi producţia de grîu şi porumb prevăzută pentru această perioadă?

Dorin Moisă, profesor Iaşi

E : **2339**. O ţesătoare lucrează la patru războaie automate şifon, la trei zefir, la unul pînză albită şi produce în total în 8 ore 188 m. Ştiind că la un război se poate ţese zefir cît $\frac{3}{4}$ din numărul metrilor de pînză albită, iar şifon cît $\frac{7}{8}$ din numărul metrilor de zefir, să se afle cîţi metri de şifon, zefir, pînză albită produce ţesătoarea în 8 ore.

Gh. Buga, profesor Iaşi

E : **2340**. În paralelogramul $ABCD$ se duc diagonalele AC şi BD, care se întîlnesc în O, Să se arate că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA sînt vîrfurile unui romb.

Gh. Buga, profesor, Iaşi

E : **2341**. Două camioane pleacă la aceeaşi oră din două localităţi A şi B unul către celălalt, întîlnindu-se la $6\frac{2}{5}$ km de localitatea B. Dacă primul ar fi plecat cu $\frac{1}{12}$ ore mai tîrziu şi al doilea cu $\frac{1}{8}$ ore mai devreme s-ar fi întîlnit la $6\frac{2}{5}$ km de localitatea A. Care sînt vitezele celor două camioane şi care este distanţa dintre cele două localităţi?

Valeria Nicola, prof. Prisăcani, Iaşi

E : **2342**. Să se calculeze unghiul format de două bisectoare ale unghiurilor opuse ale unui patrulater oarecare, în funcţie de unghiurile patrulaterului. Să se găsească în ce condiţii bisectoarele sînt paralele, precum şi în ce caz ambele perechi de bisectoare sînt paralele.

* * *

E : **2343.** Se topesc împreună două aliaje de aur şi argint obţinîndu-se un aliaj în greutate de 108 kg şi cu titlul de $20\frac{2}{9}$ carate. Ştiind că $\frac{3}{11}$ din aurul primului cîntăreşte cît $\frac{5}{4}$ din argintul celui de al doilea cîntăreşte cît $\frac{4}{9}$ din argintul primului aliaj, să se afle titlurile celor două aliaje.

Valeria Nicola, prof. Prisăcani, Iaşi

E : **2344.** Un pionier vrea să determine aria unui teren dreptunghiular măsurînd cu paşii laturile sale. Cînd socoteşte că pasul are 80 cm^2 găseşte că aria este cu 180 m^2 mai mare decît atunci cînd socoteşte că pasul său are 70 cm. Dacă pe una din laturi ar fi măsurat cu 20 de paşi mai puţin diferenţa care ar fi apărut în socotelile sale ar fi fost doar de 90 m^2. Să se afle cîţi paşi ar fi făcut dacă ar fi dorit să măsoare diagonala dreptunghiului.

Dan Brînzei, Iaşi

E : **2345.** O cadă este alimentată de două robinete : prin unul curge apă la 15°C, prin celălalt la 60°C. Dacă robinetele sînt deschise amîndouă apa din cadă este la 30°C. Dacă primul robinet umple cada într-o oră, în cît timp vor reuşi să o umple amîndouă?

Dan Brînzei, Iaşi

E : **2346.** Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) înălţimea din M a triunghiului AMC unde M este piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC, trece prin mijlocul medianei AN a aceluiaşi triunghi ABC. Ce se poate spune despre unghiurile triunghiului ABC.

* * *

E : **2347.** Să se descompună în produs de factori expresia :

$$(x+2y+3z)(2x-y-z)(y+2z+3x)+(y+2z+3x)(2y-z-x)(z+2x+3y)+(z+2x+3y)(2z-x-y)(x+2y+3z).$$

Dumitru Cojocaru, student Iaşi

E : **2348.** Se dau cercurile O de rază r şi O' de rază R. Se duce tangenta comună TT'. Fie A intersecţia tangentei comune cu linia centrelor, iar B intersecţia cercului de rază r cu OO'.

a) Ştiind că $OO' = 2r$ să se arate că $\sphericalangle TAB = 30°$; *b*) aria $AT'O' = 2r^2\sqrt{3}$.

G. V. Nistor, Buzău

E : **2349.** Să se demonstreze că orice număr impar neterminat prin 5, admite un multiplu scris numai cu cifra 9. Aplicaţie : Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $13x = 999\ldots9$.

Corneliu N. Popescu, Bucureşti

E : **2350**. La începutul anului 1965, în regiunea Iaşi erau în învăţământul elementar şi mediu cu 6203 mai multe cadre didactice decît medici. Ştiind că 10% din numărul cadrelor didactice mărit cu 20% din numărul medicilor dă 995, să se calculeze : a) Numărul de cadre didactice şi de medici din regiunea Iaşi, la începutul anului 1965 ; b) Cu cît la sută a crescut numărul de medici din regiunea Iaşi din 1950 şi pînă azi, dacă atunci în regiunea Iaşi erau 313 medici?

I. Munteanu, profesor Vaslui

E : **2351**. Din punctul M se coboară perpendicularele MA şi MB pe laturile unui unghi fix xOy. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care dreptele OM şi AB sînt perpendiculare.

Radu Gheorghe, student Iaşi

E : **2352**. Să se arate că expresia :

$$E = mn\,(mn - 9) + 2\,(m^2 + n^2) + (m - n)\,(3mm - 6)$$

se divide prin 4 pentru orice m, n întregi.

Ioan Robilă, student Iaşi

E : **2353**. Să se scrie numărul 1965 folosind toate cifrele 2, 3, 4, 7, 8, 0, o singură dată şi folosind doar operaţiile de adunare şi scădere.

Eugen Popa, elev Iaşi

REZULTATUL OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ 1965

Lista elevilor evidenţiaţi la etapa finală

PREMIUL I. *Lungulescu Bogdan, cl. IX, şc. m. 1 Piteşti ; Steriu Dan, cl. X şc. m. Ploieşti ;Farkaş Petru, cl. X şc. m. Cluj ; Căpăţînă Valeriu, cl. X şc. m. Roman.*

PREMIUL II. *Gavrilă Şerban, cl. IX şc. m. 1 Buzău ; Ralescu Dan, cl. IX şc. m. 12 Bucureşti ; Bădescu Alexandru, cl. X şc. m. 2 Ploieşti ; Radu Magda, cl. X şc. m. 3 Sibiu ; Profeta Horia, cl. X şc. m. 32 Bucureşti ; Teodorescu Valentin, cl. X şc. m. 11 Bucureşti ; Bîscă Octavian cl. XI şc. m. 1 Craiova ; Ştefănescu Saba Ioan, cl. XI şc. m. 1 Bucureşti.*

PREMIUL III. *Sava Petru, cl. IX şc. m. Făget ; Voiculescu Dan, cl. IX şc. m. 21 Bucureşti ; Popa Eugen, cl. IX şc. m. 3 Iaşi ; Bontaş Vasile, cl. IX şc. m. 4 Braşov ; Vasile Eugen, cl. IX şc. m. Călăraşi ; Bîzu Marius, cl. X şc. m. 1 Ploieşti ; Laza Miron, cl. X şc. m Beiuş ; Vişan Ştefan, cl. X şc. m. 2 Ploieşti ; Chiţescu Ioan, cl. XI şc. m. 10 Bucureşti ; Weinstein Jack, cl. XI şc. m. 2 Rădăuţi ; Heilpern Andrei, cl. XI şc. m. Cluj ; Ungureanu Gheorghe, anul II şc. prof. electromagnetica Bucureşti.*

MENŢIUNI. *Niculescu Ştefan, cl. IX şc. m. 3 Tîrgovişte ; Mignea Arminius, cl. IX şc. m. 2 Ploieşti ; Apşan Dan, cl. IX şc. m. 3 Baia Mare ; Rubinştein Magda, cl. IX şc. m. 1 Piteşti ; Mihnea Andrei, cl. IX şc. m. 5 Bucureşti ; Manolache Nicolae, cl. IX şc. m. 5 Bucureşti ; Popescu Constantin, cl. IX şc. m. 1 Tr. Severin ; Petrescu Andrei, cl. IX şc. m. 13 Bucureşti ; Acu Mihai, cl. X şc. m. Cluj ; Rugină Andrei, cl. X şc. m. Roman ; Cercel Liviu, cl. X şc. m. 1 Bucureşti ; Albescu Ioan, cl. X şc. m. 1 Sibiu ; Zăgan Dumtiru, cl. X şc. m. Sibiu ; Bucur Liliana, cl. XI şc. m. 3 Sibiu ; Ilisei Florin, cl. XI şc. m. 1 Ploieşti ; Nicolescu Constantin, cl. XI şc. m. 3 Tîrgovişte ; Chivu Ileana, cl. XI şc. m. 12 Bucureşti ; Turinici Mihai, cl. XI şc. m. 1 Rădăuţi ; Zotescu Cornel, anul I şc. electroputere Craiova ; Sipoş Gheorghe, anul I şc. prof. Tg. Mureş ; Anghel Ştefan, anul I şc. prof. Tîrgovişte.*

CĂRȚI NOI

1. **Probleme actuale de matematică** — vol. III (conferințe ținute la cursurile de vară pentru profesorii de matematică, Săcele 1963), Biblioteca Societății de științe matematice din R.P.R. nr. 69, Editura didactică și pedagogică, 1965.

În continuarea lucrărilor cu același titlu, a apărut vol. III care cuprinde — sub o formă revizuită și în parte amplificată — conferințe ținute la cursul de vară de la Săcele, pentru profesorii de matematică, din iulie 1963. Volumul urmărește să informeze asupra unor domenii actuale de cercetare matematică (ca teoria așteptării), de aplicații în diferite domenii (biologie, studiul ecuațiilor funcționale) dar și asupra unor aspecte ale dezvoltării matematicilor clasice fie în direcția geometriilor neeuclidiene„ fie al elementelor de topologie ilustrate prin studiul poliedrelor regulate și semiregulate, În volum sînt cuprinse și lucrări care dezbat probleme actuale ale ciberneticii cu implicații asupra învățămîntului sau considerațiuni legate de studiul noțiunii de funcție în școala medie pornind de la puncte de vedere moderne în matematică.

Volumul cuprinde: Elemente de teoria așteptării, de acad. Gh. Mihoc și conf. univ. G.Ciucu: Omul și automatele, de acad. O. Onicescu. Biomatematica, de conf. univ. T. Postelnicu; Cîteva observații privind predarea noțiunii de funcție în școala medie, de prof. univ. Adolf Haimovici; Metoda aproximațiilor succesive și cîteva aplicații în studiul ecuațiilor funcționale, de conf. univ. C. Corduneanu; Geometria lui Lobacevski, de prof. univ. Tiberiu Roman.

2. **S. Guiașu, R. Theodorescu,** „Matematica și informația", Editura științifică, 1965.

Teoria informației este un domeniu nou și totodată dintre cele mai importante din punctul de vedere al numeroaselor sale aplicații. Născută din necesitatea modelării matematice a transmisiei informației, ea s-a impus rapid, devenind un instrument de cercetare indispensabil și deosebit de eficace.

Lucrarea „Matematica și informația" reprezintă o prezentare accesibilă a teoriei informației cu respectarea rigorii matematice, începînd cu unele aspecte de natură istorică și terminînd cu termenele de codificare și cu cîteva aplicații. Prin felul în care a fost concepută, ea se adresează unui public foarte larg, începînd cu elevul doritor să-și lărgească orizontul său matematic.

Lucrarea cuprinde: I. Un nou domeniu al matematicii: Teoria informației. II. Probabilitatea. III. Entropia. IV. Transmiterea informației. Codificarea. VI. Cîteva aplicații ale teoriei informației. VII. Automate aleatoare.

3. **O. Sacter „Culegere de probleme de matematici"** ediția IV-a, Editura tehnică, 1965. Această ediție, a patra, revăzută și adăugită conține probleme date la examenele de admitere în institute și facultăți între anii 1957—1964. Ea cuprinde probleme de algebră, geometrie, trigonometrie, geometrie analitică și analiză, grupate pe discipline, și separat probleme de sinteză.

Problemele corespund tuturor gradelor de dificultate: ușoare, grele și foarte grele.

Rezolvîndu-le, cititorii parcurg teoremele importante din matematica predată în școlile medii de cultură generală și capătă îndemînare pentru rezolvarea altor probleme asemănătoare.

Lucrarea se adresează elevilor din ultimele clase, candidaților, la examenele de maturitate și la examenele de admitere în învățămîntul superior.

RUBRICA REZOLVATORILOR DE PROBLEME

(urmare, soluții bune primite pînă la 1 martie 1965)

BUCUREȘTI. *Șc. 8 ani V. Alecsandri* cl. VIII. Nastase Adrian (E: 2198, 99, 201—03, 05—18), Paraschiv Doru (E: 2215—19, 21, 27, 28, 33, 36, 38, 43, 45).

Absolvenți: Matei Maria (E: 6666, 70—77, 80, 82, 95, 96), Pătrășcanu Dimitrie (6581, 83, 85, 86, 89, 90, 628, 48, 67, 70, 73, 74, 77, 85, 703). Căpitan Pupăzan N. (6641, 46, 59, 70, 71—78).

Ș. m. 1. N. Bălcescu cl. IX. Adrian Șorin (E: 2228, 36, 37, 61, 63; 6601, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80), Brăileanu Ana (6503, 10, 16, 18, 19, 25, 26, 38, 39, 44), Hahn Radu (E: 2228, 31, 36, 37, 41, 60, 68; 6585, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80), Sbîrnea Mihai (E: 2228, 29, 37, 45; 6582—85, 99, 601, 09, 15). Cl. X. Jiletcovici Iulian (6580, 82, 86, 87, 607, 30, 33, 44, 63, 66, 70—78).

Ș. m. 2 cl. X. Nicolae Dan (6670, 71, 73, 74, 76, 77, 82, 95, 97, 720, 22, 35). *Ș. m. 3* cl. VIII. Nicolescu I. Nicolae (E: 2210, 13,

15—18, 20, 32, 33, 43). Cl. X. Popescu I. Mihail (6582, 86, 609, 15, 44, 70, 71, 73—77, 80). Cl. XI. Teodorescu Dumitru (6581, 83, 88, 609, 15, 28, 37, 70, 71, 73, 75—77). *Ş. m. 5* cl. VII. Bucur Ion (E : 2213, 16—18, 20, 24, 32), Cosma Gh. (E : 2213, 15, 16, 18, 32, 33, 42, 43), Vasilescu Paul (E : 2220, 23, 25, 33, 38, 40, 42—44, 47, 64), Panaitescu Magdalena (E : 2220, 23, 25—29, 31, 32), Stănculescu Alexandru (E : 2213, 15—18, 33, 38, 47). Cl. VIII. Popescu Adina Cristina (E : 2220, 22, 27, 32, 33, 36, 38, 42, 43, 47), Şerbănescu Monica (E : 2220, 22—27, 31, 32), Zamfirescu Alexandru (E : 2227—24, 26, 31, 32, 36, 48, 50, 51, 55, 59, 63). Cl. IX. Tun Marilena (E : 2209, 19, 28, 30—32; 6528, 29, 54, 63, 99, 615). Cl. XI. Steriu Ştefan (6549, 51, 53—72, 74, 77—79).

Ş. m. 6 cl. VII. Weiner Irina (E : 1199, 200, 06, 10, 11, 13—18, 20—25, 27, 31, 32) Cl. X. *Gheorghiu Doina* (6630—32, 35, 43, 44, 46, 56, 59, 60, 63, 66—68, 70—78, 80, 81, 83, 85, 88, 92, 93, 96, 98, 700, 07, 20, 22, P).

Ş. m. 7 cl. V. Brădeţeanu Mihaela (E : 2197, 98, 206, 10, 16, 24, 26, 32). Cl. VIII. Mateescu Alexandru (E : 2190—203, 06, 11, 13, 15, 17—19), Nichita Anca (E : 2220, 27, 28, 32, 35, 36, 40, 43, 45, 47), Popa Radu (E : 2220, 23, 24, 27, 32, 33, 35, 42, 46, 47). Cl. IX. Badea Victor (E : 2228, 31, 36, 37; 65554, 59, 60, 71, 99, 615, 39, 57).

Ş. m. 8 cl. VI. Antonescu Monica (E : 2210, 15, 16, 19, 20, 32, 43, 45).

Ş. m. 10 cl. VI. Gafiţa Gabriel (E : 2220, 32, 33, 40, 42, 43, 48, 50, 53, 59). Cl. VIII. Tigoiu Victor (E : 2205, 08, 11—14, 28, 1). Cl XI *Chifescu Ion* (65, 25, 26, 28, 31, 32, 3136, 40, 41, 44, 45, 47—49, P. N; (6649, 54, 59—63, 66, 67, 75, 77, —79, 82, 85, 90, 92, 95—700, 01, 07—09, 16, 17, 21, 23).

Ş. m. 11 cl. IX. Andrei Ion (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45, 60, 63, 601, 09, 15, 70), *Bădescu Constantin* (E : 2203, 07, 09, 28—31, 36, 37, 41, 45, 60—64; 6504, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25—27, 32, 36, 38, 39, 44, 54, 57, 58, 60, 61, 63, 67, 71, 72, 80, 82—88, 96, 99, 601, 05, 09, 15, 18, 24, 25, 31, 32, 34, 39, 42, 44, 46, 49, 57, 66, 67, 70—77, 80, 81, 85, 95, 98), Delimat Ion (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45, 60, 63; 6601, 09, 15, 70, 73, 76), Iorga Florica (E : 2228, 36, 37, 41, 45, 60—63; 6599, 601, 46, 70, 73, 76), Pascaru Aurel (E : 2212, 28, 31, 36, 37, 45; 6561, 69, 71, 83—86, 88, 96, 99, 601, 09, 15, 39, 46, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80). Cl. X. Teodorescu Valentin (6582—88, 96, 601, 05—07, 09, 15, 16, 31, 34, 36, 44, 46, 63), Vasiliu Şerban (6500, 07, 10, 16, 19, 22, 25—28, 32, 34, 36, 54, 58, 61, 65, 67, 72 80, 83—86, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 10, 5). Cl. XI. Bunea Corneliu (6504, 25, 26, 29 70, 71, 74, 82, 84—86, 88, 601, 05, 09, 15).

Ş. m. 12. cl IX. *Ralescu D. Andrei* (6443, 44, 57, 59—63, 70, 71, 82, 86, 89, 506, 10, 11, 14, 16, 18, 21, 24—27, 53, 57, 67, 79, 80—90, 92, 97, 601, 05. 06. 09, 14, 34, 39, 46, 48, 49, 57, 61, 63, 66, 67, 70—77, 80—83, 85, 92, 98, 700, 01, 03, 10, 11, 13, 15, 16, 20, 22—25, 31, 35, 47, 48, E : 2221, 22, 34, 36, 37, 45, 61, 63, 64, 78, 80, 0) cl. X. Drăgoi Nicolae (6583—86, 96, 601, 07, 09, 15, 21, 70, 71, 73, 76, 80). Cl. XI. Kivu Ileana (6580, 82—84, 8 —88, 97, 99, 01, 05, 17, 09, 11, 15, 19, 23, 30—36, 41—43 48, 56, 62, 67, 69—77, 80—82, 85, 88, 96, 703, 06).

Ş. m. 13 cl. X. Bodeanu Marlen (6670, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 95, 720, 22, 36), Coşereanu Liana (6670, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 95, 715, 20, 22, 36), Hobincu Mihaela (6670, 71, 73, 74, 76, 79—81, 715, 20, 22, 26 36), Popescu Iulomiţa Cristian (6587, 99 601, 30, 39, 53, 65, 74, 715, 20, 24, 30, 38),

Ş. m. 17 cl. X. Boiangiu Teodor (6554. 56, 58, 59, 79, 82—84, 601, 09, 15, 39, 44), Botez Dan (6580—85, 87, 88, 96, 99, 605, 07, 13, 15, 44, 46), Oteteleşanu Şerban (6580, 83, 86, 97, 601, 07, 09, 15, 22, 31, 46, 70—75, 77, 78, 81), Shaffer Silviu (6549, 51, 56 60, 71, 79, 93—88, 99, 601, 05, 09, 10, 15, 27, 31—34, 39, 41—44, 46, 56, 61—63, 65). cl. XI Cremer Petea (6580, 82, 86—88, 97, 601, 05, 09, 15, 44, 59, 60, 70, 706). *Almer David* (6554, 56, 60, 65, 68, 80—86, 86, 87, 96, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 15, 16, 18, 29, 31, 32, 34, 37, 44, 46, 48, 66, 67, 70—77, 80—83, 85, 96) Neagu Sorin (6580, 82, 85, 86, 97, 601, 05, 09, 10, 31, 34, 44, 55, 59),

Ş. m. 18. cl. IX. Gheorghiu Radu (E : 2228, 36, 37, 61, 63, 64, 81, 86, 601, 15, 07, 76, 98). *Ş. m. 19.* cl. X. Ilie C. Romeo (6580, 83—85, 609, 15, 63, 70, 71, 73, 74, 76, 77). *Ş. m. 20*, cl. IX. Negoiţă Gh. Mircea (E : 2231, 36; 6596, 99, 601, 05, 09, 15, 18, 39, 46, 49, 53, 63). Cl. X. Herling Mihail (6580, 82—86, 88, 601, 05, 07, 09, 15, 16, 18, 27, 30, 31, 34, 36, 41, 42, 63, 66, 67, 70—78, 80, 82). Cl. XI. *Diaconescu A. Nicolae* (6 03—36, 3840, 4247), Rogoveanu Sorin (6551, 55, 61, 63, 65, 66, 80, 82, 84—87, 601, 09, 15). *Ş. m. 21* cl. IX. Singer Claude (6583, 84, 86, 96, 601, 09, 15, 70, 76, 77; E : 2228, 36, 61, 63) *Voiculescu Dan* (6651—700,N,P)

Ş.m.22 cl. IX. Cristoloveanu Sorin(E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45; 6561, 63, 80, 83, 85, 86, 601, 09, 15, 49, 65). Cl. X. Velichi Stela (6580 82—84, 86, 601, 05, 09, 31, 32, 34, 35).

Ş. m. 23 cl. VIII. Georgescu Maria (E : 2210, 11, 13, 16—29, 32). Cl. X. Băluţă Tudor (6583, 99, 601, 09, 15, 19, 70, 71, 73, 76, 77, 80, 84, 85), Dorobanţu Gheorghe (6670, 73, 76, 77, 80, 85, 91, 92, 95, 98, 720, 22, 35), Căpăţînă At. Aurel (6580, 83, 84, 609, 15, 63, 70, 71, 73, 74 76, 77), Zaharia Dragoş (6580, 82—88, 899, 615.

80, 720, 24). Cl. XI. Atanasescu Gabriela (6583, 86, 97, 601, 05, 34, 66, 68, 70, 71, 73—77. 95), Bădescu Dumitru (6523, 25—27, 31, 34, 36, 45, 61, 63), Hreamătă Maria (6580, 82—86, 601, 05, 09, 31, 32, 34, 34, 44), Mirean Marius (6580, 82—88, 99, 601, 05, 09, 15, 28, 30, 31, 34, 36—40, 48, 55, 66—68, 70—78, 80, 85, 98). *S. m. 24* cl. VII. Frişer Puşa (E : 2220, 25, 33, 38, 42, 43, 47, 48, 52, 58). *S. m. 25* cl. IX. Adam Nic. Silviu (E : 2229, 36, 37, 45, 61, 63; 6583, 70, 73, 74, 76), Amzulescu Marieta (E : 2236, 37, 41, 61, 63; 5686, 49, 74, 77, 716, 20, 22), Florescu Dan (E : 2219, 28, 29, 36, 37m 45, 61; 6573, 615, 83, 70, 73), Luca Radu (E : 2260, 61, 63; 6583, 96, 99, 670, 74, 76, 77, 81, 720, 22), Parmuş Amalia (E : 2260, 61, 63; 6599, 649, 70, 74, 76, 77, 81, 82, 76, 77), Rădulescu Nicolae (E : 2231, 36, 37, 45, 61, 63; 6583, 70, 73, 74, 76, 77). Cl. X. Dumitru Silviu (6615, 16, 48, 61, 74—77, 80, 81, 92, 95). *S. m. 26 Al. I. Cuza* cl. IX. Cotariu Roland (E : 2212, 19, 28, 29, 36, 37, 45; 6554, 63, 69, 71, 601, 09, 15, 46, 53), Stoica Valentin (E : 2228, 31, 36, 37; 6554, 62, 71, 83—86, 96, 99, 601, 09, 15). *S. m. 28* cl. VII. Arsene Vladimir (E : 2215—18, 20, 22, 32—34, 40, 42, 43, 46—48, 58), Ceuca Dan (E : 2220, 24, 27, 32, 33, 42, 43, 47, 58), Constantin Petru (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 22, 31—33, 35, 36, 38, 40, 42, 43), Vasiliu Gheorghe (E : 2222, 25, 33, 34, 42, 46—48), Mureşan Mihaela (E : 2210, 13, 20—22, 25—28, 303—33, 35—40, 42—50, 54, 57, 58, 61, 63; 6554, 63, 99, 615, 49). Cl. VIII. Vaida Vera (E : 2210, 15—18, 20, 22, 32), Vasilescu Vera (E : 2228, 36, 37, 45, 61, 63,; 6673, 76). Cl. IX. Plisca Gratian (E : 2219, 28, 31, 36, 37, 41, 45; 6560, 63, 83, 601, 09, 15, 95), Licucescu Traian (E : 2228, 36, 37, 41, 59, 63, 77, 78; 6615, 70, 76, 720, 22). Cl. X. Benedect Stefan (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 23, 26, 61, 63, 601, 09), Iacob Andrei (6583, 605, 09, 15, 36, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80—82, 97).

S. m. 30 cl. VIII. Cismaş Dumitru (E : 2211, 15, 17, 22, 25, 26, 32; 6554, 61, 62, 601, 15).

S. m. 32 cl. VI. Dumitrescu Anca (E : 2210, 13, 15—18, 20, 25, 26, 27, 31—33, 35, 38, 40, 42, 43), Popobvici KLiviu (E : 2198, 200—02, 06, 10, 11, 13, 15—17, 20, 24—27, 32, 33, 38, 40, 42, 43, 46—49, 52—55), Celenti Dan (E : 2220, 23, 25—27, 32, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 47).

S. m. 33 cl. VI. Iancu Carmen Lucia (E : 2220, 24, 26, 27, 32, 35, 45, 47), Suharu Zoia (E : 2220, 24, 26, 27, 32, 35, 43, 47). Cl. VIII. Creţu Viorela (E : 2222, , 25, 36, 45, 57, 61, 63; 6670, 76), Grigoriu Primavera (E : 2222, 28, 36, 45, 61, 63; 6670, 76), Manciulea Silviu (E : 2233, 34, 36, 41, 43, 57; 6670, 76). Cl. XI. Plescaru Olimpia (E : 2236, 37, 45, 61—64; 6653, 65, 70, 73, 76, 80). *WS. m.* cl. IX. Manolescu Adrian (E : 2210—18, 20—28, 31; 6553, 54, 58, 60, 61, 63, 80, 82—86, 88, 99, 601, 09, 15).

WS. m. 37. cl. IX. Kalisz Eugenia (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25—29, 32, 61, 83, 84, 86, 601, 09, 15, 70, 74, 76, 77, 80, 85; Ü : 2228, 36, 37, 61, 63). Cl. XI. Ghiţulesasa Nicolae (6582, 83, 85, 601, 14, 15, 44, 70—78, 80, 82, 83), Militaru Nicolae (6582, 86, 610, 14, 15, 44, 70—77, 80, 82, 83). *S. m. 39.* cl. VII. Guidea Cristian (E : 2213, 18, 24, 32—34, 38, 42, 43, 47, 48, 51, 52, 55, 58). Marinescu Iulian (E : 2215, 17, 18, 20,22, 27, 32, 33). Cl. IX. Gavriliuc Mihai (E : 2219, 28, 29, 31, 36, 37, 345, 61, 63; 6554, 761, 71, 86, 601, 09, 15, 70, 76, 77, 85, 720, 22, 35), *Ioniţă Georgeta* (E : 2210—18, 20—28, 31, 32; 6553, 54, 58, 60, 61, 63, 71, 80, 82—88, 99, 601, 09, 15).

S. m. 40 cl. VIII. Constantin Cornel (E : 2213—19, 22, 28, 45).

BUZĂU . Sc. 8 ani nr. 1 cl. VIII. Trică V. Alexandru (E : 2201, 02, 06, 10, 11, 13, 15—19).

S. m. 1 cl. VII. Grigorescu Adriana (E : 2210, 11, 20, 31—33, 40, 43). Cl. IX. Garvilă Şerban (E : 2212, 19, 28, 31; 6553, 54, 58, 60, 61 , 63, 83, 84, 86, 96, 601, 09, 15, 18, 25), Ştefănescu Jeanne Geraldine (E : 2207, 09, 28, 30, 31, 36, 37; 6525—27, 29, 34, 44, 54, 60—65, 86, 99, 609, 15, 46, 65). Cl. X. Manea Nicolae (6582—87, 601, 09, 15, 19, 27, 70, 73—77), Marinescu Marian (6554, 60, 63, 65, 67, 71, 79, 82, 83, 97, 605, 15, 17, 18, 39, 46, 49). Cl. XI. Andreescu Gh. Liviu (6580, 83—87, 95, 99, 601, 09, 15, 18, 30, 37, 46, 48, 49, 59, 62, 65—67, 70—77, 81, 80, 85, 87, 91, 92, 95, 98, 700), *Filipoiu Şt. Alexandru* (6559, 71, 74, 77, 84—88, 96, 99, 601, 05—07, 09, 10, 15—17, 21, 28, 30—32, 34, 35, 37, 38, 38, 42, 44, 57, 61, 63, 65—67, 69—73 78, 79, 82—85, 89, 92, 93, 95, 097, 98, 100, 03, 06—12, 14—16, 20—22, 24—26, 31, 33, 36, 44—46, 48, p). Negruţ A. Gheorghe (6549, 61, 63, 87, 97, 601, 05, 09, 15, 22, 31—34), *Pălleanu Cornel* (6503, 06, 13, 17, 18, 28, 49, 51, 58, 65, 67, 74, 80—88, 97, 601, 05, 07, 09, 11, 18, 19, 22, 28, 30, 31, 34, 36, 37, 48, 49, 53, 63, 69—64).

S. m. 2 cl. X. Penea Teodor (6507, 22, 25, 54, 58, 60, 61, 63, 67, 83—85, 96, 99, 601, 05, 09, 15, 34, 46). Cl. XI. Teodorescu Cătălin C Vincenţiu (6504, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 45, 85, 86, 609, 15). *S. m. 2* cl. X. Codreanu M. (6553—63, 65—67, 71). *S. m. 6* cl. VIII. Manea Dumitru (E : 2220, 24, 26, 32, 33, 35, 36, 38, 42, 46, 47). *Casa de copii* cl. VII. Wester Gerda (E : 2210, 11, 13, 15—19, 32).

BUZIAŞ. *S. m.* cl. VIII. Ungureanu Ange-Angelica (E : 2298, 206, 11, 15, 16, 18, 20, 32).

CARACAL. Sc. 8 ani nr. 6 cl. VIII. Alexandru I. Alexandru (E : 2184, 85, 87, 92, 94, 203, 33, 36, 43, 40, 56, 63).

CARANSEBEŞ, Ş. m. 1 cl. IX, Budrugeac P. (E : 2228, 21, 36, 37, 45, 63 ; 6601, 46, 53, 70, 73, 76, 85), *Ştefănescu Mircea* (E : 2230, 36, 37, 41, 45, 60, 61, 63 ; 6581, 84, 85, 87, 88, 601, 06, 09, 21, 30, 31, 33, 39, 41, 44, 46, 49, 61—63, 70, 72, 73, 75—77, 80, 81, 84, 85, 93, 98, 706). Cl. XI. *Jenea Aurel* (6553—56, 58—63, 65—67, 71, 72, 79, 80, 82—88, 97, 601, 07, 09, 11, 15, 16, 21, 22, 30, 31, 33, 34, 37, 39, 41—44, 46, 48, 51, 53, 55, 56, 57, 59—63, 66, 70—78, 80—85, 89, 91, 92, 95, 97, 98, 700, 03, 06, 07, 09—13, 15, 16, 20, 22, 24, 26, 31, 35, 44, 48, 78). *Bena I. Dorin* (6628, 33—39 41—43, 48—50, 53, 55—58, 60, 62, 64—78, 80—86, 89—93, 95, 98, 700, 3, 6, 7, 9—11, 13, 15, 16, 20—22, 24—26, 29, 32, 33, 35, 36, 44, 45, 48,) Ş. m. 2 cl. IX. Martinescu Tiberiu (E : 2236, 61, 63 ; 6609, 15, 70, 73, 74, 77, 720, 22), Puraci Nicolae (E : 2231, 36, 37, 45, 63 ; 6561, 601, 70, 75—77, 81). Cl. X. Muschici Maria (6682, 83, 85, 86, 615, 48, 70, 73—77, 80), Priess Ioan (6580, 82—84, 87, 99, 601, 09, 15, 31, 34, 46, 49, 70, 76), Vitan Leontin (6510, 11, 14, 21, 24, 26, 36, 53, 54, 63, 99, 641).

CĂLĂRAŞI. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Georgescu Elena (E : 2220, 32, 33, 35, 42, 47—49, 54). *Ş. m. 1* cl. VIII. Ştefănescu Radu (E : 2210, 13, 15—18, 20, 22, 23, 27, 32—34, 36, 40, 43, 47). Cl. IX. Formache Constantin (E : 2212, 19, 36, 37, 41, 45 ; 6554, 55, 59, 57, 71, 79), Savlovski Ion (E : 2236, 45, 60, 63 ; 6583, 601, 09, 15, 73, 74, 76, 77, 82), Sorici Ion (E : 2228, 36, 61, 63 ; 6583, 601, 09, 15, 46, 70, 73, 76, 77, 85). Cl. X. Ştefănescu Ştefan (6553, 54, 58—62, 64, 67, 69, 71, 73, 78, 83, 85, 86, 96, 99, 601, 05, 07, 09, 13, 15, 16, 18, 26).

CĂLIMĂNEŞTI. Ş. m. cl. IX. Zamfirache Sabina (E : 2228, 6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 26, 31, 54, 61, 63, 86, 609). Cl. X. Giornoiu Doina-Livia (6654, 61, 73, 80, 83, 84, 86, 601, 05, 09, 15, 34), Tomcescu Alexandru (6507, 10, 15, 16, 19, 22, 25, 29, 61, 63, 83, 84).

CENADE (Mediaş). Şc. 8 ani cl. VIII Olar Mihai (E : 2223, 26, 32, 33, 38, 43, 44, 47). CILNIC (Oltenia). Şc. 8 ani cl. VII. Ciocîrlie I. Marioara (E : 2211, 13, 18, 19, 25, 32, 33, 35, 38, 42, 45). Cl. VIII. Draica A. Ion (E : 2210, 15—19, 32, 33, 38, 43), Enăşteanu N. Victor (E : 2211, 16, 17, 19, 20, 32, 33, 35, 38, 40, 43, 45, 47).

CÎMPIA TURZII. Şc. 8 ani nr. 14 cl. VIII. Ganea Maria (E : 2232, 35, 42, 47, 48, 50, 52, 57, 58).

S. m. cl. VII. Bogdan Octabian (E : 2227, 32, 33, 43, 47, 48, 50, 58). Cl. IX. Toader Iosif (E : 2228 ; 6503, 16, 17, 28, 54, 58, 62, 67, 601, 09, 15). Cl. X. Codrescu Radu (6515, 16, 22, 25—27, 36, 60, 83, 96, 601, 09, 15). Cl. XI. Bărbăţan Emil (6580, 82, 83, 85, 86, 88, 601, 05, 09, 15, 17, 57, 59, 73, 74, 77), Gheţan Vasile (6504, 08, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 32, 36, 39, 46).

CÎMPINA. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Ivaşcu Cirpian (E : 2215—18, 20, 32, 38, 40, 43). *Ş. m. 1* cl. IX. Alexandriu Doru (E : 2212, 19, 20, 30, 31, 36, 37, 41, 45 ; 6580, 96, 99, 601, 06, 07, 09, 15, 36, 39, 46, 49, 53, 57, 61, 63), Constantin Valerica (E : 2228, 36, 37, 61, 63, 65 ; 6615, 57, 70, 73, 77, 80), Constantinescu Florin (E : 2219, 38, 36, 37, 45, 61, 63 ; 6554, 80, 83, 84, 86, 631, 39, 46, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 83, 601, 09. 15), Ivaşcu Florin (E : 2231 ; 6554, 71, 80, 83—86, 96, 99, 106, 15, 13), Morăaşcu Adrian (E : 2228, 31 ; 6560, 83—85, 96, 99, 601, 07, 09, 15). Cl. X. Samoilă Gh. (6583, 85, 86, 601, 09, 15, 31, 39, 70, 71, 73—76, 80), *Ş. m. 2* cl. IX. Tocitu Alexandru (E : 2236, 37, 61, 63 ; 6599, 60q, 09, 15, 46, 70, 71, 73, 76, 77, 80, 81), Ungureanu 'Iliaş (E : 2228, 36, 37, 45, 63 ; 6563, 83—86, 601, 09, 15, 46, 70, 71, 73, 76, 77, 80, 81, 85). Cl. XI. Bucin Alexandru (6582, 85, 87, 631, 34, 44, 48, 59, 66, 67, 70, 71, 73—75, 77, 80, 81, 92, 707).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Liceul Dragoş Vodă cl. IX. Modest (E : 2229, 62, 63, 78, 80 ; 6599, 601, 15, 10, 76, 720, 22), Ţăranu Gheorghe (E : 2236 ; 6503, 07, 10, 16, 19, 22, 61, 63, 86, 99, 615). Liceul militar dl. IX. *Popescu A. Ovidiu* (E : 2228, 31, 36, 45 ; 6528, 29, 53—55, 58—61, 63, 71, 79, 83—86, 99, 601, 06, 09, 14, 39, 41, 46, 63, 60, 61, 63). Cl. X. Fita Marcel (6583, 85, 87, 88, 97, 600, 05, 09, 15, 70—77), *Lău Gheorghe* (6503—05, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 34, 36, 39, 46, 54, 57, 58, 60, 71, 67, 79, 80, 82—84, 86, 95, 87, 96, 99, 601, 05, 07, 09, 10, 15, 16, 18), Mehadin Vasile 6609, 15, 44, 70—77, 80, 83, 96), Mototdea Fănică (6580—85, 601, 05, 15, 09, 31, 44, 48, 63), Suceaveanu Constantin (5603, 07, 10, 12, 15, 16, 22, 25, 26, 36, 61, 83). Cl. XI. Ciornodolea Marcel (6511, 27, 36, 39, 51, 54, 61, 63, 71, 82, 84, 85, 87, 99, 605, 09, 15, 28, 38, 44, 59, 48, 66, 67, 70—78, 82, 706), Mascan Marius (6554, 58, 74, 79, 82—85, 87, 88, 601, 05, 07, 09, 15, 16, 19, 21, 23, 34, 41, 44, 48, 53, 61, §3), *Rudenco Corneliu* (6582, 84, 85, 87, 88, 601, 05, 07, 09, 15, 16, 31, 34, 37, 44, 55, 59, 66, 67, 69—78, 80, 83, 93, 95, 97, 98, 707).

CLUJ. Absolvent Janko Alexandru (6549—52, 55, 61, 63, 65, 74, 76, 80—82, 84, 85, 87, 89, 90, 92, 99, 601, 05, 09, 15, 18, 22, 23, 26). Şeimeanu Teodor (6549—52),

Şc. 8 ani nr. 2 cl. VII. Sîrbu Radu (E : 2220, 22, 25, 26, 27, 31, 32, 48, 50). *Ş. m. M. Eminescu* cl. X. Galin Radu (6554, 58, 61, 63, 71, 83—86, 601, 05, 15). *Ş. m. G. Coşbuc* cl. VII. Mihălceanu Dqn (E : 2213, 14, 16—18, 20, 22, 31—33, 38, 40, 43). Cl. VIII. Berceanu Cornelia (E : 2202, 06, 10—13, 15—17, 19). *Ş. m. 4 Emil Racoviţă* cl. VII. Barbu Liviu (E : 2238, 42, 43, 45, 47, 48, 56, 58, 68, 78, 80). Cl. VIII. Bulz Nicolae (E : 2233, 34, 36—38, 40, 42, 43, 45, 56, 57), Lascu Gheorghe (E : 2220, 32, 33, 35, 42, 45, 47, 48, 50, 58, 60, 61, 63), Simca Aurelian (E : 2220, 21, 23, 25, 26, 30, 31, 32). Cl. IX. Bartoş Ioan (E : 2236, 45, 61, 63 ; 5683, 85, 601, 15, 85, 70, 73, 74, 76, 77, 80), Lascu Ioan (E : 2219, 29, 31, 36, 45 ; 6507, 16, 19, 54, 58, 61, 63, 84—86, 88, 615). *Ş. m. 5* dl. VII. Popa Marcel (E : 2197—99, 201, 02, 06, 16, 18). Cl. IX. Grigore Corneliu (E : 2228, 31, 36, 37 ; 6596, 601, 09, 15, 56, 54, 51, 63, 660). *Ş. m. 7* dl. VII. Aranyi Attila Bela (E : 2217, 27, 32, 33, 46, 50, 42, 43, 63), Floriska Irma (E : 2217, 27, 32, 33, 36, 38, 40, 43, 54, 59, 63), Geltch Elisabeta (E : 2233, 35, 38, 40, 42, 43, 48, 58, 59), Janky Maria (E : 2233, 35, 38, 40, 42, 48, 54, 58), Kerekes Ladislau (E : 2233, 35, 38, 40, 42, 43, 58, 59), Madai Anna (E : 2217, 27, 32, 33, 36, 38, 40, 43). Cl. VIII. Simanfry Eugen (E : 2231, 33, 35, 36, 38, 40, 43, 54, 59, 63). *Ş. m. 8* Nr. Bălcescu cl. VII. Miculescu Lucia (E : 2220, 32, 33, 38, 40, 43, 46, 47), Medevski Sergiu (E : 2215—18, 22, 32, 33, 40), Sandor Ibolya (E : 2211, 15, 17—20, 22, 32), Szasz Arpad (E : 2218, 33, 35, 28, 40, 42, 43, 48). Cl. VIII. Ilea Radu (E : 2220, 33, 36, 47, 48, 57, 58, 63), Man Augustin (E : 2224, 33, 38, 42, 44—48, 52—54, 58, 60, 62, 63 ; 6670, 76), Marcaboji Horia (E : 2233—38, 40, 43), Măcicăşan Vasile (E : 2220, 27, 32, 36, 43, 48, 58, 63), Mărghitaş Liviu (E : 2235, 37, 38, 40, 47, 48, 61, 63), Măscosiu Mariana (E : 2210, 15, 20, 27, 32, 33, 38, 42, 43), Migalte Adrian (E : 2220, 33, 42, 43, 47, 48, 50, 58), Moldovan Mariana (E : 2220, 26, 32, 33, 36, 40, 43, 48, 63, 68, 70), Moşneagu Lucian (E : 2218, 24, 33, 38, 43, 44, 45, 47), Pavlenco Concinel (E : 2236, 40, 43, 61, 63 ; 6670, 73, 76), Petcu Sînziana (E : 2236, 36, 43, 45, 48, 53, 54, 58, 59), Peter Attila (E : 2211, 15, 17—19, 29, 33, 34, 36, 43, 45), Iuşcaş Mihaela (E : 2210, 11—13, 15—18), Raţiu Aurel (E : 2220, 27, 32, 33, 36, 48, 57, 63), Schiflech Mariette (E : 2210, 11, 15—17, 20, 22, 24), Tudoran Tudor cE : 2233, 36, 40, 43, 45—48, 58, 63), Vasiliu Liviu (E : 2215, 18, 20, 32, 33, 48, 40, 43, 46, 47), Verestay Arpad (E : 2211, 15—19, 23, 26, 29), Vuşcan Viorica (E : 2227, 32, 33, 36, 38, 42, 43, 45, 63). Cl. 'X. Bartoş Andrei (E : 2207, 09, 19, 28, 29, 36, 37, 61, 63 ; 6510, 19, 22, 26, 54, 60, 61, 63, 99, 601, 09, 73, 74, 76, 77), Lazăr Aurel (E : 2229, 31, 36, 27, 45, 61, 63, 64 ; 6583, 84, 86, 601, 90, 15, 39, 46, 49, 53 ;, 70, 73, 74, 76, 77, 83), Lucaciu Gheorghe (E : 2236, 37, 45, 61, 63 ; 6601, 09, 15, 46, 70, 73, 76), Mitrea Mihaela (E : 228, 29, 36, 37, 45 ; 6583, 84, 86, 601, 09, 15, 56), Oroş Lucian (E : 2236 ; 6561, 63, 71, 83, 84, 99, 601, 10, 15, 29, 58), Stoiqn Daniela (E : 2229, 31 ; 6583, 84, 601, 09, 17, 39, 46, 49, 53, 70), Tulbure Valeria (E : 2209, 19, 31 ; 6503, 10, 19, 22, 26, 27, 34, 60, 61, 63). Cl. X. Fqrcaş Petru (6551, 53, 54, 58, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 72, 79, 80, 82—87, 99, 601, 07, 09, 15, 16, 18, 27, 30, 43, 46, 49, 53, 57, 61, 63), Trif Damian (6560, 80, 84, 88, 96, 99, 601, 05, 09, 15, 44, 46). *Ş. m. 12* cl. VIII. Mehes Katalin (E : 2210, 11, 13, 15—19). Ş. m.*14* cl. IX. Şoşa Pavel (E : 2228, 31, 36, 37, 45, 63 ; 6584, 602, 09, 15, 70, 74, 76, 77). *Ş. m. 15* cl VII Iancău Marian (E : 2220, 22—25, 27, 32, 43, 47). Cl. VIII. Lazăr Rodica (E : 2210, 11, 13, 15, 16, 18—20, 33, 34, 40, 53, 45). *Student.* Tontea Ioan (6670—78, 80, 710, 11, 15, 20, 22), Student. *Călugăreanu Grigore* (6504, 12, 15, 18, 23, 25, 26, 31, 32, 36, 38—48, 54, 55, 57—59, 61—62, 67, 68, 70, 72, 74, 79, 601, 09, 15, 16, 21, 24, 25, 54, 46, 49, 59, 65, P).

CONSTANŢA. Şc. 8 ani nr. 9 cl. VII. Cristian Călin (E : 2220, 22, 24—26. 31—33, 38).

Şc. 8 ani nr. 12 cl. VII. Ioaneş Mircea (E : 2220, 23, 24, 27, 31—33, 42, 37).

Absolventă Kreissl Carmen (6581—83, 85—87, 97, 99, 601, 04, 15, 19, 23, 26, 28, 37, 49, 53, 55).

Ş. m. cl. VIII. Zainea Adrian (E : 2248, 51—54, 58—62, 6676).

Ş. m. 1. Chicu Theordor (6551, 53—59, 61, 63, 65—67, 70—72, 74, 78—80. 82—89, 99, 601, 05—07, 11, 15, 16, 18, 19, 23, 59). *Ş. m. 3* cl. XI. *Eremia Vasile* (6503—06, 01, 11, 13, 14, 18, 21, 23—25, 27, 36, 38, 39, 42, 46, 47, 49, 51, 54—56, 66, 72, 76, 78, 81—83, 84—88, 99, 601, 05, 07, 09, 13, 15, 18), *Răduinea Nicolae* (6444, 46, 49, 64, 65, 76, 80, 93, 97, 506, 08, 11, 13, 14, 17—21, 25, 27, 42, 47, 49, 65, 66, 72, 76, 78, 81—83, 85—89, 99, 601, 06, 07, 09, 13, 15, 18).

CORABIA. *Ş. m.* cl. XI. Delu Maria (6670—77, 706, 13, 20, 22, 26).

CORBU (Argeş). *Şc. 8* ani cl. VIII. Răducu Adrian (E : 2220, 27, 32, 33, 40, 42, 43, 45).

COROCĂEŞTI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VIII. Belciug Ion (E : 2215—17, 33, 34, 36, 40, 42, 46, 47, 58, 63).

COSOBA (Bucureşti), Şc. 8 ani cl. VII. Constantin Gh. Maria (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 32), Ilie Virginiq (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 32), Nicolae Ioana (E : 2210 11, 13, 15—17, 20, 32).

COSTEŞTI (Argeş). Ş. m. cl. CI. Depărăţeanu Dan (6503, 04, 07, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 25—27, 29, 31, 34, 36, 39, 44, 45).

COTATCU (Ploieşti). Şc. 8 ani cl. VII. Rotaru Costel (E : 2211, 15—18, 20, 27, 33, 40, 43). Cl. VIII. Răduţă Fănică (E : 2203, 06, 10, 13, 15—18, 20, 27).

CRAIOVA. Şc. 8 ani nr. 9 cl. VI. Voicu N. Eugen (E : 2215, 18, 20, 35, 38, 40, 43, 46, 47). *Ş. m. 1* cl. VIII. Didu Marin (E : 2211, 13, 17, 27, 33, 36, 42—44), Reică Constanţa Lidia (E : 2211, 13, 20, 25, 28, 32, 33, 35, 36, 38, 44). Cl. IX. Damian Viorel (E : 2228, 36, 37, 61, 63 ; 6589, 99, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 77), Pătra Cristian (E : 2228, 30, 36, 37, 45, 61, 63, 83, 84, 609, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 82), Popescu Leonardy (E : 2236, 37, 45, 61, 63 ; 6586, 99, 629, 70, 73, 74, 77), Sandu Darius (6565—68, 71, 72, 74, 81, 82, 85—88, 601, 09, 15), Slabu Dan Viorel (E : 2237, 45, 63 ; 6639, 46, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 81). *Octavian Bîscă* (6627—44, 46—49, 51, 57, 59, 62, 63, 65—67, 84, 85, p.).

Ş. m. 2 cl. IX. Grebulescu Alexandru (E : 2219, 20, 28, 31—33, 35—37 ; 35 ; 6601, 09, 15, 83), Stănciulescu Ioan (E : 2298, 31, 36, 37, 45 ; 6559, 51, 553, 54, 61, 63, 83, 85, 89, 601, 09, 15). Cl. X. Creţu Adrian (6503, 07, 10, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 28, 30, 31, 34, 36, 54, 80, 83, 86, 99, 601, 04—08, 10, 13, 15—19, 23, 26), Petrescu A. Ioan (6503, 04, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—32, 34, 36, 39, 42, 53, 54, 48, 59, 61, 62, 71, 80, 82—86, 88, 97, 99, 601, 09, 15), Predai Petre (6503, 07, 10, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 26, 36, 39, 54, 61, 84, 601, 09, 15). Cl. XI. Bîrlădeanu Emilian (6551, 55, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 74, 82, 601, 05, 09), Licoiu Dorian (6580, 82, 83, 97, 97, 99, 601, 05, 09, 11, 15, 18, 21, 22, 27, 31, 32, 34, 44, 48, 59, 63, 65, 57, 70—78, 81, 95, 96, 706). *Ş. m. 3* cl. X. Marinescu M. Mircea (6503, 04, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 25—27, 37, 60, 63). Cl. XI. Diaconescu Mihaela (6580, 82, 83, 85, 88, 601, 05, 15, 70—77, 703), Ghiţuleasa Dan (6528, 54, 61, 65, 79, 80, 82.—88, 97, 601, 09, 15, 19, 23, 28, 30, 32, 34, 36, 37, 44, 48, 49, 63, 46—78, 80—82, 84, 85, 95, 97, 703, 06, 10, 11, 13, 15, 20, 22, 24, 35, 36), Zlotea Ion (6615, 70, 72—77, 80, 710, 11, 13, 15, 20, 22, 36). *Ş. m. 4* cl. X Pavel Marin (6585, 87, 609, 70, 71, 73—77, 82, 83). Cl. XI. Iordăchescu Anca (6580—82, 84—90, 92, 95, 601, 09. 15). *Ş. m. 5* cl. VII. Stoica Eugen (E : 2220, 22, 25, 27, 32—34, 38, 40, 42, 43). Cl. X. Mareş Florin (6601, 09, 15, 41, 44, 70, 71, 63, 74, 76, 77, 80, 81, 98), Mocaru Dorin (6601, 09) 15, 39, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 97), Popescu M. Dorin Lionel (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 26, 61, 63, 71, 83, 609, 15). *Şc. pedagogică* cl. VI. Ciulin Luminiţa (E : 2220, 24, 27, 32, 33, 40, 43). Cl. CIII. Andronic I. Mircea Ştefan (E : 2211, 13, 16—18, 20, 22, 24).

CRASNA. Ş. m. cl. VIII. Ostracza Lăcrămioara (E : 2215, 16, 26, 32, 33, 35, 39, 40, 42, 43, 47).

CURTEA DE ARGEŞ. Ş. m. cl. XI. Niţulescu Gh. (E : 2228, 31, 36, 37, 45 ; 5661, 63, 83, 85, 86, 609, 15), Stănescu Lucreţia (E : 2228, 36, 37 ; 6582, 601, 05, 15, 31, 38, 46, 53, 59). Cl. X. Băluţă Filofteia (6597, 601, 09, 13, 13, 53, 62, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 91), Ciudă Florentin (6586, 609, 70, 72—75, 77, 76, 82, 90).

CURTEA FĂGET (Banat). Şc. 8 ani cl. VIII. Bancea Iosif (E : 2236, 43, 54, 58, 61, 63, 70, 76).

DEJ Ş. m. 2 cl. IX. Barth Ferenc (E : 2228—31 ; 6554, 58, 60—63, 71, 86, 96, 615). Cl. X. Smărăndescu Cecilia (6583, 86, 87, 99, 609, 15, 70, 73—77, 97, 98).

DEVA. S. m. Dr. P. Groza cl. VIII. Neniamin Cornel (E : 2220, 32, 35, 45, 47, 48, 50, 52—55, 58,—60, 63 ; 6599, 681). Şc. pedagogică cl. VIII. Franz Helga (E : 2210, 15, 17, 18, 20, 35, 38, 47), Jurcă Florin (E : 2210, 11, 13, 15—17, 22, 32).

DOMNASNEA (Banat). Şc. 8 ani cl. VII. Gqlescu Maria (E : 2220, 25, 28. 32. 33, 35, 36, 40, 43, 47, 50, 5ł 61, 63). Cl. VIII. Vrăjitoru Dumitru (E : 2220—22, 25, 26, 32, 33, 35, 36, 42, 47, 47, 60, 54, 57, 58, 61, 63, 6670).

DOROHOI. Ş. m. 2 cl. XI. Inghel Ilin (6586, 609, 15, 48, 70—77, 81, 89, 98, 700).

DERĂGANU (Argeş). Ş. 8 ani cl. VII. Diaconecsu Natalia (E : 2210, 11, 15—20 22, 24, 32). Cl. VIII. Duţă Alexandru (E : 2210, 12, 13, 15—19, 28, 32), Enache Petre (E : 2198, 200, 01, 03, 06, 11, 15, 17, 20, 23).

DRĂGĂNEŞTI (Olt-Argeş). Ş. m. cl. IX. Durigu Mircea (E : 2219, 22, 31, 36, 37, 45, 54, 61, 99, 601, 15), Văduva Florea (E : 2228, 36, 37, 45, 61, 63 ; 6601, 09, 15, 53, 70, 74, 76, 77, 80).

DRĂGĂŞANI. Ş. m. cl. IX. Mărgineanu Gh. (E : 2228, 36, 37, 45, 61, 63 ; 6583, 96, 615, 70, 76, 80, 82). Cl. X. Mar n A. Marin (6580, 601, 09, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 85, 95, 97).

DUMBRĂVENI. Şc. 8 ani cl. VII. Crăsnaru Despina (E : 2211, 15, 16, 18, 20, 23, 25, 32, 33, 43). Cl. VIII. Cătuţoiu I. Elena (E : 2233, 26—38, 43, 45, 48, 50, 52, 57, 58, 63), Tiţa Ioana (E : 2211, 17, 19, 27, 28, 33, 40, 43, 45, 47). *Ş. m.* cl. IX. Widman Wilhelm (E : 2236, 37, 41, 45 ; 6571, 83, 84, 86, 601, 09, 15, 39). Cl. X.

Bortaș Marius (6582, 85, 601, 05, 09, 15, 34, 44, 70—77, 801, 82, 85, 95, 98).

FĂGĂRAȘ Ș. n. 1 cl. X Gravu Nicolae (6582, 99, 639, 41, 42, 54, 46, 60, 63, 64, 70, 71, 73—76), Ortocol George (6553, 55, 56, 66, 70, 630, 32, 43, 73—77, 99, 601, 34, 39, 41, 43, 44, 46, 60, 63, 64, 70, 71).

FĂGET (Banat). Ș. m. cl. IX. Otescu Elena (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45, 60, 61, 63; 6586, 601, 15, 74, 76, 80), Petroescu Marius (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26—27, 26, 39, 46).

FĂLTICENI. Ș. m. 1 cl. XI. Gălățeanu Radu (6584—86, 601, 09, 44, 59, 67, 70, 71, 73—76, 80, 85), Jiffersohn Leontina (6551, 61, 63, 83—86, 601, 05, 09, 34, 44, 82).

FELDRU (Cluj). Șc. 8 ani cl. VIII. Marinescu Oltea (E : 2219, 20, 32, 33, 38, 40, 42, 43k 45—47).

FETEȘTI GARĂ. Ș. m. cl. XI. *Gonciar Ștefan* (6580—90, 96—99, 601, 05—09, 11, 12, 15—19, 21—23, 28—31, 33, 34, 36—40, 42, 46, 47—49, 53, 55, 57—59, 62, 63, 65—77, 79, 80, 81, 85, 92—95, 97, 99, 703), Niță Constantin (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 22, 27, 35, 36, 38, 39, 61, 63, 67).

FIENI. Ș. m. cl. VIII. Drăgoescu Romeo (E : 2220, 22, 27, 32, 43, 47, 48, 63), Popescu Florin (E : 2197, 98, 201—03, 07, 10, 11, 13, 15—19). Cl. IX. Chivoiu Pompiliu E : 2228, 31, 36, 37, 61, 63; 6580, 83, 84, 601, 09, 15, 46, 80).

FILIAȘI (Oltenia). Ș. m. cl. IX. Băluță Constantin (E : 2221, 22, 25, 28; 6580, 83—86, 601, 09, 15, 18).

FIZES (Banat). Șc. prof. ucenici an II. Cioloca Adam (E' : 2210, 11, 13, 15—17, 19).

FOCȘANI Șc. 8 ani nr. 7 cl. V. Iacob Dan E : 2224, 26, 32, 40, 43, 48, 49, 50). *Ș. m. Unirea* cl. VII. Boner Alexandru (E : 2211, 13, 15, 16, 20, 32, 33, 40, 43).

GALAȚI. Șc. 8 ani nr. 7 cl. VII. Constantinescu Rodica (E : 2215—18, 32, 33, 40, 43). Cl. VIII. Chiriac Dan (E : 2220, 28, 36, 38, 47, 63, 70, 73, 76), Stoian Melania (E : 2201, 02, 10, 15—17, 20, 32). Șc. 8 ani nr. 18 cl. VI. Dumitru Mihai (E : 2206, 16, 20, 32, 35, 38, 40, 43). Șc. 8 ani nr. 21 cl. VIII. Carabăț Cornelia (F : 3202, 04, 10, 11, 13, 15—19, 25, 32, 33, 36, 40, 43, 45—47), Carabogdan Elena (E : 2210, 13, 15—17, 19, 32, 33, 35, 36, 42), Caraghiosu Angela (E : 2198, 202, 15, 16, 19, 20, 23, 27, 32, 33, 36, 38, 40, 43, 45, 47), Wexeler Adrian (E : 2248—50, 52, 54, 57, 58, 63; 6670, 73, 76). Șc. 8 ani br. 22 cl. VIII. Gheorghiu Anicuța (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20, 32, 40, 43). Pavel Aurica (E : 2210, 13, 15—17, 19, 20, 32). *Șc. 8 ani nr. 23* cl. VII. Bejan Ovidiu (E : 2210, 13, 15—18, 31, 43). Cl. VIII. Olaru Rodica (E : 2236, 40, 42, 43, 48, 50, 57, 58, 63). *Șc. 8 anu nr. 24* cl. VI. Costiniuc Florin (E : 2213, 19, 23—26, 29, 33, 35, 40, 42, 43, 45—58, 50). Cl. VIII. Katz Marian (E : 2235, 36, 43, 45, 48, 57, 60, 63, 79; 6670, 76, 720, 22). *Șc. 8 ani nr. 27* cl. VI. Sosoi Paul (E : 2210, 15—17, 19, 20, 27, 32. *Șc. 8 ani nr. 28* cl. VII. Voinescu Ionel (E : 2185, 91, 92, 206, 15—17, 19, 20, 27, 32, 45, 48).

S. m. 1 cl. XI. Boroș Gh. (6551, 54, 57, 65, 66, 73, 83, 85, 87, 88, 601, 09, 15). Kupferwasser Marian (6551, 54, 59, 63, 72, 82—84, 86, 87, 605, 15).

S. m. 2 cl. IX. Buhuceanu Grigore (E : 2228, 30, 32, 36, 37, 63; 6609, 70, 73, 76, 80, 83), Grecu Georgeta (E : 2228, 30 36, 37, 61, 63; 6609, 70, 73, 74, 7), Mitrea E. (E. E : 2228, 30, 32, 36, 37, 60, 63; 6609, 15, 70, 73, 65), Petrea Gică (E : 2209, 28, 30, 36, 37, 61, 63; 6615, 70, 73, 75, 86). Cl. X. Ciucă Lucian (6670, 71, 73, 76, 80, 81, 85, 98, 720, 22, 24, 26, 35), Ioan Emilian (6599, 601, 09, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 83), Mocanu Marian (6599, 601, 09, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 83), Spînoiu Mihai (6599, 601, 09, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 83). Cl. XI. Popp Ionel (6644, 59, 70, 71—77, 81, 82).

Ș. m. 3 cl. IX. Corciovei Cecilia (6525—27, 29, 53, 54, 61, 63, 71, 83, 99, 601, 15), Ioan Victor (6661, 63, 70, 73, 76, 77, 81, 85, 720, 22, 36), Iorga Viorica (E : 2228, 36, 37, 71, 63; 6584, 609, 70,73, 76, 77, 81), Timofte Sterică (E : 2228, 291, 36, 37, 45, 61, 63; 6601, 09, 15, 70, 74, 76, 77, 80). Cl. X. Scorțaru Florin (6582, 83, 84, 86, 606, 07, 09, 16, 31, 34, 44, 46).

Ș. m. 4 cl. VI. Ariton Petrucă (E : 2210, 11, 13, 15—19), Dobrescu Ligia (E : 2210, 11, 13, 15—19). Cl. VIII. Anton Gheorghe (E : 2220, 24—28, 31, 32), Sapera Dumitru (E : 2210, 11, 13, 15—19). Cl. IX. Tiribegea Maricel (E : 2228, 36, 61, 63; 6583, 601, 15, 46, 50, 76, 80, 82, 83, 85). Cl. XI. Ariton Constantin (6580, 83—85, 501, 05, 15, 39, 46, 59, 60, 70, 76). Ene Aerian (5480, 83, 601, 05, 15, 46, 70, 73—78, 83), Petrescu Octavian (6583, 95, 605, 15, 46, 63, 70—77).

Ș. m. 5 cl. VIII. Haină-Roșie Aurelia (E : 2227, 34, 37, 40, 43, 45, 48, 63, 88). Cl. IX. Marinescu Veronica (E : 2236, 63; 6561, 63, 67, 83, 86, 97, 601, 15, 70, 76), Burluc Jenica (6553, 54, 61, 63, 67, 69, 82, 83, 86, 601, 15, 14), Niculescu Lucreția (6582, 83, 87, 97, 601, 15, 44, 70, 71, 73—76), Săsinuță Stelian (6582, 83, 97, 601, 15, 44, 70, 71, 73—76, 87). Cl. XI. Tăutu I. (6554, 57, 61, 82, 86, 644, 70, 71, 73, 75—77).

Ș. m. 6 cl. IX. Lepădatu Aneta (E : 2261, 63; 6580, 83, 86, 70, 73, 76, 77, 80, 81, 85). Ș. m. 7 cl. XI. Moțoi Maria (6587, 601, 09, 70, 71, 73, 76, 77, 85, 715, 20).

Ş. m. muzică cl. V. Ghelase Gh. Ion (E : 2232, 35, 38, 40, 43, 47, 48, 50). Cl. VI. Damaşcan Gabriela (E : 2220, 40, 43, 48, 50, 52, 54, 70).

GĂIEŞTI. Ş. m . cl. VII. Sava Teofi (E : 2210, 13, 15—18, 20, 33, 40, 43). Cl. X. Prodan Ion (6583, 84, 96, 99, 601, 06, 07, 09, 15, 31, 68, 71, 80).

GĂTAIA (Banat). Ş. m. cl. IX. Belcuţă Olimpia (E : 2207; 6510, 19, 25, 27, 48, 63, 79, 83, 86, 601, 09, 15).

GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ, (Bacău), Ş. m. 1 Cl. 8 Galacki Peter (E : 2220—23, 36, 27, 29; 32—36, 38, 43, 45—47).

GHERLA. Şc. 8 ani cl. VII. Baumgarten Alfred (E : 2215, 16, 18, 22, 33, 40, 42 43, 47). Cl. VIII. Kirsch Ivan (E : 2220, 32, 33, 40, 42, 43, 48, 63). Cl. IX. Baumgarten Alexandru (E : 2229, 31, 36, 37, 45, 60, 61, 63, 64; 6583, 86, 88, 99, 670, 76, 85), Lebonţiu Mircea (E : 2228, 31, 36, 37, 60, 61, 63; 6586, 601, 09, 15, 70, 76, 85).

GIURGIU. Şc. 8 ani nr. 6 cl. II.3 Căli scu G. Mihai (E : 2201, 10, 23, 32,7 33, 35, 38, 40, 42, 43, 47). Şc. 8 ani nr. , cl. VII. Popescu Dragoş (E : 2220, 22, 2 25—27, 32—35, 38—40, 42—44, 46—48, 50, 52—54, 56—60). Ş. m. 1 cl. IX. Vlaicu Florin (E : 2223, 30, 31, 36, 37, 41, 45; 6601, 06, 19, 15, 39, 46, 63). Cl. X. Coporan Emil (6585, 99, 601, 09, 15, 70, 71, 73—77, 720). Cl. XI. Rada C. Mircea (6549, 63, 71, 72, 77, 79, 82—83, 603, 161, 21, 44). Ş. m. 2 cl. IX. Raboj Constantin (E : 2228, 36, 37, 61, 63, 80; 6615, 70, 73, 76, 77, 720, 22). Cl. X. Marinescu Stelică (6585, 86, 99, 601, 09, 15, 46, 70, 71, 72, 76, 77), Mone E. Llena (6636), 44, 70—73, 75, 76, 720, 22, 26, 29, 31).

GRUIA (Vînju-Mare, Oltenia). Şc. 8 ani cl. VIII. Ghiulan Dumitru (E : 2220, 34, 36, 37, 40, 43, 48, 61, 63), Togoe Gh. Ion (E : 2225, 28, 31, 36, 37, 43, 50, 51, 63).

HALEŞ. Şc. 8 ani cl. VI. Marinescu I. Elena (E : 2210, 13, 15, 32, 33, 40, 43) Cl. VII. Dogaru Vasilica (E : 2210, 13, 1 17, 20, 32, 33, 40, 53), Janeta Elena (E : 2220, 32, 33, 36, 40, 43, 54, 58), Voicilă Ioana (E : 2220, 22, 33, 36, 40, 43, 54, 58). Cl. VIII. Marinescu M. Marcela (E : 2220, 30, 32, 33, 39, 40, 43, 52), Marinescu I. Maria (E : 2210, 13, 15—17, 20, 30, 32, 33, 3 39, 40, 43, 45, 48, 52, 54, 58, 61, 63).

HAŢEG. Ş. m. cl. IX. Maftei Nicola, (E : 2231, 36; 6183, 86, 97, 99, 609, 36 46, 70, 73, 74, 76). Cl. XI. Napcea Liviu (6503—05, 10, 12, 14—16, 22—24, 26, 61, 97, 615, 22).

HINŢEŞTI (Galaţi). Şc. 8 ani cl. VIII. Angheluţă Mircea (E : 2215, 17, 32, 33, 40, 42, 43, 47).

HOREZU (Argeş). Ş. m. 1 cl. X. Buşe Marcu (6560, 65, 71, 73, 79, 80, 82—88, 99, 601, 05—09, 15, 18, 19, 21, 41, 42, 46, 47, 57, 63, 65).

HUEDIN (Cluj). Ş. m. cl. X. Voiculescu Emil (6554, 60, 65, 67, 69, 86, 87, 99, 601, 05, 15, 39, 46, 70, 73, 76, 77, 80—82, 85 98, 726).

HUNEDOARA. Absolvent *Listeş Vasile* (6580—89, 97, 601, 09, 18, 31, 32, 53, 56, 57, 59, 61, 66—78, 85, 95—97).

Ş. m. 1 cl. VI. Politaru Victoria (Ü : 2217—20, 33, 40, 43, 45). Cl. VII. Ienei Mihaela (E : 2210, 15—19, 27, 32, 40, 43), Mălai Siminica (E : 2211, 17, 19, 27, 32, 40, 43, 45), Timgriu Ana (E : 2211, 17—20, 27, 40, 43, 45). Cl. VIII. Fazekas Ladislau (E : 2210, 11, 13, 15—17, 20, 21, 23, 42, 43, 47), Iacob Teodor (E : 2210, 13, 15, 16, 33, 38, 40, 42, 43, 47), Mărgineanu Octavian (E : 2212, 16, 18, 19, 28, 32, 33, 36, 42, 45, 47), Muşa Rosemarie (E : 2213, 15—17, 20, 33, 42, 43). Cl. IX. Căpăţînă Ion (6581, 83, 86, 88—91, 99, 601, 09, 15, 16, 19, 22, 32, 70, 71, 73—77), Ciotescu Ion (E : 2207, 5610, 16, 19, 25—27, 61, 63, 86,15). Duca Maria (E : 2228, 29, 36, 37,609, 45, 61, 63; 6601, 09, 15, 70, 76), Oprişa Doru (E : 2228—30, 36, 37, 45, 60, 61, 63; 6554, 62, 69, 80, 83, 86, 99, 609, 15, 16, 57, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 82, 85), Păuşan Doru (E : 2228, 29, 36, 37, 45; 6554, 58, 62, 69, 80, 83, 99, 609, 15), Popa Cernica Ileana (E : 2228, 29, 36, 37, 45, 61, 63; 6586, 601, 09, 80, 76). Cl. X. Suruceanu Alex. (1525, 58, 61—63, 67, 71, 83, 84, 601, 07, 09, 15, 16, 99), Diaconu Aurel (6583—86, 88, 89, 606, 15, 30, 36, 66, 70, 71, 73—77, 82, 98). Cl. XI. Enciu George (6582, 84—88, 601, 09, 15, 16, 21, 32, 37, 39, 44, 60, 66, 69—71, 75—77, 80), Lupu Alexandru (6583—88, 616, 66, 70, 71, 74, 75, 77, 93).

IANCA (Galaţi). Ş. m. cl. X. Stratan Mihai (6580, 82, 83, 85, 86, 96, 99, 609, 09, 15, 46). Cl. XI. Tabîrcă Virgil (6630, 37, 44, 48, 59, 70—77, 80, 82).

IAŞI. Ş.c 8 ani nr. 7 cl. VI. Bîzgă Adrian (E : 2224, 32, 33, 35, 42, 47, 48, 54). Cl. VII. Acaterinei Ioan (E : 2202, 15, 17, 20, 24, 26, 31—33, 40, 43), Agavriloaiei Ioan (E : 2210, 15—17, 27, 31—33, 46, 47), Barbu Adrian (E : 2217, 18, 20, 24, 27, 32, 33, 37, 47), Bilanca Radu (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 22, 23, 27, 32), Călugăreanu Irina (E : 2220, 24—27, 32, 33, 35, 38, 42, 47), Drişcu Radu (E : 2225, 27, 33, 35, 40, 42, 43, 46, 47), Stavrache Mioara (E : 2210, 11, 17, 18, 20, 24, 27, 32, 33, 40, 42, 43).

Şc. 8 ani nr. 12 dl. VII. Ionescu Carmen (E : 2211, 13, 15—18, 20, 22, 24, 27, 32, 38)l

Şc. 8 ani nr. 14 cl. VI. Porăşnicu Gabrie. (E : 2211, 15, 16, 20, 32, 33, 38, 40, 42, 43),

Cl. VII. Stancu Viorel (E : 2211, 13—15, 17, 18, 20, 22, 23, 25—27, 32, 33, 35, 38r 40, 42—44, 46—48, 50, 52). Cl. VIII. Topo). Vasile (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 32, 431,

Ş. m. 1 cl. VII. Vlidaru V. (E : 2210, 11), 15, 18, 20, 32, 33, 35, 38, 40, 43, 48, 50, 51, Mistreanu Gabriela (E : 2201, 02, 10, 13, 16, 17, 19, 25, 32, 45), Pancu Costel (E : 2202, 06, 10, 11, 13, 16—18). Cl. VIII. Istrate Nuşa (E : 2198—202, 06, 10, 11, 13, 15—18, 20, 23, 32), Rusu Traian (E : 2211, 13, 15, 31, 33, 36, 40, 42, 43). Cl. X. Chiriac Iulian (6580, 82—86, 88, 99, 601, 07, 09, 15, 16, 18). Cl. XI. Leuştean Florentin (6504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 25, 26, 36, 39, 516).

Ş. m. 2 cl. VI. Iftimescu Radu (E : 2220, 24, 25, 27, 32, 35, 40, 42, 46, 47).

S. m. 3 cl. VI. Burlacu Călin (E : 2210, 11, 15, 17, 25, 33, 40, 43), Popescu Anton (E : 2220, 32, 35, 38, 43, 47, 48, 54, 55). Cl. VII. Cleju Ion (E : 2210, 15—18, 20, 32, 40, 43), Ruscior Radu (E : 2210, 15—18, 20, 40, 42, 43, 47), Teodorescu Horia (E : 2248, 50, 52—55, 58, 59, 65), Vascan T. Robert (E : 2220, 22, 23, 32—34, 38, 42, 47). Cl. VIII. Enăşescu Ancuţa (E : 2220, 23, 24, 26, 27, 32, 43, 38,), Linde Radu (E. 2220—22, 24—25, 31, 32). Cl. IX. Achelăriţei Radu (E : 2219, 38, 36, 37, 45, 61, 63—65 ; 6516, 54, 63, 71, 86, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 85), Baciu Vasile (E : 2228, 31, 36, 37, 45, 51, 63 ; 6601, 09, 15, 70, 76, 80, 81), Donea Dragoş (E : 2228, 31, 36, 37, 41 ; 6554, 61, 63, 80, 91, 601, 15, 46), Gîrleanu Iosif (E : 2236, 37, 45, 61, 64 ; 6670, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 85), Grindei Iulian E(: 2228, 29, 31, 36, 37, 45 ; 6510, 15, 16, 19,22, 26, 54, 58, 61, 63, 83, 86, 601, 15, 49, 53), Iacomi Mihail (E : 2203, 07, 09, 28, 31, 36, 37, 47 ; 6510, 16, 36, 27, 54, 61, 609, 15), Lica Ioan (E : 2228, 36, 61, 63 ; 6583, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 82), Pascal Szelian (E : 2236, 37, 45, 63, 79 ; 6670, 73, 76, 77, 80, 820, 22), Pînzaru Gheorghe (E : 2230, 36, 60, 63 ; 6580, 86, 701, 09, 15, 70, 74, 76), *Popa Eugen* (16603, 07, 09, 13, 15, 16, 18, 22, 24, 25, 34, 41, 43, 46, 48, 49, 55—57, 59,—67, 70—81, P), Rusu Gheorghe (E : 2231, 36, 45, 62, 63 ; 6583, 86, 601, 09, 15, 63, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 81), Sandu Mihai (6670, 71, 73, 74, 76, 77, 80—82 E : 2230, 36, 37, 45, 60, 61, 63, 64), Tîrdea Ioan (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45, 61, 63 ; 61, 63 ; 6601, 09, 15, 70, 74, 76, 77, 80, 81, 83). Cl. X. Alupului Neculai (6510, 16, 19, 22, 61, 63, 80, 86, 97, 601, 09, 18). Cl. X. Botez Constantin (6563, 83, 86, 609, 15, 71, 73, 74, 76, 77, 82R, Dămătăr Andrei (6667, 70—78, 80, 81, 85, 92, 95, 97), Pascaru Andrei (6582—84, 86, 60, 601, 09, 15, 70, 73—77, 80), Sărmăşanu Zaharia (6554, 61, 63, 67, 80, 83, 85—88, 601, 09, 15). Cl. XI. Rădulescu Savin (6504, 07, 10, 12, 16, 19, 22, 26, 39, 46, 63, 66).

Ş. m. cl. VII. Bezneagă Adina (E : 2215, 16, 18, 20, 22, 23, 27, 32, 30, 43), Daneliuc Cristina (E : 2220, 22, 27, 32, 33, 35, 38, 43, 47), Gheorghiu Monica (E : 2210, 11, 13, 15, 16, 1i, 20, 32), Rudu Doina (E : 2201, 06, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 26, 32, 33, 35, 38 40, 42, 43, 47, 48, 50, 52, 54, 58). Cl. VIII Tomozei Mihaela (E : 2220, 23, 24, 29, 32, 36, 40, 43).

Ş. m. 7 cl. VI. Ananiescu Carmen (E : 2233, 25, 38, 42, 43, 45—50, 52—54, 58, 59), Bălan Valerica (E : 2224, 32, 33, 48, 50, 52, 53, 58), Boiciuc Lidia (E : 2210, 13, 15—17, 33, 40, 43), Cehan Mihaela (E : 2220, 24, 31—33, 35, 40, 42, 43, 47), Crulicovski Adriana (E : 2220, 24, 26, 31—33, 35, 40, 42, 43, 45, 47—50, 52, 53, 58, 59), Lazbă Tudor (E : 2232, 33, 42, 43, 48, 49, 52, 54), Mardare Corneliu (E : 2220, 32, 35, 40, 48, 52, 58, 59), Păduraru Gabriela (E : 2220, 23, 24, 32, 40, 43, 48, 50, 53, 59), Psait Ecaterina (E : 2220, 24, 26, 32, 33, 35, 39, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 50, 52—54, 58, 59), Sireteanu Georgel (E : 2220, 23, 43, 48, 50, 52, 58, 59), Vulpoiu Grigore (E : 2210, 13, 15—17, 20, 24, 32, 33, 35, 40, 42, 47). Cl. VII. Băsescu Luminiţa (E : 2211, 18, 23, 33, 40, 42, 43, 47), Bîrlădeanu Dorel (E' : 2220, 22, 24, 25, 32—34, 40, 42, 43, 47), Groapă Ioana (E : 2210, 11, 15—18, 20, 22, 24, 27, 32), Petrăchioaie Doina (E : 2210, 11, 13, 17, 20, 26, 27, 32, 33, 38, 40, 42, 43, 47). Cl. VIII. Adomnicăi Minodora (E : 2213, 19, 30, 32, 33, 38, 40, 43, 45, 47), Curteanu Nicolae (E : 2213, 15—18, 20, 24, 25, 27, 32, 40, 43), Enache Dumitru (E : 2232, 33, 35, 36, 38, 42, 46—48, 54, 63), Florescu Nicoleta (E : 2211, 18, 22, 32, 33, 40, 42, 43, 61).

Ş.m. 8 cl. VI. Bucholtzer Chtistine (E : 2235, 40, 42, 43, 47, 49, 50, 54). Dl. VII. Hogea Valentin (E : 2210, 11, 15, 16, 26, 33, 35, 43). Cl. VIII. Livădaru Iosif (E :2233, 36, 40, 43, 48, 49, 51, 63, 68). Cl. X. X. Baraboi Adrian (6467, 525, 27, 31, 36, 58, 60, 61, 63, 582, 83, 85, 96, 88, 609, 15, 39, 70, 71, 73, 75, 76, 77, 80), Creţu Ovidiu (6504, 07, 10, 19, 22, 25, 26, 83, 83, 96, 601, 05, 09, 15).

IBĂNEŞTI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VIII. Matei Maria (E : 2227, 32, 38, 40, 42, 43, 48, 55, 58).

ILIA. Ş.m. cl. XI. Vlad Virgil (6549, 51, 54, 55, 59, 65, 80—84, 605, 15).

INEU. Ş.m. cl. IX. Mîrşu Rodica (E : 2209, 19 ; 6510, 54, 60, 61, 63, 99, 601, 09, 15). Cl. X. Vinga Gh. (6507,10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 36, 54, 609). Cl. XI. Pătruţ Popa Ion (6580—83, 85—88, 90, 93, 99, 601, 05—07, 09, 15, 17, 19, 22, 23,

28, 34, 37, 43, 44, 48, 50, 55, 57, 65, 80, 72—77).

IONAENI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VIII. Hergheligiu Petru (E : 2233, 40, 43, 46, 48—50, 53, 58), Lupu Elena (E : 2238, 40, 43, 46, 48—50, 53, 58).

JUPINEŞTI (Oltenia). Sc. 8 ani cl. VIII. Zănescu Constantin (E : 2210, 11, 12, 15——18, 20).

LIPANEŞTI (Ploieşti). Ş.m. cl. IX. Miu Vasile (E : 2228, 29, 31, 36, 37, 45, 61, 63; 70, 73. 76, 77, 80 83).

LUGOJ. Ş.m.l cl. X. Ploscaru Gabriel (6566, 83, 86, 601, 12, 41, 48, 59, 65, 80—78, 98). Cl. XI. Brîndă Rodica (6549—52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 66, 67, 71, 76, 77).

Ş.m. 2 cl. IX. Orbulov Petru (E : 2229, 45, 61, 63; 6670, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 80). Cl. X. Frenţi Elena (6526, 53, 54, 61, 63, 82, 83, 86, 87, 99 601, 09, 15, 46, 49, 70——78), Guleran Mircea (6582, 83, 609, 15, 70, 71, 73—76, 80, 85, 720, 22). Cl. XI. Jurac Ioana (6550—53, 57—60, 65, 67, 68, 70, 74, 76, 79—86, 88, 90, 93, 95, 99, 501, 05, 07, 09, 14, 30, 36, 41, 44, 46, 57, 59, 63). Casa de copii şcolari. Siniţan Sidonia (E : 2215, 19, 33, 36, 40, 42, 43, 45).

LUNGULEŢU (Răcari, Bucureşti). Şc. 8 ani cl. CII. Stanciu Dumitru (E : 2210, 14, 16—18, 20, 21, 28, 32).

MĂRGINENI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VIII. Piroi Ion (E : 2220, 22, 32, 48, 50, 57, 58, 63).

MEDGIDIA. Ş.m. 2 cl. IX. Bolma Ion (E : 2228. 30, 36, 37, 45, 61, 63; 6584, 99, (E : 2228, 30, 36, 37, 45, 61, 63; 601, 09. 15, 39, 46, 70, 73, 76, 75, 80), Pelican Gh. (6561, 83, 85, 86, 609, 15, 53, 57; E : 2228, 29, 30, 36, 37). Cl. X. Jeaca Mihai (6583, 86, 99, 60109, 15, 670—77, 80, 81).

MEDIAŞ. Ş.m. 2 cl. IX. Vanea Adrian (E : 2236, 45, 63; 6586, 601, 15, 46, 70, 73, 76, 77, 80). Cl. X. Popescu Clement (6553, 54, 59. 61, 63, 67, 83—86, 601, 05, 09, 27). Cl. XI. Orban Elek (6551, 54, 55, 57, 61—62, 67, 82. 86, 87, 618).

MEHADIA. Ş.m. cl. X. Vrăjitorul Isac (6582, 83, 86, 88, 99, 601, 07, 09, 16, 18, 41, 44, 63, 70, 71, 73, 75—77, 82, 93). Cl. XI. Miloş Iancu (6582, 85, 86, 609, 15, 44, 53, 59, 70, 71, 73—77, 82).

MIERCREA CIUC. Ş.m. cl. X. Filop H. (6587, . 607. 16, 24, 70, 71, 73, 76, 707, 20, 22, 56).

MIERLEŞTI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VII. Nicola I. Dumitru (E : 2211, 17, 22, 25, 32—34, 36).

MÎNDREŞTI (Suceava). Şc. 8 ani cl. VIII. Constantin Ana (F : 2248—50, 55, 58, 59, 61—63).

MIZIL. Şc. 8 ani cl. VI. Popescu Nicolae (E : 2215—18, 24, 32, 35, 45). Cl. VII. Bogdan Paul (E : 2210, 11, 15—19, 26, 32, 33, 40, 43, 43, 45), Oprişan Vasile (E : 2210, 11, 15—18, 26, 32, 33, 33, 43, 45), Stanciu Eliza (F : 2211, 15—17, 27, 32, 33, 40, 43, 45), Vlădăreanu Doina (E : 2210, 11, 13, 15—18, 26, 32, 33, 38, 40, 43, 46—48, 50, 52, 54, 55, 58, 59). Cl. VIII. Beşliu Ion (E : 2213, 15. 17, 19, 20, 27, 32, 33, 36, 45, 48), Diaconescu Marian (E : 2232—36, 40, 42, 43, 54. 58, 63), Ioan Benedict (E : 2210, 13, 15, 17—20, 23, 28, 31, 32, 36, 38, 42, 45, 48, 52, 53, 58, 63).

MOINEŞTI (Bacău). S, m, cl. VIII. Grecu Victor (E : 2213, 15—17 , 20, 21, 28, 32, 33, 34, 36, 40, 43), Tănase Anişoara (E : 2213, 15—17, 20, 27, 32, 40, 43), Vrînceanu Gabriela (E : 2210, 11, 13, 15—21, 23, 24, 26, 27, 31, 32). Cl. IX. Mihai Nicolae (E : 2230, 36, 63, , 80; 6583, 86, 615, 70, 73, 76, 720, 22, 24).

MOVILIŢA. Şc. 8 ani cl. VIII. Popa C. Jana (E : 2236, 38, 42, 43, 48, 54, 57, 63).

NADRAG. S.m.cl. X. Babescu Gheorghe (6583—86, 601, 06, 07, 09, 15, 16, 31, 34, 44, 70, 73), Bernenaţu Nicolae (6583, 85, 99, 601, 09, 15, 56, 59, 70, 71, 73, 75, 76, 80), David Nicolae (6580, 82, 88, 99, 605, 07, 16, 31, 34, 48, 56, 59, 63, 64, 93, 95), Todor Ion (6584, 85, 601, 08, 16, 31, 34, 44, 63, 70, 71, 73. 75, 76, 80, 93, 95). Cl. XI. Crăciunescu Horia (6582, 605, 09, 15, 31, 33, 70, 71, 73, 75, 76, 80, 82, 86, 95).

NĂSĂUD. Ş.m. cl. IX. Ceuca George (E : 2228. 29, 36, 45; 6583—86, 99, 601, 06, 09, 15, 39, 46), Iloaie Vasile (E : 2228, 36, 37, 6561. 63, 59, 86, 601, 09, 15, 46, 49, 53), Tîmbulea Leon (E : 2228, 36, 37; 5596, 60, 61, 63, 71, 99, 601, 09, 15, 46, 53). Cl. X. Kiselstein Aurel (6583, 601, 09, 15, 16, 34, 70. 71, 73, 75, 76, 77, 80, 93), Moraru Ion (6582—88, 99, 601, 05, 09, 15, 21, 41, 44, 46, 70, 71, 73, 75—77, 81).

NEGOŞTINA (Suceava). Sc. 8 ani cl. VIII. Abramiuc Vasile (E : 2232, 33, 35, 36, 38, 40. 42, 43, 47, 48. 61. 63).

NEGREŞTI. Ş.m. 2 cl. VI. Seleveschi Ana (E : 2220, 27, 33, 38, 40, 43, 48, 50) cl. X. Big. Mihai (6646, 67, 69, 69.78, 80. (703).

NEGRU VODĂ (Dobrogea). S.m.cl. VII, Buştiuc Adrian (E : 2217, 20, 27, 32, 33, 35, 35, 38, 46).

NEMTIŞOR (Bacău). Şc. 8 ani cl VII. Axinte Marta (E : 2248, 51, 52, 54—58).

NICOREŞTI (Tecuci). Sc. 8 ani cl. VI. Oprea Dorin (E : 2220, 27, 32, 40, 43, 47—49) 54).

NOVACI (Oltenia). S.m. cl. VII. Ciorogaru Nicolae (E : 2197—99, 206, 15—18, 20, 22, 24, 26, 27, 31—33), Comănescu Valentin (F : 2220, 22, 24—27, 31, 32). Cuţuliga

Irinel (E : 2220, 24—27, 32, 43, 47), Berbecel Dumitru (E : 2220, 22, 24—27, 32, 43, 46, 47), Porumbel Ion (E : 2220, 22, 26, 27, 31—33, 47), Toader A. Ionel (E : 2220, 22, 24—27, 31—33, 47). Cl. VIII. Chiriac A. (E : 2226, 27, 31—33, 38, 40, 43), Giurgiulan Ion (E : 2220, 27, 31—33, 36, 38, 40, 43).

ORADEA Ş.m. 4 cl. X. Bologa Florin (6580, 82—87,99, 601, 07, 09, 46, 70, 71, 73, 76), Hamza Gh. (6583—85, 609, 15, 70, 71, 73, 75—77, 85). Cl. XI. Fleisher Gh. (6553—57, 65, 67, 72, 74, 80, 82, 86, 87, 97, 601, 06, 09, 10,16, 46, 63).

Ş.m.l. Taralas Ştefan (65 54, 58, 61, 63, 67, 97, 19, 501, 05, 07, 09, 15, 16, 39, 41, 53). Cl. XI Gavra Cristian (6554—56, 67, 74, 86, 97, 60, 05, 09, 15, 16).

ORLEŞTI (Argeş). Şc. de 8 ani cl. VI. Florescu Constantin (2215, 23, 25, 32, 33, 38, 40, 43, 46, 47), Preoteasa Valentin (16, 20, 25, 27, 32, 33, 40, 42, 43, 47), cl. VII Dodu I. Margareta (2220 24, 27, 33, 38, 40, 42, 43), cl. VIII Jitianu Gh. Maria (2215, 16, 20, 24, 26, 27, 32, 33, 40, 42, 43), Stănculescu Gh. Filofteia (2215, 20, 24, 26, 27, 32, 33, 41, 42, 43).

ORLEŞTI (Argeş). Şc. 8 ani cl. VII. Pistol M. Gh. (E : 2211, 14, 15—17, 20, 27, 31, 32, 33, 40, 42, 43, 47).

OŢELUL ROŞU (Banat), Ş.m. mixtă cl. VII, Tăroată Anghel (2213, 15, 16, 18, 33, 40, 43), cl. VIII Tăroată Gheorghe (2224, 27, 31, 33, 40, 42, 43). Cl. XI. Fiat Radu (6648, 70, 71, 73—77, 710, 15, 20, 22). 40, 42, 43).

PANCIU (Galaţi) Ş.m. „Ion Slavici" cl. VII, Cumpănet Mariana (2215, 16, 20, 22, 24, 27, 33, 40, 42, 43). Ioniţă Marin (2234, 33, 38, 39, 42, 43, 46—48, 54), Cazacu Mariana (2210, 11, 20, 22, 24, 25, 33, 34, 40, 43), Luca Georgeta (2233, 42, 47, 48—50, 52, 54, 58, 59), Măru Mariana (2204, 10, 11, 22, 24, 33, 40, 42, 43), Nichifor Rodica (2185), 92, 94, 215, 16, 17, 25—27, 32, 35, 42, 47, 58, 88), Popa Marcl (2236, 3,9459, 63), Popa Dan (2220, 23—27, 31, 33, 35, 38, 42, 48), Vidraşcu Dorina (2211), 20, 24—26, 27, 32, 35, 48, 40, 42, 43, 47—50, 52) cl. VIII Alban Silviu (2220, 27, 32, 33, 35, 40, 42, 43, 48, 59), Feraru Natasa (2210, 11, 22, 24, 25, 33, 34, 40, 43), Ghelor Dan (2222, 24, 27, 32, 35, 36, 40, 42, 43, 48), Nistor Adriana (2215, 20, 24, 27, 32, 33, 39, 43, 55), Pătrăşcanu Ana (2233, 35, 38—40, 42 43, 47, 48, 54), Găman Gică (2220—22, 32, 33, 35, 36, 38, 45—47).

PĂNTICEU (Cluj) Sc. de 8 ani cl. VIII Bucşa Iuluţ (2210, 11, 17—19, 26, 32, 33), Tîmplea Maria (2210, 11, 12, 15, 17—19, 32).

PARVA. Cl. VII. Scurtu Ion (E : 2194, 97, 204, 20, 24, 32, 36, 40, 42, 43). Cl. VIII. Podobea Ana (E : 2220, 24, 32, 36, 37, 42, 46, 47) , Pop Teoora (E : 2204, 06, 14, 20, 24, 32, 36, 37, 39), Scurtu Vasile (E : 2220, 24, 32, 36, 37, 39, 30, 42, 43), Rus Anton (E : 2220, 24, 32, 36, 37, 39, 40, 42, 43).

PĂTĂRLAGELE. (Bucureşti) Ş,m. cl. IX. Cîrstia Constantin (6586, 99, 601, 09, 15, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 85). Cl. XI. Pavel Dumitru (6580, 607, 10, 22, 30, 31, 33, 34, 39, 41, 42, 44, 46, 46, 48, 48, 53, 56, 63, 66, 67, 70, 80, 81, 95, 97).

PĂUNEŞTI (Bacău). Şc. 8 ani cl. VI. Anghel Aneta (E : 2198, 200, 01, 02, 10, 11, 13, 16, 20, 24, 26, 27, 31, 32, 40, 47), Ionat Viorica (E : 2198, 200, 01, 02, 10, 11, 12, 32), Chistoc Ion (E : 2201, 16, 20, 24, 25—27, 43, 45), Negru Viorica (E : 2198—201, 11, 13, 16, 17, 20, 25—27, 32, 40, 45), Nica Lucica (E : 2198, 200, 06, 10, 11, 13, 32), Nocav Maria (E : 2198, 99, 201, 02, 10, 13, 20, 24—27, 33, 40, 43, 45, 47) . Cl. VII. Berbece V. Maria (E : 2211, 13, 16, 17, 24, 27, 31, 47), Boga n Mariţa (E : 2213, 20, 24, 25, 32, 33, 38, 40, 42). Georghiu Gqbriela (E : 2220, 24, 26, 31, 33, 35, 40, 43, 45), Novac Maria (E : 2214, 17, 18, 21, 22, 24, 31—33, 40), Rizuc Rodica (E : 2224—26, 33, 35, 40, 43, 45, 47). Cl. VIII. Baciu Virginica (E : 222, 24, 25, 31, 33, 35 40, 43), Berbece I. Maria (E : 2221, 25, 26, 29, 33, 40, 43, 46), Gîdea Otilia (E : 2216, 24, 25, 31, 33, 40, 43, 45—47), Ignat V. Ileana (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 21), Neagu Elena (E : 2221, 22, 25, 26, 33, 35, 37, 42, 43), Popa N. Ionel (E : 2210, 15—17, 20, 25, 27, 40), Sandu Victoriţa (E : 2221, 22, 25, 26, 33, 35, 40, 42, 43, 45), Vişan Ştefan (E : 2219, 22, 25, 26, 40, 45, 47).

PETROŞENI. S.m. cl. IX. Paicu Nicolae (6553, 54, 58, 60, 61, 63, 80, 83, 84 86, 88, 97, 601, 05, 07), Pătrăianu Sorin (6554, 50—63, 79, 83, 86, 96, 99, 601, 09, 15, 46, 47, 49, 53, 63), Stan Mihai (6554, 61, 63, 71, 83, 84, 96, 99, 601, 06, 09, 10, 15, 17, 31, 35, 42, 53).

PIANUL DE SUS. (Hunedoara) Cl. yIII. Voinea Ioana (E : 2210, 13, 20, 32, 33, 40, 42, 43).

PIATRA NEAMŢ. Şc. 8 ani cl. VIII. Ioinovici Adrian (E : 2220, 24, 26, 27, 32, 33, 40, 42, 43).

Ş.m. 1 cl. XI. Mezaroş Vasile (6503, 04, 07, 10, 12, 13, 16, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 29, 31, 32, 34, 36, 38—40).

PITEŞTI. Şc. 8 ani nr. 8 cl. VII. Ilie Filofteia (E : 2210, 13—19) Cl. VIII. Blaj Cristian (E : 2210, 11, 12—19), Stoenescu Gh. (E : 2198—203, 06—09). Şc. 8 ani nr. 10. Mîduleţeanu George (E : 2233, 35—38, 40, 42, 43, 45, 47—52, 54,3, 45, 47—52, 54, 58, 61, 63). Şc. 8 ani nr. 16 cl. VII. Surcel Victoria (E : 2210, 11, 13, 15—19). Şc.8

OROSZLÁNOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

ani nr. 17 cl. VI. Popescu Cristian (E : 2210, 11, 13, 15—20, 24, 32).

Ş. m. 1. cl. IX. Braniştе Marcelus (6510, 19, 25, 63, 80, 83, 85, 86, 601, 09), Lazăr Mircea (6583, 86, 602, 39, 45, 70, 73—77, 80 82). Cl. X. Pietreanu Cristian (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 25, 27, 61, 63, 83, 85), Popa Marin (6583, 86, 96, 609, 15, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 80—82, 85, 92, 95). *Lungulescu B. Eugen* (6497, 505, 06, 08, 09, 13, 14, 20, 21, 24, 31, 32, 34, 38 42, 46, 49, 51, 53—55, 57, 58, 60—63, 65—67, 69—72, 76—91, 96, 97, 99, 601, 05—07, 10, 15, 16, 18, 22, 24, 48, 30, 33, 34, 38 39, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 51, 53, 55—57, 59, 61, 62, 67—78, 80—85, 91, 93, 95—98, 703, 06—09, p).

Ş.m. 2 cl. VII. Ionescu Radu (E : 2173, 84, 91, 93, 202, 06, 08, 10, 11, 16—18, 20, 33, 38, 46).

PLOIEŞTI. Sc. 8 ani nr. 9 cl. VII. Chiru Dan (E : 2216, 19, 32, 33, 40, 42, 543, 45). Cl. VIII. Moisescu Valeria (E : 2210, 11, 13, 15—20, 32, 36), Niţă Stelian (E : 2210, 11, 13, 15—20, 32).

Şc. 8 ani nr. 21 cl. VII. Antoni Lina (E : 2199, 202, 15, 16, 22, 32), Circioagă Teodora (E : 2222, 31, 36, 39, 40, 48, 50, 52, 58, 63, 70, 76), Dranc Dragomir (E : 2203, 05, 13, 15—17, 29), Horos Dorin (E : 2248, 50, 52, 54, 55, 57, 58, 63), Toma Liviu (E : 2210, 11, 13—18).

S.m.1 cl. VI. Busuioc Costel (E : 2226, 27, 35, 46—48, 50, 51). Cl. VII. Alecu Maria (E : 2211, 15, 17, 32, 35, 40, 43, 47), Andreescu Mihai (E : 2211, 16—18, 33, 40, 42, 43), Enescu Daniela (E : 2220, 27, 32, 33, 35, 39, 40, 43), Gafiţeanu Liliana (E : 2220, 22, 25, 27, 31, 32), Iacob Lucian (E : 2211, 16—18, 27, 32, 33), Mihalache Cristina (E : 2215, 20, 22, 22, 33, 35, 40, 43), Niculescu Gheorghe (E : 2220, 21, 23, 31, 33, 35, 38, 40,43, 47), Olteanu Gheorghe (E : 2248—50, 52, 54, 55, 58, 59), Petrea Cristina (E : 2210, 11, 15—20). Cl. VIII. Alexandrescu M. (E : 2232, 33, 46, 40, 42, 43, 46, 47, 63), Andreescu Valeria (E : 2220, 25, 32, 33, 36, 38, 40, 42, 46), Bădăluţă Virginia (E : 2227, 31, 32, 43, 54, 57, 58, 63), Beciu C. Ion (F : 2232, 33, 48, 50, 54, 58, 63), Beldea Vladimir (E : 2233, 43, 48, 49, 53, 58), Căpătoiu Mariana (E : 2220, 21, 23, 25, 27, 31, 32, 43), Chirulescu Cristina (F : 2240, 43, 48, 49, 51, 54, 56—58, 63), 63), Cicu Adriana (E : 2227, 31, 32, 48, 54—58, 63), Cristescu Olga (E : 2220, 32, 33, 36, 43, 50, 5656, 57, 61), 48, 50, 57, 63, 78), Cuciureanu Rodica (E : 221, 25, 27, 31, 32, 40, 43, 63), Dinca V. Raluca (F : 2227, 29, 32, 35, 45, 48, 63), Dincă Cornelia (F : 2220, 29, 32, 35, 42, 45, 48, 63), Dobrescu Laurenţia (E : 2236, 43, 48, 50, 54, 55, 57, 63), Dumitrescu Virgil (E : 2233, 38, 43, 47, 48, 52, 55, 58), Gafiţeanu Carmen (E : 2220—24, 27, 32, 33, 43), Georgescu Mihaela (F : 2233, 36, 43, 48, 58, 61, 63), Georgescu Octavian (E : 2220, 21, 29, 31, 33, 40, 42, 43), Ionescu Virgil (F : 2232, 33, 43, 48, 54, 58, 61, 63), Iordache Sorin (E 2220, 25, 27, 32, 33, 38, 42, 58, 63), Magda Leonardo (E : 2220, 27, 39, 42, 48, 49, 54, 63), Marinescu Daniela (F : 2210—19), Marinescu Marilena (E : 2206, 10, 11, 15—18, 40, 43, 48, 57, 59, 63), Mesch Dumitru (E : 2220, 27, 32, 48, 58, 61), Mircescu Gabriel (F : 2206, 13, 18, 24, 27, 33, 35, 36, 47, 48, 50, 63), Nastasiu Oana (E : 2220, 21, 23, 25, 27, 31, 32, 43), Nicolae N. Emil (E : 2220, 31, 32, 48, 50—52, 57, 62, 63, 015), Nicolescu Mariana (E : 2220, 32, 35, 39,s 42, 47, 48, 54, 58, 63), Nuţescu Adrian (E : 2231, 32, 33, 42, 47, 48, 51, 52, 54, 58, 63), Propoaie Marilena E :1 2222, 32, 35, 43, 46, 48, 50), Prislopeanu Dan (E : 2220, 21, 28, 33, 34, 36, 37, 40, 42, 43), Rothlender Luminiţa (E : 2223, 33, 35, 40, 43, 45, 48, 63), Stăniloiu Aurelia (E : 2221, 32, 35, 40, 43, 48, 54, 63), Tămăduianu Daniela (E : 2220, 32, 33, 36, 40, 43, 48, 58, 63), Teodoroiu Elena (E : 2220, 21, 23 23, 25, 32, 33, 39, 43), Vlang Cristina (E : 2221, 25, 27, 31, 32, 40, 43), Zevedei Daniela (E : 2220, 32, 40, 42, 43, 47, 48, 58, 63). Cl. IX. Prelipceanu Minodora 6554, 80, 8e3, 97, 89, 601, 15, 18, 22, 39, 46, 49, 53, 65). Vărzaru Liliana (6670, 71, 73, 74, 76, 77, 81, 82, 609, 15). Cl. X. Alboteanu Radu (6654), 58, 60, 62, 63, 67, 72, 82, 83, 87, 97, 99, 601, 13, 22, 39, 44), Cosma Tudor (6510, 19, 22, 54, 61, 63, 65, 67, 70), Pană Constantin (6601), 09, 15, 19, 20, 31, 34, 70, 71, 73, 75, 76, 77, 83), *Stănescu Dan* (6446, 49, 54, 71, 74, 79, 93, 96, 51, 53, 55, 56, 59, 60, 62, 64, 65, 79, 82—88, 96, 97, 99, 601, 07, 09, 10, 13, 16, 18, 21—23, 30—30, 39, 41—44, 46—49, 51, 53, 56,57, 59—64) 67, 68, 71, 71—78, 80,—85, 89——98, 801, 07) *Vasiliu Constantin* (6531, 44, 45, 56, 60, 64, 65, 72, 83—88, 99, 601, 05—07, 09, 15—18, 21, 31, 32, 36, 39, 42—44, 46, 48, 53, 66, 67, 70—77, 80, 81, 85, 89, 92, 95, 97, 98), Voicu Constantin (6601, 07, 09, 20, 31, 34, 34, 61, 71, 72, 75, 77, 70, 82,, 85, 96). Cl. XI. Curcanu Laurenţiu (6583, 87 634, 44, 70,—77, 85, 88, 92, 601, 05, 07), Vasiliu Mihai (6605, 16, 34, 36, 38, 39, 45, 51, 57, 63, 65, 67, 71, 74, 82, 87, 88, 99, 609). *Simion Gh. Gh.* (6632, 35, 43, 44, 45, 53, 57, 51, 64, 65, 67, 68, 70,71—78, 80—85, 89——98, 700,07.

S.m.2 ♀ VI. Curteanu Sanda (E : 2197, 98, 201, 06, 10, 15—18), Mignea Dănuţa (E : 2198, 202, 06, 15—18), Niţu Emilia (E : 2198, 201, 02, 06, 10, 15—17). Cl. VII. Dumitrescu Mihai (E : 2234, 35, 46, 48, 50, 51, 55, 58, 61), Lupănescu Costin (E : 2210, 11, 13, 15—18, 33, 43). Cl. VIII. Aron Cristian (E : 2220, 24, 32, 33, 45, 47, 48, 58.

1965 SEP 28

63), Cătuneanu Irina (E : 2233, 36, 42, 43, 45, 47, 54, 61, 63), Cătuneanu Radu (E : 2233—36, 42, 43, 45, 47, 61, 63), Dima Mariana (E : 2220, 25, 27, 31—33, 35, 48, 50, 61, 63), Militaru Marian (E : 2220, 24—27, 31—33, 35, 36, 47, 48), Sîrbu Dana (E : 2220, 24—27, 31, 32, 48, 50, 52, 58, 59, 61, 63), Temistocle Dana (E : 2220, 31—33, 36, 42, 43, 45, 47). Cl. IX. Căpoiu Florin (6580, 83, 86, 97, 601, 09, 15, 39, 46, 49, 5, 70, 71, 73, 74, 76, 79,—83, 85). Cl. X. Sinu Cornel (6553—55, 58, 62, 63, 67, 72, 79, 82, 83, 87, 97, 509, 15, 22), Stan Emil (6551, 57, 64—66, 70, 73—75, 77, 78, 87, 88, 95, 99, 607, 14, 16, 19, 34, 39, 41, 44—46, 48 57, 63, 63 65), *Steriu Dan* (6553—55, 58, 63 66, 67, 69, 71, 72, 79, 80, 82—88, 97, 99, 601, 05—07, 09, 15—17, 22, 31, 46, 53, 65), Teodorescu Dan (6551, 55, 61, 63, 65, 74, 82, 85, 87, 601, 09, 44, 59). Cl. XI. Moraru Gheorghe (6551, 58, 61, 65, 82, 83, 85, 87, 601, 15, 44), Radu Vasile (6591, 96, 600, 04, 17, 27, 31, 34, 37, 40, 54, 66, 67, 69, 70, 72, 75, 76, 78, 79, 81—83, 85, 89, 90, 82, 93, 97—99, 703, 04, 06, 07, 09), Răducanu Alexandru (6531, 58, 61, 63, 65, 82, 83, 85).

ERATĂ. — La problema 6959 pag. 264, a doua ecuație este $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă sunoscut aceastâ publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I.P. „Informația" — c. 1930

INDEX 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) — august 1965

8

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
Anul XVI (II), nr. 8 — august 1965

SUMARUL

Pag.

1. Perspectivele măreţe deschise de congres de Acad. Nicolae Teodorescu 337
2. Polinoame de mai multe variabile de Atanasie P. Petrescu, Craiova 340
3. Note matematice de O. Bîscă, Craiova, şi Popescu Eleodor, T. Severin 346
4. Probleme rezolvate (6564, 6568, 6572, 6573, 6598, 6600, 6607, 6612 349
5. Chestiuni de examen (7048—7074) 356
6. Probleme propuse (7075—7118) 360
7. Probleme propuse pentru clasele V—VIII (E : 2354—2366) 368
8. Din experienţa cercurilor de elevi de Cornelia Tuţescu, L. Gîdea, A. Rusu, Craiova 370
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme 374

ANUL XVI, 8 AUGUST

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Oltenia a Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România.

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent : *Dincă N.*, profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Muşat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăviţu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

URSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVI (II), nr. 8 august 1965

PERSPECTIVELE MĂREŢE DESCHISE DE CONGRES

de Acad. *NICOLAE TEODORESCU*

Aşteptat cu încredere şi entuziasm de întregul nostru popor, cel de-al IX-lea congres al Partidului Comunist Român a marcat încheierea glorioasă a unei etape străbătute de oamenii muncii, în opera de desăvîrşire a construcţiei socialiste şi, în acelaşi timp, zorile unei noi etape de înflorire a patriei noastre. Au fost analizate în mod ştiinţific, realizările istorice obţinute prin îndeplinirea sarcinilor fundamentale trasate de Congresul al VIII-lea, în domeniul dezvoltării economiei naţionale, a ştiinţei şi culturii noastre socialiste.

Procesul de industrializare socialistă s-a dezvoltat cu amploare, într-un ritm care a depăşit prevederile iniţiale, cooperativizarea agriculturii s-a încheiat mai devreme cu aproape patru ani, venitul naţional a crescut şi o dată cu el s-a ridicat nivelul de trai material şi cultural al poporului, ştiinţa, cultura şi arta au realizat succese de seamă.

Congresul apare în viaţa noastră socială ca un examen trecut cu strălucire de toţi oamenii muncii din ţara noastră sub conducerea Partidului, în faţa istoriei ; în acelaşi timp s-a stabilit un program măreţ de înflorire a viitorului ţării.

Congresul a trasat şi a aprobat, pe baza unei analize ştiinţifice a realităţilor şi posibilităţilor din ţara noastră, liniile dezvoltării României socialiste în intervalul 1966—1970, el a aprobat toate obiectivele fundamentale, cifrele de control şi sarcinile de viitor din Raportul Comitetului Central şi din Directivele noului cincinal cu privire la dezvoltarea economiei şi a valorificării surselor energetice şi electrificării ţării în viitorii 10 ani.

Dînd o înaltă preţuire realizărilor cercetării ştiinţifice româneşti el înalţă această cercetare la rangul de factor esenţial al dezvoltării societăţii noastre, indisolubil legată de progresul ştiinţei. Acest progres nu e posibil fără dezvoltarea şi perfecţionarea continuă a învăţămîntului de

toate gradele. În ceea ce privește învățămîntul mediu el prevede extinderea acestui învățămînt, care va cuprinde licee de cultură generală și licee de specialitate.

Trebuie să salutăm cu căldură această înțeleaptă prevedere, care va permite creșterea sistematică de noi generații de viitori specialiști bine pregătiți, orientați spre ramurile cărora li se consacră, solidari cu entuziasmul cu care vor pătrunde în cetatea științei, încă din anii adolescenței. Vom putea descoperi și îndruma tinerele talente pe calea însușirii și îmbogățirii cunoștințelor matematice. Învățămîntul universitar va primi studenți înarmați cu mijloacele de investigație și cu pasiunea de înțelegere, de adîncire și fructificare a metodelor, rezultatelor și concepțiilor moderne ale științelor matematice. Raportul prezentat Congresului de tov. N. Ceaușescu, secretarul general al Comitetului Central al Partidului Comunist Român conține pentru învățămînt pasagii vibrante care ne încălzesc inimile și ne stimulează avînturile, ca următorul: „Școala noastră va deveni tot mai cuprinzătoare, oferind tinerilor, largi posibilități de învățătură, în funcție de aptitudinile și dorințele lor, de cerințele economiei și culturii noastre socialiste în plin avînt".

El sună ca un îndemn cald menit să răscolească în inimile elevilor, pasiunea drumului ales de fiecare, după vrerea sa, cu convingerea că fiecare pas va însemna o bucurie, că la capăt îl va aștepta satisfacția realizărilor intime și noi perspective pentru o viață conformă cu aspirațiile sale.

Pentru dezvoltarea bazei materiale a învățămîntului de toate gradele, fonduri însemnate de peste 3,5 miliarde vor sprijini înflorirea acestuia. Cartea de studiu va fi primul dar al poporului pentru fiii săi, căci începînd cu noul an școlar, manualele școlare vor fi gratuite și pentru elevii din licee. Cît de departe sîntem de anii învățăturii noastre, a celor din generațiile mature, cînd părinții noștri plăteau din greu pachetul cu cărți, în fiecare an, dacă puteau să o facă, iar unii dintre elevi nici nu ajungeau să aibă cărțile lor proprii! Cu cît drag trebuie să învețe elevii zilelor noastre pe cărțile ce le sînt dăruite de întregul nostru popor, care așteptă de la ei, noi și temeinice realizări în anii care vor să vină!

Știința românească va încorpora pînă în 1970, peste 30.000 de cercetători și va primi peste 7 miliarde de lei pentru dezvoltarea cercetărilor. Iată ce perspective de vis se deschid tineretului studios, care va merge să întărească pînă la efectivul de trei divizii, armata cercetătorilor. Cele 1,5 miliarde de lei destinate construirii de noi institute și laboratoare înzestrate cu aparatura cea mai modernă reprezintă un potențial ce trebuie să se transforme în cuceriri cu care să ne mîndrim. Ele vor fi cuceririle acestor divizii ale științei, în care tineretul va putea da liber avînt energiei și talentului său.

Reflectînd cu emoție, la tot ce ne înfățișează ca realizări și ne trasează ca sarcini pentru viitorul de mîine, cu gîndul la perspectivele ce ni se deschid, simțim cu toții că socialismul a repurtat în patria noastră, victoria definitivă.

Societatea de științe matematice din Republica Socialistă România contribuie, de la fundarea ei, printr-o muncă intensă, la ridicarea nivelului de cunoștințe și al potențialului tehnic al elevilor, prin articole, note, probleme interesante și sistematic prezentate. În același timp, și-a adus contribuția ei la perfecționarea continuă a pregătirii profesorilor din punct de vedere științific și didactic, dezbătînd probleme profesionale de mare interes, menite să deschidă orizontul profesorilor și pedagogilor.

Congresul a pus pentru învățămînt, numeroase sarcini de mare amploare, printre care și aceea a modernizării acestuia prin legarea lui cît mai strîns de practică și de progresele actuale ale științei și tehnicii. Îi revine deci Societății noastre sarcini corespunzătoare, cum este și aceea de a contribui prin formele ei specifice de lucru la modernizarea învățămîntului matematic, care privește atît pe elevi, cît și pe profesorii lor.

Adaptarea învățămîntului matematic la cerințele dezvoltării economice în etapa ce se deschide constituie de asemenea, o problemă căreia Societatea va trebui să-i consacre competența și energia membrilor săi. Nu trebuie să uităm că învățămîntul este cheia pregătirii în toate sectoarele vieții sociale.

Gazeta matematică, seria B, adresîndu-se elevilor va trebui să publice materiale care să aducă aportul lor la punerea în practică a acestei sarcini de răspundere privind modernizarea învățămîntului matematic. Prin articole, note, probleme, Gazeta matematică trebuie să-i ajute pe elevi să-și ridice nivelul de pregătire apropiindu-i cît mai mult de obiectivele măreție ale învățămîntului nostru, care are ca sarcină esențială de a pregăti cadre capabile să depună eforturi rodnice pentru realizarea sarcinilor economice și social-culturale trasate și aprobate de Congres.

Avem o țară nouă, puternică și avîntată în mersul ei înainte și această țară trebuie să poarte numele ce i se potrivește, acela de Republică Socialistă România.

Este o fericire să pătrunzi în viață într-o astfel de țară făurită de poporul muncitor sub conducerea Partidului și această fericire se oferă tineretului nostru în zorile pe care le luminează Congresul al IX-lea. În perspectiva lor, sărbătoarea națională a eliberării — ziua de 23 August — capătă anul acesta, o semnificație deosebită, de înălțare și bucurie, pe care numai revărsarea entuziasmului și recunoștinței unanime o pot sublinia.

POLINOAME DE MAI MULTE VARIABILE

PETRESCU P. ANASTASIE

1. Polinom identic nul

Definiție. Se numește polinom identic nul orice polinom care are valoarea zero pentru orice sistem de valori date variabilelor.

Este bine să observăm că un polinom de mai multe variabile se anulează pntru o infinitate de sisteme de valori date variabilelor independente, fără ca el să fie identic nul. Exemplu, în polinomul:

$$P(x, y) = 5x^2 - 10\,y^2 - 4xy + 2x + 6y - 3$$

putem da lui y valori la voia noastră și să calculăm rădăcinile polinomului în x obținut de fiecare dată. Căpătăm astfel o infinitate de sisteme de valori care anulează acest polinom și totuși el nu este identic nul.

Condiția necesară și suficientă ca un polinom de mai multe variabile să fie identic nul este ca toți coeficienții lui să fie nuli.

Este evident că condiția este suficientă, căci, dacă toți coeficienții sînt nuli, valoarea polinomului este zero pentru orice sistem de valori atribuite variabilelor.

Fără a da o demonstrație riguroasă, ne putem convinge ușor, prin metoda reducerii la absurd, că condiția este și necesară. Să presupunem, că un coeficient ar fi diferit de zero și toți ceilalți egali cu zero. Atribuind tuturor variabilelor o aceeași valoare, să zicem 1, valoarea polinomului s-ar reduce la valoarea acelui coeficient deci polinomul n-ar mai fi identic nul.

2. Polinoame identice

Definiție. Două polinoame de mai multe variabile se zic identice dacă iau valori egale pentru orice sistem de valori atribuite variabilelor.

Este bine să observăm că două polinoame distincte de mai multe variabile (aceleași) pot avea valori egale pentru o infinitate de sisteme de valori date literelor, fără ca ele să fie identice.

În egalitatea $P(x, y) = Q(x, y)$, dînd lui y o valoare y_0, se obține o ecuație cu necunoscuta x. Orice rădăcină a acestei ecuații asociată cu y_0 formează un sistem de valori care fac ca cele două polinoame să aibă valori egale. Cum y_0 poate lua o infinitate de valori, rezultă că afirmația de mai sus este justificată.

Condiția necesară și suficientă ca două polinoame să fie identice este ca toți coeficienții termenilor unui polinom să fie respectiv egali cu coeficienții termenilor asemenea din celălalt polinom.

Este evident că condiția este suficientă, căci, polinoamele avînd aceeași coeficienți, se reduc la unul și același polinom.

Se poate stabili ușor că condiția este și necesară, trecînd toți termenii într-un membru al egalității și folosind cunoștințele de la polinomul identic nul.

Dacă polinomul $P(x, y, z)$ și $Q(x, y, z)$, sînt identice, scriem :

$$P(x, y, z, \ldots) \equiv (Q(x, y, z, \ldots)$$

3. Operații cu polinoame de mai multe variabile

Operațiile cu plinoame de mai multe variabile se definesc ca și operațiile cu polinoame de o singură variabilă. Vom stărui puțin numai asupra împărțirii.

Restul împărțirii unui polinom $P(x, y)$ cu binomul $x-y$ este egal cu valoarea polinomului obținută înlocuind pe x cu y, adică $R \equiv P(y, y)$.

Rezultă că un polinom $P(x, y)$ este divizibil cu $x-y$ dacă $P(y,y)=0$.

Ca aplicație, folosind cunoștințe de la divizibilitatea polinoamelor, se poate stabili cu ușurință următoarea propoziție : *dacă un polinom $P(x, y, z)$ este divizibil separat cu $x-y, y-z, z-x$, atunci el este divizibil și cu produsul lor $(x-y)(y-z)(z-x)$.*

De asemenea, teorema precedentă se poate generaliza și în sensul următor : restul împărțirii unui polinom $P(x, y, z)$ prin $x - A(y, z)$, unde $A(y, z)$ este un polinom în y și z, este egal cu $P[(Ay, z), y, z]$.

Dacă $P[A(y, z), y, z]$ este identic nul, atunci polinomul $P(x, y, z)$ este divizibil cu $x - A(y, z)$.

Exemplu. Polinomul

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

este divizibil cu $x + (y + z)$ pentru că

$$P[-(y + z), y, z] = -(y + z)^3 + y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = -(y + z)^3 + (y + z)^3 = 0$$

4. Polinoame omogene

Definiție. Se numește polinom omogen polinomul de mai multe variabile în care toți termenii sînt de același grad.

Exemple de polinoame omogene :

$$ax + by, \quad ax + by + cz, \quad ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$$

Observare. Putem urmări pe fiecare din aceste exemple proprietatea următoare : dacă înlocuim pe x prin tx, pe y prin ty etc., fiecare termen va conține factorul t ridicat la o putere egală cu gradul polinomului ; scoțînd pe t la acea putere ca factor comun, în paranteză rămîne chiar polinomul dat.

Această proprietate este comună tuturor polinoamelor omogene. Ea se poate lua ca definiție : Un polinom $P(x, y, z)$ este omogen de gradul n dacă îndeplinește condiția

$$P(tx, ty, tz) = t^n \cdot P(x, y, z).$$

5. Operații cu polinoame omogene

Este ușor de demonstrat că :

Suma sau diferența a două polinoame omogene și de același grad este un polinom omogen de același grad cu cele date.

Produsul a două polinoame omogene este un polinom omogen care are gradul egal cu suma gradelor polinoamelor date.

Ridicînd un polinom omogen de gradul n la puterea k (natural) se obține un polinom omogen de gradul nk.

Dacă un polinom omogen de gradul m este divizibil cu un polinom omogen de gradul n, cîtul este un polinom omogen de gradul $m - n$.

6. Polinoame simetrice

Definiție. Un polinom $P(x, y)$ se zice simetric în raport cu variabilele x și y dacă nu se schimbă cînd permutăm între ele variabilele x și y, adică $P(x, y) \equiv P(y, x)$.

Ca aplicație, să găsim forma generală a unor polinoame simetrice de două variabile.

a) Un polinom de gradul întîi cu două variabile este $P_1(x, y,) = ax + by + c$. Pentru a fi simetric trebuie să îndeplinească condiția $ax + by + c \equiv ay + bx + c$ de unde rezultă $a = b$. Deci $P_1(x, y) = a(x + y) + c$.

b) Un polinom de gradul al doilea de două variabile este de forma : $P_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Pentru ca el să fie simetric, trebuie ca :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \equiv ay^2 + byx + cx^2 + ex + f.$$

Polinoamele fiind identice, coeficienții termenilor asemenea trebuie să fie aceeași ; deci, $c = a$; $e = d$. Forma generală a unui polinom simetric de două variabile și de gradul al doilea este deci :

$$P_2(x \cdot y) = a(x^2 + y^2) + bxy + d(x + y) + f.$$

La fel se poate demonstra că un polinom simetric de gradul al treilea de două variabile este de forma :

$$P_3(x, y) = a(x^3 + y^3) + b(x^2y + xy^2) + c(x^2 + y^2) + dxy + e(x + y) + f.$$

Definiția dată mai sus pentru polinomul simetric de două variabile se poate generaliza astfel : un polinom de mai multe variabile este simetric în raport cu acele variabile dacă este simetric în raport cu oricare două dintre ele.

Procedînd ca mai sus, putem găsi formele generale ale unor polinoame simetrice de trei variabile :

$$P_1(x, y, z) = a(x + y + z) + b$$
$$P_2(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx) + c(x + y + z) + d$$
$$P_3(x, y, z) = a\sum x^3 + b\sum x^2y + cxyz + d\sum x^2 + e\sum xy + f\sum x + g.$$

7. Operații cu polinoame simetrice

Suma, diferența, produsul a două polinoame simetrice de două variabile este tot un polinom simetric.

Demonstrația este imediată. Dacă $P(x, y) \equiv P(y, x)$ și $Q(x, y) \equiv Q(y, x)$, atunci

$$P(x, y) + Q(x, y) \equiv P(y, x) + Q(y, x)$$
$$P(x, y) - Q(x, y) \equiv P(y, x) - Q(y, x)$$
$$P(x, y) \cdot Q(x, y) \equiv P(y, x) \cdot Q(y, x).$$

Deducem de aici că : $(x + y)^n$, $(x + y + z)^n$, $(x + y + z + t)^n \ldots$ unde n este un număr natural vor fi polinoame simetrice.

Dacă un polinom simetric $P_1(x, y)$ este divizibil cu un polinom simetric $P_2(x, y)$, atunci cîtul $Q(x, y)$ este și el un polinom simetric.

Într-adevăr : din egalitatea

$$\frac{P_1(x,y)}{P_2(x,y)} \equiv \frac{P_1(y,x)}{P_2(y,x)}$$

rezultă că $Q(x, y) \equiv Q(y, x)$ și deci cîtul este un polinom simetric.

Se poate verifica ușor că aceste proprietăți rămîn valabile și la polinoamele simetrice de mai multe variabile.

8. Polinoame simetrice fundamentale

În teoria polinoamelor simetrice, polinoamele simetrice fundamentale au rol însemnat. Pentru două variabile x_1, x_2 ele sînt :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 ; \quad \sigma_2 = x_1x_2.$$

Pentru trei variabile x_1, x_2, x_3 ele sînt :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 ; \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 ; \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

Pentru n variabile x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ ele sînt :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n ; \; \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_nx_n ;$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n ; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \sigma_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n.$$

Importanța acestor polinoame este pusă în evidență următoarea teoremă pe care o dăm fără demonstrație.

Teoremă. Orice polinom simetric se poate scrie în mod unic ca polinom de polinoamele simetrice fundamentale.

O altă categorie de polinoame simetrice o formează sumele de puteri :

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ; \qquad S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots . x_n^k.$$

Cum aceste sume de puteri sînt polinoame simetrice, conform teoremei precedente, ele se vor exprima cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale. În acest sens se stabilesc unele relaţii între ele.

E bine să observăm că polinoamele simetrice fundamentale sînt chiar expresiile de rădăcini care intră în relaţiile fundamentale dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii algebrice de gradul n

9. Polinoame antisimetrice

Definiţie. Un polinom $P(x, y)$ se zice antisimetric în raport cu variabilele x şi y dacă îndeplineşte condiţia $P(x, y) \equiv -P(y, x)$.

Ca aplicaţie, să găsim forma generală a unor polinoame antisimetrice de două variabile.

a) Un polinom de gradul întîi de două variabile $P_1(x, y) = ax + by + c$ este antisimetric dacă $ax + by + c = -(ay + bx + c)$ de unde rezultă că $b = -a$ şi $c = 0$. Deci forma generală a unui polinom de gradul întîi de două variabile antisimetric este $P_1(x, y) = a(x - y)$.

b) Aplicînd aceeaşi metodă de lucru găsim polinoamele antisimetrice:

$$P_2(x, y) = a(x^2 - y^2) + b(x - y),$$

$$P_3(x, y) = a(x^3 - y^3) + b(x^2y - xy^2) + c(x^2 - y^2) + d(x - y)$$

Vom da acum unele proprietăţi ale polinoamelor antisimetrice de două variabile.

1°) *Produsul dintre un polinom simetric şi unul antisimetric este un polinom antisimetric*

2°) *Dacă un polinom $P(x, y)$ este divizibil cu un polinom $Q(x, y)$, unul din ele fiind simetric iar celălalt antisimetric, citul este un polinom antisimetric.*

În adevăr, să presupunem:

$$P(x, y) = P(y, x)$$
$$Q(x, y) = -Q(y, x)$$

Înmulţind sau împărţind aceste egalităţi, membru cu membru, obţinem:

$$P(x, y) \cdot Q(x, y) = -P(y, x) \cdot Q(y, x)$$

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \Longrightarrow \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

ceea ce confirmă propoziţiile 1° şi 2°.

3°) *Produsul a două polinoame antisimetrice este un polinom simetric.*

4°) *Dacă un polinom antisimetric $P(x, y)$ este divizibil cu polinomul antisimetric $Q(x, y)$, citul este un polinom simetric.*

Demonstraţia se face ca pentru 1° şi 2°.

5°) *Un polinom antisimetric $P(x, y)$ este divizibil cu $x - y$.* În relaţia de definiţie a polinomului antisimetric $P(y, x)$ înlocuind pe x cu y, obţinem:

$P(y, y) = -P(y, y)$, deci $P(y, y) = 0$, adică, polinomul este divizibil cu $x - y$.

Observăm că orice polinom antisimetric se pune sub forma

$$P(x, y) = (x - y)\,Q(x, y)$$

unde $Q(x, y)$ este un polinom simetric.

6°) *Mai general, dacă un polinom antisimetric $P(x, y)$ este divizibil cu $(x - y)^{2n}$, atunci el este divizibil şi prin $(x - y)^{2n+1}$.*

Demonstraţia se face sprijinindu-ne pe proprietăţile enunţate la 1° şi 5°.

Polinomul antisimetric $P(x, y)$ fiind divizibil cu polinomul simetric $(x - y)^{2n}$, citul va fi un polinom antisimetric care va fi divizibil cu $x - y$. Deci $P(x, y)$ este divizibil cu $(x - y)^{2n+1}$.

7°). *Dacă un polinom simetric $P(x, y)$ este divizibil cu $x - y$, atunci el este divizibil prin $(x - y)^2$.*

8°) *Mai general, dacă un polinom simetric $P(x, y)$ este divizibil cu $(x - y)^{2n-1}$ el este divizibil cu $(x - y)^{2n}$.*

Demonstraţia se face ca la punctul 6.

9°) *Orice polinom de două variabile $P(x, y)$ este suma unui polinom simetric cu un polinom antisimetric.*

Considerăm polinomul simetric.

$$S(x, y) = P(x, y) + P(y, x)$$

şi polinomul antisimetric

$$D(x, y) = P(x, y) - P(y, x)$$

Adunînd aceste două egalităţi, se obţine :

$$P(x, y) = \frac{1}{2} S(x, y) + \frac{1}{2} D(x, y)$$

ceea ce demonstrează teorema.

Noţiunea de polinom antisimetric se poate generaliza : Un polinom $P(x, y, z)$ este antisimetric dacă este antisimetric în raport cu oricare două variabile — Rezultă de aici că un polinom antisimetric $P(x, y, z)$ este divizibil cu produsul $(x - y) \cdot (y - z)(z - x)$, deci gradul lui este mai mare sau cel puţin egal cu trei. Rezultă că orice polinom antisimetric se poate scrie sub forma :

$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x) \cdot Q(x, y, z)$, unde $Q(x, y, z)$ este un polinom simetric.

Urmînd aceeaşi cale, deducem că un polinom antisimetric de patru variabile are gradul cel puţin egal cu 6 ; forma lui generală este

$P(x, y, z\, t) = (x - y)(x - z)(x - t)(y - z)(y - t)(z - t) \cdot Q(x, y, z, t)$ unde $Q(x, y, z, t)$ este un polinom simetric.

10°) *Polinoame omogene şi simetrice sau antisimetrice*

Polinoamele care sînt în acelaşi timp omogene şi simetrice au forme particulare. Pentru a avea exemple, putem să luăm pooinoamele simetrice găsite mai sus şi să păstrăm din ele numai grupurile omogene care au acelaşi grad egal cu gradul polinomului. Obţinem astfel :

$$P_1(x, y) = a(x + y) ; \; P_2(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz) ;$$
$$P_3(x, y, z) = a \sum x^3 + b \sum x^2 y + cxyz.$$

Cîteva exemple de polinoame omogene şi antisimetrice sînt următoarele :

$$P_1(x, y) = a(x - y) ; \quad P_2(x, y) = a(x^2 - y^2) ;$$
$$P_3(x, y) = a(x^3 - y^3) + b(x^2 y - xy^2).$$

Aplicaţii

Folosind proprietăţile polinoamelor omogene, simetrice, antisimetrice, putem obţine înlesniri şi eleganţă în calcule. Vom arăta aceasta pe cîteva exemple.

1. Să stabilim formula după care se dezvoltă $(x + y + z + t)^3$.

Polinoum $x + y + z + t$ fiind simetric şi omogen de gradul întîi, prin ridicarea la puterea a treia se va obţine un polinom simetric şi omogen de gradul al treilea.

Deci putem scrie :

$$(x + y + z + t)^3 = A \sum x^3 + B \sum x^2 y + C \sum xyz. \qquad (\alpha)$$

Pentru a determina coeficienţii A, B, C, dă lui x, y, z, t, valori particulare.

Pentru $x = 1$, $y = z = t = 0$, egalitatea (α) devine $1 = A$.

Pentru $x = y = 1$, $z = t = 0$, egalitatea (α)devine $8 = 2A + 2B$, de unde rezultă că $B = 3$.

Pentru $x = y = z = 1$, $t = 0$, egalitatea (α) devine $27 = 3A + 6B + C$, de unde rezultă că $C = 6$.

Urmează că avem dezvoltarea :

$$(x + y + z + t)^3 = \sum x^3 + 3 \sum x^2 y + 6 \sum xyz$$

2. Să se descompună în factori polinomul

$$P(x, y, z) = x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) + z^3(x^2 - y^2)$$

Observăm că polinomul $P(x, y, z)$ este omogen de gradul al cincilea şi antisimetric, deci forma lui este :

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x) \cdot Q(x, y, z)$$

unde $Q(x, y, z)$ este omogen şi simetric de gradul al doilea, deci putem scrie:

$$x^3(y^2 - z^2) + y^3 - y^2) + y^2)z^3(x^2 - y^2) =$$
$$= (x - y)(y - z)(x - z)[a(x^2 + y^2 + z^2) + b(x, y, + xz + yz)] \qquad (\beta)$$

Pentru a determina coeficienţii a şi b, dăm lui x, y, z valori particulare.

Pentru $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, egalitatea (β) devine $1 = -2a + b$, iar pentru $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$, obţinem $2 = 5a + 2b$. Rezolvînd sistemul format de cele două ecuaţii care conţin pe a şi b, obţinem: $a = 0$, $b = 1$.

$$x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) + z^3(x^2 - y^2) = (x - y)(y - z)(x - z)(xy + yz + zx)$$

NOTE MATEMATICE

Generalizarea problemei 6501

Se dau într-un plan n puncte. Printre dreptele care unesc aceste n puncte cîte două nu se află drepte paralele, perpendiculare sau coincidente. Prin fiecare dintre punctele date se duc perpendiculare pe toate dreptele ce se pot construi cu celelalte $n-1$ puncte date. Care este numărul maxim de intersecţii ale acestor perpendiculare, în afara punctelor date?

Soluţie. Cu $n-1$ puncte date se pot construi C_{n-1}^2 drepte distincte, deci din fiecare punct se pot duce C_{n-1}^2 perpendiculare pe dreptele ce se pot construi cu celelalte $n-1$ puncte.

Deoarece sînt n puncte, numărul total de perpendiculare ce se pot duce este $n \cdot C_{n-1}^2$.

Aceste perpendiculare s-ar tăia în $C^2_{nC^2_{n-1}}$ puncte.

Dar C_{n-1}^2 perpendiculare trec prin fiecare din punctele date deci în fiecare punct se confundă $C^2_{C^2_{n-1}}$ puncte de interescţie ale perpendicularelor.

Deci mai rămîn

$C^2_{n \cdot C^2_{n-1}} - n \cdot C^2_{C^2_{n-1}}$ puncte de intersecţie a perpendicularelor.

Pe dreapta formată de două puncte ducem perpendicularele din celelalte $n-2$ puncte, toate aceste perpendiculare sînt paralele între ele şi deci nu se întîlnesc.

Pentru fiecare dreaptă ce se poate construi cu punctele date trebuie să scădem C_{n-2}^2 puncte. Cum cu cele n puncte se pot construi C_n^2 drepte, trebuie să scădem încă $C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$ puncte de intersecţie.

Mai rămîn

$C^2_{n \cdot C^2_{n-1}} - n \cdot C^2_{C^2_{n-1}} - C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$ puncte de intersecţie a perpendicularelor.

Cu cele n puncte se pot forma C_n^3 triunghiuri. Într-un triunghi înălţimile fiind concurente rezultă că pentru fiecare triunghi scădem 2 puncte de intersecţie care se confundă cu un al treilea. În total se scot $2 \cdot C_n^3$ puncte de intersecţie.

Deci numărul total de puncte de intersecţie ale perpendicularelor este cel mult:

$$N = C^2_{n \cdot C^2_{n-1}} - n \cdot C^2_{C^2_{n-1}} - C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 - 2 \cdot C_n^3.$$

Observație : Dacă două sau mai multe din dreptele ar coincide sau ar fi paralele unele perpendiculare ar coincide și deci ar fi o infinitate de puncte de intersecție, iar dacă două drepte ar fi perpendiculare, ortocentrele unor triunghiuri ce se formează cu dreptele ce se pot construi cu cele n puncte ar coincide cu punctele date.

Pentru cazul particular $n = 5$ obținem problema 6501.

$$N = C_{30}^2 - 5 \cdot C_6^2 - C_5^2 \cdot C_3^2 - 2 \cdot C_5^3 = 435 - 75 - 30 - 20 = 310$$

Bîscă C. Octavian, cl. XI S. m. 1, Craiova

Asupra problemei 6499

Vom extinde în spațiu problema de geometrie plană dată la olimpiada internațională de matematică de la Moscova.

Într-un tetraedru oarecare considerăm sfera înscrisă. Planele paralele la fețele tetraedrului tangente la sferă determină alte patru tetraedre în care înscriem cîte o sferă. Să se afle suma ariilor celor cinci sfere.

Fie I centrul sferei înscrise în tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ iar r raza acestei sfere.

Notăm cu S_1, S_2, S_3, S_4 respectiv ariile triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ $A_1A_2A_3$, iar cu S și V suprafața totală, respectiv volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$.

Dacă $V(A_2A_3A_4I)$ are semnificația de volum al tetraedrului $A_2A_3A_4I$, vom avea :

$$V(A_2A_3A_4I) + V(A_3A_4A_1I) + V(A_4A_1A_2I) + V(A_1A_2A_3I) = V$$

sau

$$\frac{1}{3}rS_1 + \frac{1}{3}rS_2 + \frac{1}{3}rS_3 + \frac{1}{3}rS_4 = V$$

de unde

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{3V}{S}.$$

Planul tangent la sfera (I) și paralel la planul $A_2A_3A_4$ intersectează muchiile tetraedrului în punctele B_2, B_3 și B_4. Fie M și N punctele de tangență ale sferei cu planele $(A_2A_3A_4)$ respectiv $(B_2B_3B_4)$ iar C_1 și D_1 proiecțiile lui A_1 pe aceleași plane.

Dacă r_1 este raza sferei înscrisă în tetraedrul $A_1B_2B_3B_4$, vom avea :

$$r_1 = \frac{3V(A_1B_2B_3B_4)}{S(B_2B_3B_4) + S(B_3B_4A_1) + S(B_4B_2A_1) + S(B_2B_3A_1)}$$

unde $S(B_2B_3B_4)$ are semnificația de aria triunghiului $B_2B_3B_4$.

Cum $V(A_1B_2B_3B_4) = \frac{1}{3} \cdot A_1D_1 \cdot S(B_2B_3B_4)$

vom avea :

$$r_1 = \frac{A_1D_1 \cdot S(B_2B_3B_4)}{S(B_2B_3B_4) + S(B_3B_4A_1) + S(B_4B_2A_1) + S(B_2B_3A_1)}.$$

Triunghiurile $B_2B_3B_4$ și $A_2A_3A_4$ avînd laturile paralele sînt asemenea și fie k raportul lor de asemănare.

Deci $\frac{S(B_2B_3B_4)}{S_1} = k^2$ de unde $S(B_2B_3B_4) = k^2 \cdot S_1$.

Observînd că triunghiurile $(B_2B_3A_1)$ cu $(A_2A_3A_1)$, $(B_3B_4A_1)$ cu $(A_3A_4A_1)$ și $(B_4B_2A_1)$ cu $(A_4A_2A_1)$ sînt asemenea și au același raport de asemănare k, obținem încă trei relații analoage și deci:

$$r_1 = \frac{A_1D_1 \cdot k^2S_1}{k^2S_1 + k^2S_2 + k^2S_3 + k^2S_4} = A_1D_1 \cdot \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = A_1D_1 \cdot \frac{S_1}{S}.$$

Dar $A_1D_1 = A_1C_1 - C_1D_1 = A_1C_1 - MN = A_1C_1 - 2r.$

Însă cum $A_1C_1 = \frac{3V}{S_1}$, vom avea: $A_1D_1 = \frac{3V}{S_1} - 2r.$

Deducem ușor:

$$r_1 = \left(\frac{3V}{S_1} - 2r\right) \cdot \frac{S_1}{S} = \frac{3V}{S} - \frac{2rS_1}{S} = r - 2r \cdot \frac{S_1}{S}$$

și deci

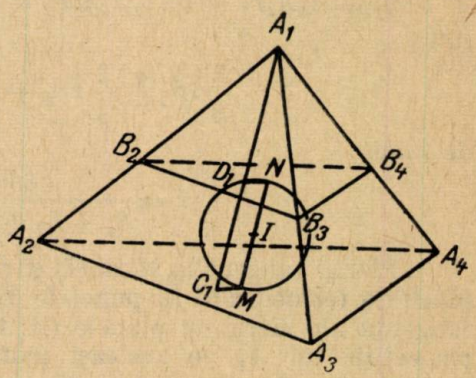
$$r_1 = r\left(1 - \frac{2S_1}{S}\right).$$

Dacă r_2, r_3 și r_4 au semnificațiile analoage cu r_1, atunci avem relațiile

$$r_2 = r\left(1 - \frac{2S_2}{S}\right)$$

$$r_3 = r\left(1 - \frac{2S_3}{S}\right)$$

$$r_4 = r\left(1 - \frac{2S_4}{S}\right)$$



Fie s suma ariilor celor cinci sfere. Vom obține succesiv:

$$s = 4\pi r^2 + 4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 + 4\pi r_3^2 + 4\pi r_4^2 = 4\pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) =$$

$$= 4\pi\left[r^2 + r^2\left(1 - \frac{2S_1}{S}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2S_2}{S}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2S_3}{S}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2S_4}{S}\right)^2\right] =$$

$$= 4\pi r^2\left[1 + 4 - 4 \cdot \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} + 4 \cdot \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}{S^2}\right] =$$

$$= 4\pi r^2\left[1 + 4 \cdot \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}{S^2}\right],$$

Dar $r^2 = \frac{9V^2}{S^2}$ și deci $s = 36\pi V^2 \cdot \frac{S^2 + 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)}{S^4}.$

Însă elementele V, S și S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se pot exprima în funcție de muchiile tetraedrului.

(Vezi articolul „Volumul unui tetraedru în funcție de muchiile lui" din G.M.F. — B nr. 1958 pag. 185).

Aria S poate fi exprimată și ea în funcție de muchiile tetraedrului ținînd seama că :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Popescu Eleodor, elev Tr. Severin

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6564

Din 30 muncitori și 6 brigadieri se alcătuiesc în același timp, grupe de cîte 4 brigăzi, numerotate cu 1, 2, 3, 4 formate din cîte 6 muncitori și un brigadier. Se cere :

a) *În cîte moduri se pot alcătui cele 4 brigăzi (1, 2, 3, 4) în același timp.* b) *Care este probabilitatea ca să apară cîte un brigadier determinat în brigăzile 1 și 2. Generalizare.*

D. Stemer, profesor Galați

Soluție dată de *Bîscă Octavian*, cl. XI Ș. m. 1 Craiova.

a) Muncitorii de la brigada 1 pot fi aleși în C_{30}^6 moduri iar brigadierul se poate alege în C_6^1 moduri, deci brigada 1 se poate alcătui în $C_{30}^6\ C_6^1$ moduri.

Pentru fiecare mod în care poate fi alcătuită brigada 1 în brigada a doua muncitorii se pot alege în C_{24}^6 moduri iar brigadierul în C_5^1 moduri, deci în total $C_{24}^6 \cdot C_5^1$ moduri.

Pentru fiecare mod în care pot fi alcătuite brigăzile 1 și 2, în brigada 3 muncitorii se pot alege în C_{18}^6 moduri iar brigadierul în C_4^1 moduri, deci în total $C_{18}^6\ C_4^1$ moduri.

Pentru fiecare mod în care pot fi alcătuite brigăzile 1, 2 și 3 în brigada 4, muncitorii se pot alege în C_{12}^6 moduri iar brigadierul în C_3^1 moduri, deci în total $C_{12}^6 \cdot C_3^1$ moduri. Deci cele 4 echipe se pot alcătui în $C_{30}^6 \cdot C_{24}^6 C_{18}^6 \cdot C_{12}^6 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ moduri.

$$N = \frac{30\,!}{6\,! \cdot 2}$$

Brigadierul pentru brigada 1 se poate alege în C_6^1 moduri, deci probabilitatea să apară unul determinat este $\frac{1}{C_6^1} = \frac{1}{6}$.

Brigadierul pentru brigada 2 se poate alege în C_5^1 moduri, deci probabilitatea să apară unul determinat este $\frac{1}{C_5^1} = \frac{1}{5}$.

Deci probabilitatea ca să apară un brigadier determinat în brigăzile 1 şi 2 este :

$$p = \frac{1}{30}$$

Generalizare : Din a muncitori şi b brigadieri se alcătuiesc în acelaşi timp, grupe de cîte n brigăzi, numerotate cu 1, 2, 3,... şi n, formate din cîte k muncitori ($nk < a$) şi r brigadieri ($nr < b$)

Se cere :

a) În cîte moduri se pot alcătui cele n brigăzi (1, 2, 3,... şi n) în acelaşi timp? b) Care este probabilitatea ca să apară brigadieri determinaţi în brigăzile 1, 2,... p ($p < n$).

Soluţie ; *a*) Muncitorii primei brigăzi pot fi determinaţi în C_a^k moduri ; pentru fiecare determinare a muncitorilor primii brigăzi, muncitorii celei de-a doua brigăzi se pot forma în C_{a-k}^k moduri ; pentru fiecare determinare a brigăzilor 1 şi 2, muncitorii brigăzii 3 pot fi determinaţi în C_{a-2k}^k moduri şi aşa mai departe. Pentru fiecare determinare a muncitorilor brigăzilor 1, 2... $(n-1)$ muncitorii brigăzii n pot fi determinaţi în $C_{a-(n-1)k}^k$ moduri.

Deci muncitorii pot fi repartizaţi în cele n brigăzi în $C_a^k \cdot C_{a-k}^k \cdot C_{a-2k}^k \ldots C_{a(m-1)k}^k$ moduri.

Brigadierii primei brigăzi pot fi determinaţi în C_b^r moduri, pentru fiecare determinare a brigadierilor din brigada 1, brigadierii din brigada 2 se pot forma în C_{b-r}^r moduri, pentru fiecare determinare a brigadierilor din brigăzile 1 şi 2, brigadierii din brigada 3 pot fi aleşi în C_{b-2r}^r moduri şi aşa mai departe. Pentru fiecare determinare a brigadierilor din brigăzile 1, 2 ... $(n-1)$, brigadierii brigăzii n pot fi repartizaţi în $C_b^r \cdot C_{b-r}^r \cdot C_{b-2r}^r \ldots C_{b-(n-1)r}^r$ moduri.

Deci cele n brigăzi se pot forma în

$$N = C_a^k C_{a-k}^k \ldots C_{a-(a-1)k}^k \cdot C_b^r \cdot C_{b-r}^r \ldots C_{b-(n-1)r}^r \text{ moduri}$$

b) Probabilitatea ca în brigada 1 să apară brigadierii determinaţi este $p_1 = \frac{1}{C_b^r}$; probabilitatea ca în brigada 2 să apară brigadierii determinaţi este $p_2 = \frac{1}{C_{b-r}^r}$ şi aşa mai departe $P_p = \frac{1}{C_{b-(p-1)r}^r}$

Deci

$$P = \frac{1}{C_b^r} \cdot \frac{1}{C_{b-r}^r} \cdot \frac{1}{C_{b-2r}^r} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{C_{b-(p-1)r}^r}$$ este probabilitatea ca să apară brigadieri determinaţi în brigăzile 1, 2, 3,... p ($p < n$).

Problema 6568

Se dă funcția : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Să se arate că dacă extremele funcției — cînd acestea există — sînt situate pe o dreaptă ce trece prin origine, atunci între coeficienții* a, b, c, d *există relația* :

$$\frac{b \cdot c}{a \cdot d} = 9$$

Angel Postelnicu, profesor Galați

Soluție dată de *Geleriu Dan*, elev Sibiu

Cînd graficul funcției are punctele de extrem $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_1 și x_2 sînt rădăcinile reale ale ecuației derivate

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Presupunînd îndeplinită condiția de realitate $b^2 - 3ac \geqslant 0$ ele se vor, găsi pe o dreaptă OM_1M_2 ce trece prin origină, cînd avem relația

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \text{ sau : } x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Ținînd seama că aceste coordonate satisfac relația

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

vom scrie succesiv :

$$x_1(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) - x_2(ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d) = 0$$
$$ax_1x_2(x_2^2 - x_1^2) + bx_1x_2(x_2 - x_1) - d(x_2 - x_1) = 0$$
$$(x_2 - x_1)\,[a(x_1 + x_2)\,x_1x_2 + bx_1x_2 - d] = 0$$

De aci deducem condiția

$$a(x_1 + x_2) \cdot x_1x_2 + bx_1x_2 - d = 0 \qquad (1)$$

Și pentrucă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $3ax^2 + 2bx + c = 0$ avem :

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}; \quad x_1x_2 = \frac{c}{3a}.$$

Înlocuim în (1) și găsim :

$$-\frac{2bc}{9a} + \frac{bc}{3a} - d = 0 \text{ sau : } b \cdot c - 9\,a \cdot d = 0$$

adică tocmai relația din enunț.

Problema 6572

Se dă seria definită de termenii :

$$u_{2n} = \frac{(-1)^n - 6 \cdot 2^{2n}}{5} \text{ și } u_{2n+1} = \frac{3 \cdot (-1)^n + 6 \cdot 2^{2n+1}}{5}.$$

Să se arate că :

$$2u_p + u_{p+1} + 2u_{p+2} + u_{p+3} = 0$$

Soluție dată de *Popa Eugen*, cl. IX s.m. 3 Iași. — Dacă $p = 2n$ atunci :

$$2u_{2n} + u_{2n+1} + 2u_{2n+2} + u_{2n+3} = \frac{2(-1)^n - 6\cdot 2^{2n+1}}{5} + \frac{3(-1)^n + 6\cdot 2^{2n+1}}{5} +$$

$$+ \frac{2(-1)^{n+1} - 6\cdot 2^{2n+3}}{5} + \frac{3(-1)^{n+1} + 6\cdot 2^{2n+3}}{5} \equiv 0$$

Dacă $p = 2n - 1$, atunci :

$$2u_{2n-1} + u_{2n} + 2u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{6(-1)^{n-1} + 6\cdot 2^{2n}}{5} + \frac{(-1)^n - 6\cdot 2^{2n}}{5} +$$

$$+ \frac{6(-1)^n + 6\cdot 2^{2n+2}}{5} + \frac{2(-1)^{n+1} - 6\cdot 2^{2n+3}}{2\cdot 5} \equiv 0$$

Deci, pentru orice p avem relația dată.

Problema 6573

Fie A_i $(i = 1, 2, \ldots 9)$ vîrfurile unui nonagon regulat convex de latură l. Notăm cu M și N mijloacele arcelor A_4A_5, respectiv A_7A_8 și $P \equiv (A_1A_6, A_2N)$, $Q \equiv (A_1A_5, A_2N)$, $R \equiv (A_2M, A_1A_3)$. Să se arate că

$$A_1N \cdot A_1Q \cdot A_1R \cdot A_2N \cdot A_2R \cdot PQ = l^6.$$

Cristina și Tudor Zamfirescu

Soluție dată de *Petriu Emil*, elev Hațeg

Avem : $\sphericalangle A_1A_2N = \sphericalangle A_1PA_2$, deci $A_1A_2 = A_1P$. Triunghiurile A_1A_2N și QPA_1 sînt asemenea deoarece $\sphericalangle A_1A_2N = \sphericalangle QPA_1$ și $\sphericalangle A_2NA_1 = \sphericalangle PA_1Q$. Deci

$$\frac{A_1A_2}{QP} = \frac{A_2N}{PA_1} = \frac{A_2N}{A_1A_2}$$

sau :

$$A_1A_2^2 = PQ \cdot A_2N \tag{1}$$

Triunghiurile A_1A_2N și A_2RA_1 sînt asemenea deoarece $\sphericalangle A_1A_2N = \sphericalangle A_1RA_2$ și $\sphericalangle A_1NA_2 = \sphericalangle RA_1A_2$. Deci,

$$\frac{A_1A_2}{A_2R} = \frac{NA_1}{A_1A_2} \text{ sau : } A_1A_2^2 = A_1N \cdot A_2R \tag{2}$$

Triunghiurile A_2RA_1 și QPA_1 sînt asemenea fiind ambele asemenea cu triunghiul A_1A_2N. Deci,

$$\frac{A_1A_2}{A_1Q} = \frac{RA_1}{PA_1} = \frac{RA_1}{A_2A_1} \text{ sau : } A_1A_2^2 = A_1Q \cdot A_1R \tag{3}$$

Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) obținem :

$$l^6 = A_1A_2^6 = PQ \cdot A_2N \cdot A_1N \cdot A_2R \cdot A_1R \cdot A_1Q.$$

Problema 6598

Fasciculul de cercuri ce trece prin punctele fixe A și B determină în cercul fix O coarda CD. Să se determine cercurile fasciculului cînd:

a) *Coarda CD trece printr-un punct dat P.*

b) *CD este paralelă cu o direcție dată.*

c) *Coarda CD are o lungime dată l.*

d) *Să se arate că atunci cînd l variază, mijlocul lui CD descrie un cerc.*

M. I. Focșeneanu

Soluție dată de *Chițescu Ion*, ș.m. 10, București

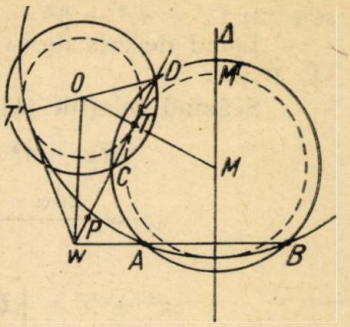
a) Să notăm cu M centrul unui cerc al fasciculului și cu T mijlocul lui CD. Fie $W \equiv (DC) \cap (AB)$

În oricare poziție, vom avea :

$WC \cdot WD = WA \cdot WB$ (W aparține axei radicale a celor două cercuri)

Să arătăm că W este fix.

În adevăr, o altă coardă $WC'D'$ determină în cercul O o secantă $C'D'$. Vom putea scrie : $WC' \cdot WD' = WC \cdot WD = WA \cdot WB$, ceea ce arată că punctele A, B, C', D' sînt conciclice, sau altfel spus, ducînd un cerc al fasciculului care trece prin A, B și un punct curent C' al cercului O a doua intersecție a lui cu cercul O va fi tocmai D' și $(C'D') \cap (AB) \equiv W$.



De-aici rezultă ușor construcția : se unește P cu W $(WP) \cap (O) = (CD)$; $(OT) \cap (\Delta) = M$ căutat. $\Delta \equiv WP$. Dacă $P \equiv W$ avem nedeterminare.

b) Paralela dusă prin W la direcția dată determină coarda CD în cercul O, etc.

c) Din triunghiul dreptunghic OTD rezultă : $OT^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$ unde R este raza lui O. Putem deci construi cercul de centru O și rază OT.

Ducînd apoi un cerc M' al fasciculului, conform precedentelor considerații, determinăm W. Din W ducem tangentele WT și WT' la cercul de centru O și rază $\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. Intersecțiile date astfel : $(OT) \cap (\Delta) = M$ și $(OT') \cap (\Delta) \equiv M'$ sînt centrele cercurilor căutate (2 soluții).

Problema are sens pentru $R \geqslant \frac{l}{2}$.

d) Ținînd seama că OW este un segment fix și că $\sphericalangle WTO = 90°$, locul lui T este arcul din cercul de diametru WO cuprins în interiorul cercului O.

Problema 6600

Se dau două cercuri fixe C și C' avînd ca centre punctele O și O'. Se cere locul geometric al centrelor cercurilor (Γ) *care sînt tangente cercului* (C) *și ortogonale cercului* (C'). *Discuție.*

* * *

Soluție dată de *Gonciar Ștefan*, cl. XI, Ș.m. Feteşti

Se ia punctul O ca origine a unui sistem de axe perpendiculare iar ca axă Ox linia centrelor OO'.

Notăm cu R şi R', razele celor două cercuri şi $d = OO'$. Ecuațiile cercurilor vor fi :

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$(C') \qquad (x - d)^2 + y^2 - R'^2 = 0$$

Fie (α, β) coordonatele centrului ω al cercului (Γ) şi ρ raza acestui cerc. Pentru ca cercul (Γ) să fie tangent lui (C) trebuie ca $O\omega = R \pm \rho$ sau (1) $\alpha^2 + \beta^2 = (R + \varepsilon\rho)^2$; $\varepsilon = \pm 1$.

Pentru ca (Γ) să fie ortogonal lui (C') trebuie ca $O'\omega^2 = R'^2 + \rho^2$ sau (2) $(\alpha - d)^2 + \beta^2 = R'^2 + \rho^2$

Locul descris de ω (α, β) se obține eliminînd pe ρ între relațiile (1) şi (2).

Scăzînd relațiile (1) şi (2) obținem :

$$2d\alpha - d^2 = R^2 - R'^2 + 2\varepsilon R\rho \text{ de unde}$$

$$\varepsilon\rho = \frac{2d\alpha - d^2 - R^2 + R'^2}{2R} \text{ şi înlocuind în (1)}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(R + \frac{2d\alpha - d^2 - R^2 + R'^2}{2R}\right)^2 \text{ sau}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{d^2}{R^2}\left(\alpha + \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2d}\right)^2 \text{ sau}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{R^2}\left(x + \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2d}\right)^2$$

Această ecuație reprezintă o conică avînd ca focar punctul O, ca directoare corespunzătoare dreapta $x + \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2d} = 0$ şi ca excentricitate $\frac{d}{R}$. Conica este o elipsă dacă $d < R$, este o hiperbolă dacă $d > R$ şi o parabolă dacă $d = R$.

Conica se reduce la două drepte dacă punctul O este situat pe directoare, adică $d^2 = R^2 + R'^2$. În acest caz cercurile date (C) şi (C') sînt ortogonale.

Problema 6607

Să se demonstreze că condițiile pentru ca polinomul

$$x^{2n} + px^n + q$$

să fie divizibil prin $x^2 + x + 1$ *sînt*

$$n = 3k \text{ cu } p + q + 1 = 0 \text{ sau } n \neq 3k \text{ cu } p = q = 1$$

Gh. Buicliu

Soluție dată de *Trif Nicolae*, cl. X, ș.m. 2 Sibiu

Avem $y = x^2 + x + 1 = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$. Dacă $n = 3k$ avem

$$x^n - 1 = x^{3k} - 1 = \mathfrak{M}(x^3 - 1) = \mathfrak{M}(x^2 + x + 1)$$

de unde

$$x^n = 1 + \mathfrak{M}(x^2 + x + 1) = 1 + \mathfrak{M}y.$$

Înlocuind această valoare în polinomul dat obținem

$$\mathfrak{M}y + 1 + p + q \quad \text{deci } 1 + p + q = 0.$$

Prin urmare dacă

$$n = 3k \text{ trebuie ca } p + q + 1 = 0$$

Fie $n = 3k + r$ cu $r < 3$. Avem

$$x^n = x^{3k+r} = x^{3k} \cdot x^r = x^r + \mathfrak{M}y$$

pentru că $x^3 - 1$ este $\mathfrak{M}y$. Polinomul dat se poate scrie

$$\mathfrak{M}y + x^{2r} + px^r + q$$

Dacă r nu este nul, nu putem avea decît $r = 1$ sau $r = 2$. Dacă $r = 1$ polinomul devine $\mathfrak{M}y + x^2 + px + q$ sau pentru că

$x^2 = y - x - 1$, $\mathfrak{M}y + (p - 1)x + q - 1$. Și condiția cerută este $p - 1 = 0$, $q - 1 = 0$.

Dacă $r = 2$, valoarea polinomului este $\mathfrak{M}y + x^4 + px^2 + q$.

Cum $x^4 = x \cdot x^3 = \mathfrak{M}y + x$ și $x^2 = y - x - 1$, polinomul se poate scrie $\mathfrak{M}y + x - p(x + 1) + q = \mathfrak{M} \cdot y - (p - 1)\, x + q - p$

Prin urmare trebuie să avem

$$p - 1 = 0 \text{ și } q - p = 0.$$

Rezultă că dacă $n \neq 3k$, condițiile sînt $p = q = 1$.

Problema 6612

În triunghiul oarecare ABC se consideră punctul D pe latura AB și punctul E pe CD astfel ca $\dfrac{CE}{ED} = k$, $k = constant$. Fie $F \equiv (AC, BE)$ și $P \equiv (AE, DF)$

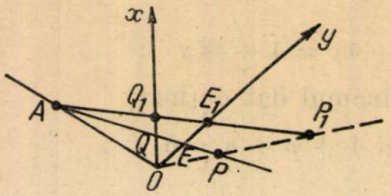
Să se găsească locul geometric al punctului P cînd punctul D descrie dreapta AB.

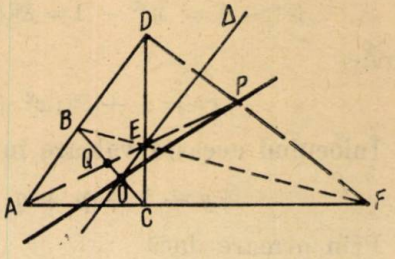
Leonte Alexandru, București

Soluția autorului. Vom demonstra mai întîi un rezultat general. Se dă un punct fix A și un unghi xOy, oarecare. O dreaptă care trece prin A taie laturile unghiului xOy în Q, E. Se consideră pe dreapta AQE

punctul P astfel ca $(AEQP) = -1$. Locul geometric al punctului P este o dreaptă care trece prin O.

Într-adevăr, fie AQ_1E_1 o anumită secantă și să considerăm punctul P_1 astfel ca $(AE_1Q_1P_1) = -1$. Această relație arată că dreptele OA, Oy,





Ox, OP_1 formează un fascicol armonic și că prin urmare o dreaptă oarecare ce trece prin A determină prin intersecție cu aceste raze punctele A, E, Q respectiv P astfel ca $(AEQP) = -1$. Așadar punctul P care verifică relația $(AEQP) = -1$ se află pe o dreaptă.

Cu această, rezolvarea problemei este imediată. Evident punctul E descrie o dreaptă Δ paralelă cu AB — omotetica acesteia în omotetia de centru C și raport $\frac{CE}{CD} = \frac{k}{k+1}$. Fie $O \equiv (\Delta, BC)$. În patrulaterul complet $ABECDF$, avem : $(AEQP) = -1$ unde $Q \equiv (AE, BC)$. Considerînd unghiul format de BO și Δ problema s-a redus la cea de mai sus și deci locul punctului P este o dreaptă care trece prin O.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele lucrărior scrise date la etapa finală a olimpiadei de matematică din 9 mai 1965

Clasa VIII-a serală

7048. a) Să se rezolve sistemul :

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4y} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)}$$

$$\frac{xy}{xz+yz} = \frac{(a+b)^2}{16\,ab}$$

$$\frac{yz}{2yx-xz} = \frac{4ab}{(a-b)^2}$$

b) Să se arate că pentru $a > 0$; $b > 0$; x, y, z pot fi laturile unui triunghi.

Lucia Țene, București

7049. Fie G centrul de greutate (punctul de concurență al medianelor) în triunghiul ABC, iar G_1, G_2, G_3 sînt simetricele lui G față de mijloacele laturilor BC, AC, AB. Să se arate că :

a) Patrulaterele ABG_1G_2, ACG_1G_3 și BCG_2G_3 sînt paralelograme concentrice.

b) Triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ sînt egale și au același centru de greutate.

c) Ce se poate spune despre triunghiul ABC, dacă paralelogramul ABG_1G_2 este dreptunghi? Dar dacă și paralelogramul ACG_1G_3 este dreptunghi?

d) Ce legături există între latura AB și mediana CC', cînd paralelogramul ABG_1G_2 este romb?

Corneliu Georgescu, Craiova

Clasa IX-a

7050. Să se arate minimul funcției $y = x - 1 - \sqrt{2x - 1}$.

Mircea Dabija, profesor Cîmpina

7051. a) Să se arate că:

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} + \frac{1}{\log_5 a} = \frac{1}{\log_{120} a}$$

b) Să se generalizeze.

C. Ionescu-Țiu

7052. Dacă notăm cu $\curlywedge$ operația între u și v pozitivi, $u \curlywedge v = \log_u v - \log_v u$, să se rezolve ecuația:

$$a \curlywedge b^x - b \curlywedge a^x = 2(\log_a b - \log_b a)$$

unde a și b sînt numere pozitive diferite.

Corneliu Georgescu, Craiova

7053. Într-un cerc de rază unu se înscrie patrulaterul $ABCD$ în care $AB = l_4$ (latura pentagonului convex regulat înscrie în cerc), $BC = l_4$ (latura triunghiului echilateral înscris) și $DA = l$ (latura exagonului).

a) Să se calculeze latura CD. b) Să se calculeze diagonala AC. c) Dreptele AB și CD, se taie în E. Să se calculeze distanța de la punctul E la centrul cercului. d) Să se construiască grafic, o secantă care să treacă prin centrul O cercului și să taie pe AB în M și pe CD în N astfel ca $OM = ON$.

Gh. D. Simionescu

Clasa X-a

7054. Fiind dată ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,

a) Să se arate că pentru a avea

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1 + x_2 + x_3)^4.$$

este necesar și suficient să avem $c = ab - \frac{b^2}{2a}$.

b) Presupunînd în condițiile de mai sus, că b est un număr rațional, cum trebuie luat c pentru ca și a să fie rațional?

O. Sacter

7055. Să se arate că în orice triunghi există relațiile:

a) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$

b) $\sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos A \cos B \cos C\right]$.

c) Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghi, să se demonstreze inegalitatea:

$$\sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} < \frac{1}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

O. Sacter

7056. Două pătrate egale de latură a, $ABCD$ și $BEFG$ sînt situate în planele P și Q perpendiculare, au vîrful comun B și laturile AB și BE pe dreapta de intersecție a planelor (A și E fiind simetrice față de B).

a) Să se arate că figura $BDGECF$ este o prismă al cărei volum V_1 se cere.

b) Să se afle distanța dreptei AB la planul $DCFG$ și unghiul dreptelor BD și BF.

c) Fie M un punct pe EF. Se notează $FM = x$. Planul AMC taie prisma în două solide dintre care unul este un trunchi de piramidă al cărui volum V_2 se cere. Să se afle x dacă $V_2 = kV_1$, unde k este dat.

Elena Flondor

Clasa XI-a

7057. Cercul $x^2 + y^2 = 2$ ș parabola cubică $y = x^3$ se reprezintă față de aceleași axe xOy. Punctele lor de intersecție se notează A, B, ($y_A < 0$).

a) Fie M, N două puncte de aceeași abscisă x, situate, primul pe cerc și celălalt pe parabolă, astfel ca segmentul MN să fie interior cercului, iar $y_M > y_N$. Să se studieze funcția $f(x) = |MN|$. Se notează cu y_A ; y_M, y_N ordonatele punctelor respective.

b) Să se calculeze diferența dintre maximul relativ și minimul relativ al acestei funcții cu trei zecimale exacte.

c) Se notează cu AA' coarda cercului paralelă cu Oy. Să se studieze funcția $g(x) =$ aria ($AA'PMNQA$), unde punctul P este situat pe arcul AM al cercului, iar Q aparține arcului AN al parabolei cubice.

d) Să se calculeze valoarea cea mai mare a funcției $g(x)$.

e) Să se studieze funcția $f_1(x)$ definită prin expresia analitică a lui $f(x)$, dar pe domeniul ei maxim de definiție. Să se explice geometric apariția celei mai mari valori a funcției $f_1(x)$.

T. Roman

7058. Se consideră în același plan, unghiurile drepte MAN și MBN care se rotesc independent unul de altul, în jurul vîrfurilor fixe A și B.

a) Să se afle locul geometric al mijlocului P al segmentului MN.

b) Să se arate că dacă unghiurile MAN și MBN se rotesc în așa fel încît N să descrie o dreaptă (D) paralelă cu AB, atunci M descrie o parabolă care trece prin A și B. Să se precizeze ce descrie punctul P în acest caz.

c) Se cere locul intersecției tangentei în A cu normala în B la parabola de la punctul b) cînd dreapta (D) variază.

d) Fiind dată o dreaptă oarecare (E) în planul celor două unghiuri drepte, să se afle locurile geometrice ale punctelor M și N în cazul cînd cercul $AMBN$ este tangent dreptei (E). Să se cerceteze în mod special, cazul cînd se impune condiția ca unghiurile AMB și ANB să fie suplementare.

e) La punctele a) și d) se cer și soluții geometrice.

P. Cernescu, Tîrgoviște și *G. D. Simionescu*

Anul I școli profesionale

7059. Dintr-o mină se extrage minereu cu o concentrație de 72% fier, iar din altă mină minereu cu o concentrație de 58% fier. Amestecîndu-se o cantitate anumită de minereu din prima concentrație cu o anumită cantitate de minereu din a doua concentrație se obține minereu cu o concentrație de 62%. Luîndu-se din fiecare minereu cu 15 tone mai mult, se obține un minereu cu o concentrație de 63,25% fier. Să se determine cîte tone de minereu s-au luat din fiecare concentrație.

7060. Dintr-o placă de asbest de forma unui trapez isoscel cu unghiul de la baza mare de 60° și linia mijlocie de 6 cm, se decupează o garnitură de formă circulară. Știind că cercul care limitează garnitura este tangent la toate laturile trapezului să se determine cît la sută reprezintă aria porțiunii de asbest înlăturat, raportată la aria trapezului.

Anul II școli profesionale

7061. Dintr-o foaie de tablă de formă circulară cu diametrul de 250 mm se decupează un dreptunghi la care diferența dintre laturi este de 170 mm. Dacă din această tablă circulară s-ar decupa un patrat cu latura maximă, să se determine în care din cele două cazuri deșeul este mai mic și cît la sută din aria foii circulare reprezintă în fiecare caz.

7062. Se dă un con circular drept, din oţel, cu greutatea specifică de 7,8 gf/cm³, avînd înălţimea de 120 mm şi raza bazei de 40 mm. La ce distanţă de vîrf trebuie tăiat conul paralel cu baza, pentru a se obţine prin strunjire, un cilindru a cărui arie laterală să fie egală cu aria coroanei circulare determinate de cilindru pe baza conului. Să se afle greutatea cilindrului şi valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiului format de o generatoare cu înălţimea conului.

Anul I şcoli de maiştri

7063. Se cunoaşte înălţimea I şi generatoarea G a unui trunchi de con circumscris unei sfere. Să se calculeze aria totală şi volumul acestui trunchi de con. Aplicaţie numerică : $I = 6$ dm şi $G = 9$ dm.

7064. Un tehnician trebuie să măsoare înălţimea unui stîlp vertical de metal care susţine fire, prin care trece un curent de înaltă tensiune. În preajma stîlpului fiind un teren mlăştinos, tehnicianul se opreşte la marginea acestuia, de unde, cu ajutorul unui teodolit (aparat de măsurat unghiuri) vede stîlpul sub un unghi α. Lăsînd un jalon vertical înfipt în pămînt în acest loc, se depărtează pe direcţia stîlp-jalon cu o distanţă d, de unde vede acelaşi stîlp sub un unghi β, terenul fiind orizontal. Să se calculeze înălţimea stîlpului şi distanţa de la stîlp la jalon.

★

7065. Să se găsească patru numere consecutive divizibile, primul cu 7, al doilea cu 9, al treilea cu 11, şi ultimul cu 17.

R.M.T., anul IV, 1924, pag. 146 — N. Teodorescu

7066. Dacă $b^2 - 4ac$ este pătrat perfect, atunci şi expresia

$$(b^2 - 2ac - bc)^2 + 4c[b^3 - ac(a + c) - 3abc]$$

este pătrat perfect.

R.M.T., anul IV, 1924, pag. 78 — V. Alaci

7067. Se dă cercul C şi patrulaterul $ABCD$ cu vîrfurile A, B, D pe cerc. Să se demonstreze că bisectoarea AA' a unghiului A este perpendiculară pe dreapta $B'D'$ ce uneşte intersecţiile cercului cu bisectoarele unghiurilor B şi D.

R.M.T. anul IV, 1924, p. 168 — P. Trofimov

7068. Să se elimine x, y, z între relaţiile

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sqrt[4]{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\sqrt[4]{\frac{x-y}{x+y}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\sqrt[4]{\frac{y+z}{y-z}} + \sqrt{\frac{b+c}{b-c}}\sqrt[4]{\frac{y-z}{y+z}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}\sqrt[4]{\frac{z+x}{z-x}} + \sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\sqrt[4]{\frac{z-x}{z+x}} = 2$$

R.M.T anul X, 1930, p 12 — Cezar Coşniţă

7069. Se dă un dreptunghi $ABCD$. Perpendiculara în B pe DB întîlneşte pe DC în I, Se ia pe DA şi AB segmentele $DM = AN = CI : 2$. Să se demonstreze că triunghiul CMN este isoscel.

R.M.T. anul XV, p. 60 — D. V. Ionescu

7070. Să se rezolve ecuaţiile :

$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} \pm \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} = 2$$

$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} \pm \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

R.M.T. anul XVII, 1936, p. 144 — C. Ionescu-Ţiu

7071. Pe o dreaptă D se consideră două puncte A şi M, iar în afara dreptei un punct B. Se notează cu (C) cercul circumscris triunghiului ABM şi cu (C') cercul ortogonal primului şi trecînd prin B şi M. Să se arate că dacă punctul M se mişcă pe dreapta D, iar A şi B rămînînd fixe.

a) Cerul (C') trece prin două puncte fixe,

b) Mijlocul segmentului CC' descrie o dreaptă.

R.M.T. anul XIX, 1940, p. 156 — Vasile Vasu

7072. Să se rezolve sistemul

$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} + 3\frac{\cos 2y - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 2y} = 2$$

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} - \frac{\cos 2y + \cos 2x}{\sin 2x + \sin 2y} = 9$$

R.M.T. anul XX, 1941, p. 156 — Mihail Botez

7073. Dacă a, b, c sînt trei numere întregi, atunci numărul

$$N = (10b + c) + 2(10c + a) + 4(10a + b)$$

este totdeauna multiplu de 7.

R.M.T. anul XXVIII, 1948, p. 80 — D. Pompeiu

7074. Să se arate că:

$$\sin\frac{1}{3}(A + C)\sin\frac{1}{3}(B - C) = \cos\frac{1}{3}A\cos\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}C$$

unde $A + B + C = 180°$.

R.M.T. anul XXVIII 1949, p. 148 — Maria Neumann

PROBLEME PROPUSE *)

7075. — Să se construiască grafic, două cercuri secante de raze R şi r, astfel ca distanţa centrelor lor să fie egală cu coarda comună.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

7076. — a) Presupunînd a, b, c nenule şi distincte să se afle valoarea lui x care verifică simultan relaţiile:

$$\frac{a^2(b + c)}{a - x} = \frac{b^2(c + a)}{b - x} = \frac{c^2(a + b)}{c - x}$$

b) Să se arate că pentru valoarea lui x de la punctul a) avem identitatea:

$$\frac{(x - a)(b - x)(x - c)}{(b + a)(b + c)(a + c)} = \frac{x^2}{ab + bc + ca}.$$

Popescu Eleodor, elev Tr. Severin

---

*) IX (7075 — 7080), X (7081 — 7085), XI (7086 — 7090); S (7091—7105). Soluţiile problemelor din acest număr al G.M. — B. se primesc pînă în ziua de 30 noiembrie 1965.

7077. — Unghiul A al triunghiului ABC este cu 15° mai mic decît unghiul B şi cu 15° mai mare decît unghiul C. Să se arate că :

$$\text{a) } 3AB^2 = 2BC^2; \qquad \text{b) aria } ABC = \frac{(3+\sqrt{3})AB^2}{8}.$$

Corneliu Georgescu, Craiova

7078. — Fie dată expresia $x^2 - 4a^2x + 2p + 8 = 0$ (unde p este întreg diferit de -4). Să se determine întregul p astfel ca a să fie un număr raţional diferit de zero şi

$$\frac{4\sqrt{x_1+x_2}}{x_1+x_2} + \frac{\sqrt{x_1+x_2}}{x_1x_2} = \frac{4p}{x_1x_2}$$

unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

Petre Stavre, Craiova

7079. — Să se rezolve sistemul :

$$(x^2+2)^2 \cdot (y^2+2)^2 = \frac{1089}{4} \cdot x^2y^2; \quad (x^2+y^2)\left(1+\frac{4}{x^2y^2}\right) = \frac{925}{36}.$$

Petrescu A. Ion, elev Craiova

7080. — Se dă ecuaţia : $x^2 - (a^4+1)x + a^4 = 0$, unde a este un parametru.

a) Să se arate că ecuaţia are rădăcini reale pozitive pentru orice valori date lui a.

b) Să se determine a, astfel ca între rădăcini să avem relaţiile :

$$a') \ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2a \text{ şi } \qquad b') \ \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = 4a.$$

Alex. Păunescu, elev Tr. Severin

7081. — Să se arate că expresia $E = n^6 + 34n^4 + n^2$ este divizibilă prin 36, n fiind număr natural.

Marica Ştefan, Tr. Teverin

7082. — Fiind date segmentele a, b, c, d să se construiască expresia :

$$x = \frac{d(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Popescu Eleodor, elev Tr. Severin

7083. Fiind date pe o dreaptă, punctele distincte A, B, C să se arate că nu există nici un punct M pe acea dreaptă care să satisfacă relaţia : $MA^4 \cdot BC + MB^4 \cdot CA + MC^4 \cdot AB = 0$.

Anastasie P. Petrescu, Craiova

7084. — Fiind dat polinomul: $P(x) = x(x+1)^{2n+1} + (\alpha - 1)x^n$, unde α este un parametru real, iar n un număr natural, se cere să se determine α, aşa încît $P(x)$ să fie divizibil prin $x^2 + x + 1$ şi să se afle cîtul acestei împărţiri.

Veronica Negrei, Craiova

7085. — În planul triunghiului ABC laturile AC şi BC efectuează mişcări de rotaţie cu centrele în A şi B, în sensuri diferite, fără a traversa triunghiul. Notînd AC_1 şi BC_2 aceste laturi după ce s-au rotit de un acelaşi unghi α, să se determine valoarea lui α în cazul cînd punctele A, C_1, C_2, B sînt conciclice.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

7086. — Să se demonstreze că:

$$\sum ab(ab + 2c^2\cos C) = \frac{1}{4}(3b^2 - a^2 - c^2)^2$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

Gîdea Liviu, elev Craiova

7087. — Muchia cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este egală cu a. La ce depărtare de planul $ABCD$ se află punctul M situat pe diagonala DB_1, $(MD < MB_1)$, dacă planul ABM împarte cubul în raportul arbitrar $\frac{m}{n}$?

Corneliu Georgescu, Craiova

7088. — Să se rezolve ecuaţia: $x^4 + x^3 - x^2 - 10x - 7\lambda = 0$, unde λ este un parametru real, ştiind că între rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale ei există relaţia: $x_1x_2 + x_3x_4 = 11$.

Veronica Negrei, Craiova

7089. — Dacă a, b, c sînt unghiuri diferite de un multiplu de $\frac{\pi}{2}$ şi satisfac relaţia: $a - b \neq n\pi$, (n număr întreg) şi celelalte analoage, să se arate că:

$$\sum \frac{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\sin(c-a)\sin(c-b)} = \sum \frac{\sec a \sec b}{\sin(c-a)\sin(c-b)} = 0$$

Bîscă Octavian, elev Craiova

7090. — Se consideră funcţia:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 4}}{\sqrt{x - 2}}$$

şi se cere:

a) Să se construiască graficul;

b) Volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei $x'x$ a porţiunii din graficul de la punctul a) cuprinsă între punctele de abscise $x = -2$ şi $x = \alpha$, $(\alpha > -2)$. Să se determine valoarea lui α pentru care avem volumul $V = 4\pi(3 - \ln 4)$.

Veronica Negrei, Craiova

7091. — Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe latura AB se iau punctele E, F aşa ca $AE = EF = FB$. Dreptele ce unesc aceste puncte cu centrul O al dreptunghiului intersectează latura DC în punctele E' şi F'. Să se arate că :

a) $DF' = F'E' = E'C$.

b) Dacă $\sphericalangle BDC = 30°$, atunci $E'E$ şi FF' sînt perpendiculare respectiv pe DB şi AC.

Petre Stavre, Craiova

7092. — Se dă un cerc de rază R şi centru O şi două puncte A şi B în planul cercului.

a) Să se ducă o coardă CD paralelă cu AB astfel încît AC şi BD să se întîlnească într-un punct P pe cercul dat. Construcţia grafică cu rigla şi compasul.

b) Să se arate că în general există două puncte P (P_1 şi P_2) care corespund problemei şi să se indice cum se poate calcula distanţa P_1P_2 notînd $OA = a$, $OB = b$, $AB = d$. Se pot nota prescurtat şi alte rezultate intermediare, după ce au fost exprimate în funcţie de datele problemei.

C. Ionescu-Ţiu

7093. — În dreptunghiul $ABCD$ se iau pe dreapta BC punctele M şi N simetrice în raport cu B. Fie $NB = BM = x$ şi $AB = y$, $P = (AN, DM)$. Să se găsească locul geometric al punctului P, cînd a) x este variabil, y fiind constant; b) y este variabil cînd x este constant.

Leonte Alexandru, Craiova

7094. Să se arate că între numerele $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ avem :

$$\sum x_i^3 - 3\sum x_i x_j x_k = (\sum x_i) \cdot [\sum x_i^2 (- \sum x_i x_j].$$

(În legătură cu polinoamele omogene şi simetrice).

Anastasie Petrescu, Craiova

7095. — La o adunare au participat 225 oameni. Fiecare îşi salută numai cunoscuţii printr-o strîngere de mînă. Demonstraţi că cel puţin unul dintre cei prezenţi a strîns mîna unui număr par de cunoscuţi.

C. d. p. *Uspenski V. A.*

7096. — a) Fie ecuaţia : $mx^2 + 2x - 2m = 0$, unde m este un parametru şi x necunoscuta. Pentru care valori ale lui m ecuaţia dată are o rădăcină şi numai una, cuprinsă între -1 şi $+1$?

b) Fie ecuaţia : $m\cos 2x + 4\cos x - 3m = 0$, în care m este un parametru şi x o necunoscută. Pentru care valori ale lui m această ecuaţie are o rădăcină şi numai una singură, cuprinsă între 0° şi 180°? Să se determine m aşa fel încît ecuaţia de la b) să admită ca rădăcină $x = 120°$.

(*Balaureat Montreal şi New York*, iunie 1964)

7097. — Fie tetraedrul $ABCD$. Notăm cu I mijlocul lui AD, J mijlocul lui BC, K mijlocul lui AB, L mijlocul lui CD.

a) Să se arate că:

$$\overline{IJ} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{DB}}{2} \quad \text{și} \quad \overline{KL} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2}.$$

b) Să se arate evaluînd produsul scalar $\overline{IJ} \cdot \overline{KL}$, că dacă două muchii opuse ale unui tetraedru au aceiași lungime, segmentele ce unesc mijloacele celorlalte două perechi de muchii opuse sînt perpendiculare și reciproc.

(*Bacalaureat Montreal și New York*, iunie 1964)

7098. — Să se studieze funcția $y = \cos 2x + 2\cos x + 1$, unde x este măsura unui arc în radiani.

a) Să se studieze variația acestei funcții în intervalul $(0, \pi)$. Să se construiască graficul corespunzător (γ), luînd ca unitate de măsură centimetrul.

b) Să se calculeze aria suprafeței limitată de axa de abscise Ox și porțiunea curbei (γ) situată deasupra lui Ox.

c) Cum se poate deduce din graficul lui (γ) reprezentarea grafică (Γ) a funcției studiate cînd x ia toate valorile.

(*Bacalaureat, Franța*, iunie 1964)

7099. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x(x^2 - 3y^2) = 16, \qquad y(3x^2 - y^2) = 88$$

a) soluții grafice, b) prin calcul folosind graficul.

Matematikai Lapok, Budapesta 1964

7100. Se împarte un patrat în două părți egale printr-o dreaptă Δ care trece prin centrul său. Se cere locul geometric al centrelor de greutate ale celor două părți obținute cînd dreapta Δ se rotește în jurul centrului patratului.

The American Mathematical Monthly

7101. Se consideră ecuația:

$$y'' + y = 2\cos x, \tag{1}$$

în care y reprezintă o funcție necunoscută și y'' derivata a doua a lui y.

a) Să se arate că este posibilă determinarea constantelor a și b așa fel ca funcția $y = ax \sin(bx)$ să fie soluția ecuației (1).

b) Constantele a și b avînd valorile determinate mai sus, se pune

$$y = ax \sin(bx) + z.$$

Să se formeze ecuația pe care o satisfac z și derivata sa secundă, z''. Să se deducă de aci, soluția generală a ecuației (1).

(*Bacalaureat Franța, subiect-tip*, 1964)

7102. Fie (C) curba care raportată la două axe de coordonate rectangulare $x'Ox$, $y'Oy$ are ecuația

$$y = 4x^2 - 12x\sin\varphi - 5\cos 2\varphi$$

unde φ reprezintă măsura algebrică, presupusă cuprinsă între 0 și 2π, a unui unghi dat.

a) Să se demonstreze că oricare ar fi φ, curba (C) taie axa $x'Ox$ în două puncte A și B. Să se formeze relația independentă de φ care există între abscisele acestor puncte.

b) Să se calculeze în funcție de φ lungimea segmentului AB. Pentru care valori ale lui φ această lungime este minimă? Să se construiască curbele (C) corespunzătoare.

c) Pentru care valori ale lui φ curba (C) trece prin origină? Desemnați curbele (C) corespunzătoare.

d) Să se formeze ecuația liniei pe care se deplasează, cînd φ variază, vîrful S al lui (C) și să se precizeze locul punctului S.

(*Bacalaureat Pondichéry*, iunie 1964)

7103. a) Admițînd că derivata lui e^x este e^x să se arate că dacă $y = e^x$, $y' = -y$.

b) Un plan este raportat la un reper ortonormat Ox, Oy; coordonatele unui punct M sînt date în funcție de momentul t, prin formulele: $x = e^t$ și $y = e^{-t}$, unde t ia toate valorile. Să se construiască traiectoria (C) a punctului M.

c) Să se dea coordonatele vectorului viteză și ale vectorului accelerație ale punctului M la momentul t.

d) Se duce prin originea O, vectorul $\overline{Om}$ echipolent cu vectorul viteză al lui M la momentul t. Să se construiască curba (H) descrisă de m. Să se compare (H) cu (C).

e) Se consideră pe (C) punctul M la un moment oarecare t. Să se construiască vectorul viteză $\overline{MM'}$ folosind curba (H) și să se arate că M' este pe Ox. Să se construiască vectorul accelerație $\overline{MM''}$.

(*Bacalaureat Franța*, iunie 1964)

7104. Într-un reper ortonormat $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ fie (S) sfera de rază 1 cu centrul în originea O a coordonatelor.

a) Să se calculeze volumul $V(x)$ al lui (S) cuprins între planele $X = a$ și $X = x$.

b) Să se reprezinte grafic funcția $y = V(x)$.

c) Această curbă are un punct unghiular pentru $x = a$. Să se calculeze valoarea lui a astfel ca cele două semitangente în acest punct să fie rectangulare.

(*Bacalaureat Montreal și New York*, iunie 1964)

7105. a) Să se verifice relația:

$$\frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1} = 2\cos a - 1 \qquad (1)$$

b) Să se aplice relația de mai sus la calculul sumei:

$$S_n = \sum_0^n \log\left(2\cos\frac{a}{2^n} - 1\right)$$

în care a este un unghi astfel că $0 < a < \frac{\pi}{3}$ și n un întreg aritmetic.

c) Să se determine limita sumei S_n cînd n crește nedefinit.

Journal de mathématiques élémentaires, 1965

★

7106. Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul său de greutate și P un punct arbitrar în planul triunghiului. Se ia pe prelungirea dreptei PG un punct Q așa fel ca $2GQ = GM$. Fie α, β, γ punctele unde transversalele unghiulare AP, BP, CP întîlnesc laturile BC, CA, AB și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{QA}{P\alpha} + \frac{QB_1}{P\beta} + \frac{QC_1}{P\gamma} \geqslant 3$$

G.M. 1928, p. 359 — *Tiberiu Popoviciu*

7107. Să se găsească numerele A și B întregi, știind că produsul lor este de k ori (k întreg) mai mare decît suma lor. Caz particular $k = 2$.

G.M. 1931, p. 439 — *Miron Nicolescu*

7108. Să se arate că dacă a, b, c, α, β, γ sînt șase numere reale, ultimele trei fiind legate prin relația

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

atunci relația

$$(ab + bc + ca)x^2 - 2(a + b + c)x - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 1) = 0$$

are rădăcinile reale.

G.M. 1934, p. 480 — *Gh. Th. Gheorghiu*

7109. Care sînt cuburile terminate prin rădăcina lor cubică?

G.M. 1946, p. 582 — *M. Ghermănescu*

7110. Să se rezolve ecuația $x^2 + px + q = 0$ știind că $x_1 = px_2 + q$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile.

G.M. 1936, p. 503 — *I. Linteș*

7111. Se dau în plan punctele A, B, C și o dreaptă Δ trecînd prin A. Fie M un punct pe Δ. Paralela din M la BC taie pe AC în N și pe AB în N'. Paralela din N la AB taie pe MB în P, iar paralela din N' la AC taie pe MC în Q. Să se demonstreze că dreptele BQ, CP sînt paralele cu Δ.

G.M. 1936, p. 646 — *Gh. Buicliu*

7112. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi avem

$$\frac{15}{4} \leqslant \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} \leqslant \frac{9}{2}$$

$2p$ fiind perimetrul triunghiului.

G.M. 1938, p. 671 — *N. Ciorănescu*

7113. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sin\left(\frac{n-1}{3n}\pi + \frac{A}{n}\right)\sin\left(\frac{n-1}{3n}\pi + \frac{B}{n}\right)\sin\left(\frac{n-1}{3n}\pi + \frac{C}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{A}{n+1}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{B}{n+1}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3n+3} + \frac{C}{n+1}\right)$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare şi n un întreg pozitiv.

G.M., 1940, p. 616, — *C. Ionescu-Ţiu*

7114. În patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul fix O, latura AD este fixă, iar latura BC are o lungime constantă. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor AB şi CD.

S.G.M. anul I, 1934, p. 8 — *N. Botea*

7115. Să se determine domeniul de definiţie al funcţie

$$y = \sqrt{\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}}$$

Ce particularităţi prezintă această funcţie?

S.G.M. an II 1935, p. 46 — *O.N. Ţino*

7116. Să se invedereze prin consideraţie de mecanică, că în planul unui patrulater oarecare există în general patru puncte astfel ca ariile triunghiurilor cu vîrful în fiecare din ele şi cu baza respectiv perechi de laturi opuse să fie egale.

S.G.M. an II 1936, p. 88 — *N. Mihăileanu*

7117. Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} > \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

S.G.M. an III, 1937, p. 184 — *H.P. Ionescu*

7118. Să se studieze cu ajutorul teoremei lui Rolle natura rădăcinilor ecuaţiei

$$6x^6 - 42x^5 + 73x^4 - 70x^3 + 18x^2 + \alpha = 0$$

cînd parametrul α variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

S.G.M. an VI, 1940, p. 122 — *G. D. Simionescu*

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII *)

E : 2354. — Să se găsească 4 numere impare consecutive, știind că suma lor este mai mică decît 100 și divizibilă cu 7.

Marica Ștefan, Turnu Severin

E : 2355. — Trei muncitori au de efectuat după plan, fiecare cîte un număr dferit de piese, lucrînd 8 ore pe zi. Primul le termină în $6\frac{2}{3}$; ore ; al doilea și al treilea, presupunînd că au aceeași îndemînare le termină în $6\frac{1}{4}$ ore, respectiv $7\frac{1}{2}$ ore. Știind că al treilea a produs în cele $7\frac{1}{2}$ ore mai mult decît al doilea cu $\frac{1}{15}$ din numărul pieselor ce trebuiau executate de cei trei muncitori, iar după $6\frac{1}{4}$ ore cu 25 piese mai mult decît primul în același timp, să se afle cîte piese peste plan au dat muncitorii.

Vișan Ion, elev Tr. Severin

E : 2356. — Să se calculeze expresia :

$$E = 2 + 2.3^2 : 6 + 2.\,[2 + 2\cdot(3^2 + 2.5^2 : 10 - 7)^2] : 10^2 + 3$$

I. Șt. Mușat

E : 2357. — Grîul cu care era plină o magazie de formă paralelipipedică cu aria laterală de 188,4 m², înălțimea de 4 m și lungimea bazei cît dublul lățimii ei a fost mutat într-un siloz cilindric, nou construit, cu diametrul bazei de 10 m. Să se afle pînă la ce înălțime s-a ridicat grîul în siloz, știind că acesta a fost netezit uniform.

I. Șt. Mușat

E : 2358. — Pe un șantier de construcții lucrează un număr de muncitori, iar pe al doilea șantier un alt număr de muncitori. Raportul dintre numărul de muncitori de pe cele două șantiere este de 4 : 3. Dacă s-ar trece 6 muncitori de pe primul șantier pe al doilea, raportul dintre numărul de muncitori de pe rimul șantier față de al doilea ar fi $3 : 2\frac{1}{2}$. Să se afle cîți muncitori lucrează pe fiecare șantier.

D. Mîrzan, R.-Vîlcea

E : 2359. — Trei cooperative agricole de producție au vîndut statului 257,7 tone de grîu, pe care l-au avut contractat. Prima cooperativă a vîndut cu 4,5 tone mai mult decît a doua, iar a doua cu 3,6 tone mai mult decît a treiea. Să se afle cîte tone de grîu a vîndut statului fiecare cooperativă.

D. Mîrzan, R.-Vîlcea

---

*) V (E : 2354–2356), VI (E : 2356–2359), VII (E : 2360–2362), VIII (E : 2363–2366). Soluțiile se primesc pînă la 30 noiembrie 1965.

E : 2360. — Într-o secție a I. F. Nehoiu, în luna mai, indicele de valorificare a lemnului a crescut cu 10% față de luna aprilie. Știind că în luna aprilie și mai s-au prelucrat cîte 200 m^3 de lemn brut și că în total în cele două luni s-a obținut 300 m^3 de cherestea, să se calculeze indicele de valorificare a lemnului și cantitatea de cherestea din fiecare lună.

Filipoiu Alexandru, elev Buzău

E : 2361. — La unul din izvoarele cu apă minerală din Tușnad, cantitatea de elemente mineralizate este de 7345,7 mg la un kg de apă. Radicalul bicarbonic care intră aci, are o greutate de 3951,3 mg, iar bioxidul de carbon contribuie cu 24,26% din întreaga cantitate de materie mineralizată. Raportul dintre greutatea sodiului și aceea a bioxidului de carbon este $\frac{5}{22}$.

a) Cu cît la sută intră radicalul bicarbonic? b) Ce greutate are bioxidul de carbon? c) Ce greutate are sodiul? d) Cu ce procent și cu ce greutate intră celelelalte elemente?

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2362. — Se dă triunghiul echilateral ABC și un punct M pe latura BC. Din M se duce perpendiculara MP pe AC, care întîlnește prelungirea laturii AB în D. Să se arate că : a) $MB = BD$; b) $AB = 2(CP + BN)$, unde N este mijlocul lui MD. Să se găsească locul geometric al lui N, cînd M se mișcă pe BC, rămînînd în interiorul acestei laturi.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 2363. O brigadă a unei gospodării agricole de stat trebuia să recolteze porumbul de pe o anumită suprafață de teren într-un timp anumit. Dar simțind nevoia ca terenul să fie eliberat cît mai repede, conducerea gospodăriei a scurtat timpul de recoltare la 1/3 din cel planificat, din care pricină a mărit brigada de recoltare a porumbului la 180 de membri, trecînd în ea bărbați și femei, din alte brigăzi ale gospodăriei.

Să se calculeze cu cîți bărbați și cu cîte femei a crescut brigada de recoltare a porumbului, știind că raportul dintre numărul femeilor și cel al bărbaților a fost 2 :3 în brigada nemărită, iar după ce brigada s-a mărit acest raport a fost 7 : 5.

Florea I. Dumitrescu, Craiova

E : 2364. Doi motocicliști pornesc din orașul A spre B la interval de 2 ore unul după altul. Știind că raportul vitezelor lor este 2 : 3 și că acestea diferă cu 20 km/h, să se afle distanța dintre aceste orașe cunoscînd că al doilea motociclist ajunge în orașul B cu un sfert de oră înaintea primului.

Petru Grăjdeanu

E : 2365. O cooperativă agricolă de producție a depozitat cantitatea de 120 tone grîu în două magazii. Dacă din prima magazie s-a scos 1/4 din grîul ce se afla acolo, iar din a doua s-a scos 25% atunci în magazia a doua a mai rămas de 3 ori mai mult grîu decît în prima. Să se afle ce cantitate de grîu s-a depozitat în fiecare magazie?

D. Mîrzan, Bujoreni

E : 2366. În anul 1964 s-au folosit în țara noastră 326 000 televizoare și aparate de radio. Știind că s-au produs de $4\frac{51}{55}$ ori mai multe aparate de radio decît televizoare, să se afle cîte aparate de radio și cîte televizoare au fost fabricate.

Șt. Marica, Tr. Severin

DESPRE ACTIVITATEA CERCURILOR DE MATEMATICĂ DE LA ȘCOALA MEDIE NR. 2 DIN CRAIOVA

I — Cercul clasei a XI-a

Încadrîndu-se în ritmul susținut al progresului matematicii actuale, activitatea cercului de matematică al claselor a XI-a a căutat să se afirme din acest punct de vedere, urmărind comparativ activitatea desfășurată în anii precedenți și dezvoltînd-o în mod creator.

Lucrările cercului desfășurate lunar s-au bucurat de un viu interes din partea elevilor.

Referatele expuse au fost urmate de discuții și pe baza celor analizate s-au făcut propuneri interesante, s-au dat soluții personale, generalizări etc. A fost îmbunătățită tematica ședințelor științifice ținute în școală, pe baza experienței membrilor cercului. În acest sens, printre temele abordate citām :

— Figuri de matematicieni romîni, susținut de elevul Andrei Dan,
— Probleme celebre ale matematicii — de elevul Rusu Aurelian.
— Aplicații ale calculului probabilităților de eleva Cojocaru Mariana,
— Calculul vectorial de elevul Hotăranu Ion,
— Aplicații are calculului vectorial în geometria analitică și sintetică de elevul Gîdea Liviu.

Scopul lor a fost fixarea cunoștințelor matematice ale elevilor, precum și lărgirea orizontului și culturii în acest domeniu.

Una dintre problemele mai interesante discutate la o ședință a cercului a fost următoarea :

Față de un sistem de axe dreptunghiulare xOy se consideră punctul fix A situat pe Oy și un punct $P(\alpha, \beta)$ mobil în plan.

a) Să se scrie ecuația generală a cercurilor care au centrul în P și trec prin originea axelor. Să se afle locul geometric al punctului P știind că tangentele duse din A la oricare din cercurile de mai sus sînt perpendiculare.

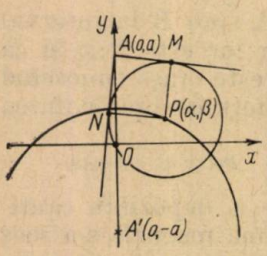
b) Notăm cu (C) mulțimea cercurilor cu centrul în P care satisfac această condiție și cu (L) locul geometric (tot un cerc).

Să se determine analitic și să se construiască grafic acele cercuri din (C) față de care A are aceeași putere ca și față de (L).

c) Să se afle locul geometric al celui de-al doilea punct de intersecție al unui cerc din $(C$ cu perpendiculara dusă din origină pe AP, unde P este centrul cercului respectiv.

Rezolvare. a) La acest punct elevul Hotăreanu Ion a dat următoarea soluție :

Fie $A(0, a)$. Ecuația generală a cercurilor cu centrul în P și de rază OP este :



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

sau :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \qquad (1)$$

Rezultă că A se găsește pe cercul cu centrul P și de rază $R_1 = R\sqrt{2}$, unde $R = PO$. Deci A se găsește pe cercul :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = = 2(\alpha^2 + \beta^2) \qquad (2)$$

deci, $x = 0$, $y = a$ verifică ecuația (2). Așadar,

$$(-\alpha)^2 + (a - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) \text{ sau : } \alpha^2 + \beta^2 + 2a\beta - a^2 = 0. \qquad (3)$$

Această relație exprimă legătura între coordonatele lui x și y, fiind deci ecuația locului geometric căutat. Înlocuind pe respectiv cu x, y avem :

$$(L) \equiv x^2 + y^2 + 2ay - a = 0 \qquad (4)$$

Locul lui P este cercul cu centrul în $A'(0, -a)$ și cu raza egală cu $a\sqrt{2}$.

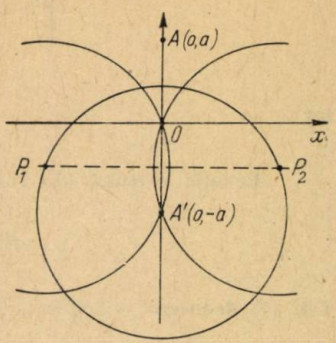
Se observă că toate cercurile cu centrul în punctul P situat pe (L) și de rază OP îndeplinesc condiția cerută de problemă (tangentele duse din A la cerc să fie perpendiculare).

Cu alte cuvinte, mulțimea (C) va fi mulțimea cercurilor de ecuație (1) ale căror centre verifică ecuația (3). Deci, mulțimea (C) va fi definită de relațiile simultane :

$$(C) \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 & (5') \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2a\beta - a^2 = 0 & (5''). \end{cases}$$

— Altă metodă pentru determinarea locului geometric a dat-o elevul Tolea Nicolae.

Fie M, N punctele de contact ale tangentelor duse din A la cercul (P). Unghiul MAN fiind drept, rezultă imediat că patrulaterul $MANP$ este un patrat ; teorema lui Pitagora în triunghiul PAN dă : $AP^2 = 2AN$, sau, fiindcă $AN = PO$, $AP^2 = 2PO^2$.



Analitic, relația devine :

$$\alpha^2 + (\beta - a)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

sau :

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2a\beta - a^2 = 0,$$

adică tocmai relația (3).

Mai departe, la fel ca la prima soluție.

Elevul Gîdea Liviu a făcut următoarea remarcă :

Să motivăm că toate cercurile cu centrul în P situat pe (L) și de rază OP verifică condiția. Cu alte cuvinte, să arătăm că nici un cerc din (C) nu conține pe A în interior.

Acest lucru se verifică imediat, dacă în (5') facem $x = 0$, $y = 0$. Dar din (5'') rezultă că $a^2 - 2a\beta = \alpha^2 + \beta^2 > 0$, deci, $a^2 - 2a\beta > 0$, ceea ce stabilește afirmația făcută mai sus.

Lucrînd în alt mod, să considerăm cazul cînd A este cel mai apropiat de P și să dovedim că $AO > 2PO$. Într-adevăr, $PO = A'P - A'0 = a(\sqrt{2} - 1)$ deci, trebuie ca $a > 2a(\sqrt{2} - 1)$ ceea ce este evident.

Rezolvarea punctului b). Elevul Rusu Aurelian a dat următoarea soluție :

Fie ρ_1 puterea lui A față de (L) ; $\rho_1 = a^2 + 2a^2 - a^2 - 2a^2$.

Fie ρ_2 puterea lui A față de un cerc din (C) : $\rho_2 = a^2 - 2a\beta$. Potrivit enunțului $\rho_1 = \rho_2$. Înlocuind rezultă

$$\beta = -\frac{a}{2} \qquad (6)$$

Înlocuind în (3) avem : $\alpha_1 = -\frac{a\sqrt{7}}{2}$; $\alpha_2 = \frac{a\sqrt{7}}{2}$; deci sînt două cercuri care satisfac problema. Centrele lor sînt în $P_1\left(-\frac{a\sqrt{7}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ și $P_2\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, iar razele respectiv egale cu P_1O, P_2O.

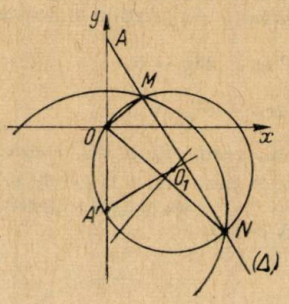
Construcția rezultă din (6). La distanța $d = -\frac{a}{2}$ de O se duce o paralelă la Ox ce taie (L) în P_1, P_2. Restul construcției e evident.

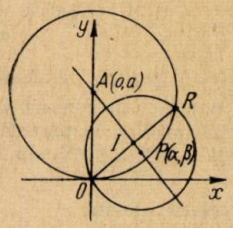
Elevul Gîdea Liviu a observat că :

Pentru stabilirea lui ρ_1 s-a folosit numai relația (5'). Acest lucru înseamnă că pentru punctul b), condiția (5'') este de prisos ; ca atare A are aceeași putere față de (L) și față de alte cercuri din (1). Geometric, acest lucru se observă ușor.

Fie dreapta (Δ) arbitrară care trece prin A. Ea taie (L) în M și N. Fie O, centrul cercului OMN. Punctul A fiind pe axul radical al cercurilor (L) și (O_1) are aceeași putere față de (L) și față de (O_1), deci A are aceeași putere față de alte cercuri din (L) care nu îndeplinesc condiția (5'').

Rezolvarea punctului c). Eleva Cojocaru Mariana a dat soluția următoare:
Dreapta AP are coeficientul unghiular $m_{AP} = \frac{\beta - a}{\alpha}$ deci, $m_{OR} = \frac{\alpha}{a - \beta}$,





iar
$$(OR)y = \frac{\alpha x}{a - \beta} \tag{7}$$

Ecuația cercului (P) fiind un cerc din (C) este

$$(P) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 & (5') \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2a\beta - a^2 = 0 & (5'') \end{cases}$$

Din (7) deducem $-2a\beta = -2\alpha x - 2\beta y$ și introducînd în (5') avem:

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0 \tag{8}$$

Aceasta este ecuația locului geometric al lui R: un cerc cu centrul în A și cu raza OA.

— Elevul Babarada Ion a dat o soluție geometrică elementară pentru punctul c):
AP fiind diametru în cercul (P) și OR fiind perpendiculară pe AP, dacă $I \equiv (AP, OP)$ rezultă $OI = IR$. Mai rezultă apoi imediat că triunghiurile AOI și ARI sînt egale de unde,

$$AR = AO = a = \text{constant}.$$

Deci, R descrie cercul cu centrul în A și cu raza AO.
— Elevul Ilie Ștefan observă că:
La determinarea locului lui R nu se folosește relația (5''), deci, chiar dacă cercul P nu face parte din mulțimea (C), R descrie totuși cercul (8). Acest lucru se vede mai ușor din soluția geometrică dată mai sus, căci nu se specifică deloc că $A'P = a\sqrt{2}$.
— Sperăm ca pe viitor să accentuăm activitatea în scopul obținerii de rezultate cît mai bune atît școlare, cît și extrașcolare.

Gidea L. și Rusu A., elevi s. m. 2 Craiova

II — Cercul clasei a IX-a

Din experiența acumulată pînă acum, atît în anul acesta, cît și din anii precedenți, se poate vedea cît de bine activitatea din cercuri dezvoltă la elevi, interesul pentru matematică, îi obișnuiește cu studiul individual, le lărgește orizontul matematic, formează buni matematicieni. Din cele nouă clase a IX-a din școală, o parte din elevi participă la cercul pe oraș, iar o parte la cercul pe școală. Cercul își desfășoară ședințele lunar, conform regulamentului actual de funcționare pentru școlile de cultură generală. Ziua ținerii ședințelor s-a fixat miercurea, în funcție de programul tuturor claselor. Conducerea cercului o are un colectiv de elevi format din: Stoica Ion, Grosu Elena, Cîrciumărescu, Popescu Maria. Mobilizarea elevilor la cerc este făcută de către conducerea cercului, prin membrii din comitetul de conducere, sprijiniți de organizația U.T.M.
Cercul și-a propus să adîncească cunoștințele prevăzute de programă, să antreneze elevii pentru colaborarea la „Gazeta matematică" seria B, să abordeze din problemele moderne ale matematicii etc.

Pregătirea referatelor care se susțin de către elevi este sprijinită de tovarășii profesori de matematică, care îndrumează activitatea în cerc. În cadrul cercului s-au rezolvat probleme diverse, probleme date la olimpiadele de matematică din ultimii ani, s-au propus spre rezolvare probleme legate de tema referatului prezentat în ședința respectivă.

Pe lîngă alte teme s-a luat hotărîrea ca la cerc să se pună accent pe temele legate de geometrie. Una din ședințele cercului a informat pe elevi despre transversale în triunghi, probleme de coliniaritate și concurență. Elevul Stoica Ion a prezentat teorema lui Menelau, iar elevul Marin Grigore, teorema lui Ceva. În ședința din 17 februarie a.c. au fost rezolvate probleme legate de tema „transversale''.

Mai întîi ,elevul Cîlniceanu Gabriel, pe baza definiției sinusului unui unghi și a teoremei sinusurilor a arătat interpretarea trigonometrică a teoremei lui Menelau. După aceea a prezentat problema :

Fie triunghiul oarecare ABC ale cărui laturi sînt tăiate de o transversală pe care se ia un punct O. Se consideră simetricele dreptelor OA, OB, OC față de transversală. Aceste drepte taie laturile triunghiului în punctele A', B', C'. Să se arate că punctele A', B', C' sînt coliniare.

Rezolvarea. Dacă se notează cu α, β, γ laturile opuse unghiurilor A, B, C segmentele OA', OB', OC' cu α', β', γ' respectiv, segmentele OA, OB, OC cu λ, μ, ν, teorema sinusurilor în triunghiurile $A'OB$ și $OA'C$ ne conduce la două relații care prin împărțire dau :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BO}{CO} \cdot \frac{\sin(\mu, \alpha')}{\sin(\nu, \alpha')}$$

Pe baza permutărilor circulare se pot înscrie încă alte două relații care prin înmulțire dau relația :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin(\mu, \alpha')}{\sin(\nu, \alpha')} \cdot \frac{\sin(\nu, \beta')}{\sin(\lambda, \beta')} \cdot \frac{\sin(\lambda, \gamma')}{\sin(\mu, \gamma')}.$$

Expresia din dreapta devine egală cu unu, în urma simplificărilor, ținînd seama de egalitățile de unghiuri, conform enunțului.

Reciproca teoremei lui Menelau ne indică concluzia că punctele A', B', C' sînt coliniare.

Cunoscîndu-se noțiunea de raport anarmonic sau biraport, s-a trecut la rezolvarea problemei :

Două transversale taie laturile BC, CA, AB respectiv în P, Q, R și P', Q', R'. Să se arate că : $(BCPP') \cdot (CAQQ') \cdot (ABRR') = 1$.

Eleva Grecescu Rodica a dat soluția următoare :

Teorema lui Menelau aplicată triunghiului ABV și celor două transversale ne dă două relații al căror produs este :

$$\left(\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB}\right) \cdot \left(\frac{P'C}{P'B} \cdot \frac{R'B}{R'A} \cdot \frac{Q'A}{Q'C}\right) = 1.$$

Grupînd convenabil și folosind împărțirea se ajunge la relația :

$$\left(\frac{PB}{PC} : \frac{P'B}{P'C}\right) \cdot \left(\frac{QC}{QA} : \frac{Q'C}{Q'A}\right) \cdot \left(\frac{RA}{RB} : \frac{R'A}{R'B}\right) = 1,$$

adică tocmai relația cerută $(BCPP') \cdot (CAQQ') \cdot (ABRR') = 1$.

Se știe că două drepte simetrice față de bisectoarea unui unghi și care trec prin vîrful lui se numesc drepte izogonale. În ședința următoare s-a stabilit relația lui Steiner. Această relație spune : Dacă M și N sînt punctele de intersecție cu latura BC a două izogonale din vîrful A al triunghiului ABC, atunci există relația : $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Mai departe, s-a trecut la rezolvarea problemei :

Dacă pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC se iau respectiv punctele P, Q, R arbitrare, fie P', Q', R' respectiv picioarele izogonalelor dreptelor AP, BQ, CR în raport cu unghiurile A, B, C.

a) Dacă punctele P, Q, R sînt pe o dreaptă (Δ), atunci punctele P', Q', R' se află pe o altă dreaptă (Δ') ; cele două drepte sînt transversale izogonale sau inverse.

b) Dacă dreptele AP, BQ, CR sînt concurente într-un punct M, atunci și dreptele AP', BQ', CR' sînt concurente într-un punct M', cele două puncte M și M' se zic izogonale sau inverse.

Elevul Lungu Marin a dat următoarea soluție.

a) Dacă dreapta AP are ca izogonală dreapta AP', relația lui Steiner se dă: $\frac{PC}{PB}\cdot\frac{P'C}{P'B}=\frac{AC^2}{AB^2}$. Pentru celelalte perechi de izogonale, analog, se obțin relațiile: $\frac{QA}{QC}\cdot\frac{Q'A}{Q'C}=\frac{BA^2}{BC^2}$ și $\frac{RB}{RA}\cdot\frac{R'B}{R'A}=\frac{CB^2}{CA^2}$. Înmulțind și grupînd convenabil, făcînd simplificările posibile pentru cele trei relații obținem:

$$\left(\frac{QA}{QC}\cdot\frac{PC}{PB}\cdot\frac{RB}{RA}\right)\cdot\left(\frac{Q'A}{Q'C}\cdot\frac{P'C}{P'B}\cdot\frac{R'B}{R'A}\right)=1$$

În baza ipotezei (P, Q, R — colineare) rezultă:

$\frac{Q'A}{Q'C}\cdot\frac{P'C}{P'B}\cdot\frac{R'B}{R'A}=1$, adică, conform reciprocei teoremei lui Menelau, punctele Q', P', R' sînt colineare.

b) Dreptele AP, BQ, CR fiind concurente se verifică

$$\frac{QA}{QC}\cdot\frac{PC}{PB}\cdot\frac{RB}{RA}=-1,$$

astfel că relația precedentă ne permite să scriem: $\frac{Q'A}{Q'C}\cdot\frac{P'C}{P'B}\cdot\frac{R'B}{R'A}=-1$, ceea ce înseamnă că și dreptele AP', BQ', CR' sînt concurente.

În continuare s-a arătat că ortocentrul și centrul cercului circumscris unui triunghi sînt două puncte izogonale *.

Apoi, s-au propus problemele pentru ședința următoare de cerc.

Cornelia Tuțescu, profesoară Craiova

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții bune primite pînă la 1 martie 1963 (urmare)

PLOIEȘTI. S. m. 2, Cl. IX. Ceheriu Mihail (6553—55, 57—59, 61—63, 67, 69, 71—74, 79, 80, 72, 83, 86, 97, 601, 05, 07, 14, 16, 24, 25, 31, 32, 34, 36, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 56, 60).

Ș.m. 4 cl. VIII. Arsenescu Marian (E: 2210, 11, 15—19), Coman Jean (E: 2210, 11, 15—19; 6551,63), Cristescu Teodor (E: 2210, 11, 13, 15—19, 6561, 63), Enescu Adrian (E: 2210, 13, 14—19; 6561, 63), Vasilache Dan (E: 2210, 11, 13, 18, 20, 29, 32, 6561, 63). Cl. IX. Sachelarie Dan (6554, 58, 61, 63, 72, 79, 80, 83, 85, 97, 601, 03, 05, 09, 10, 15, 18, 21, 1, 32, 34, 39, 42—44, 48, 49, 53, 61—63).

S.m. 5 cl. IX. Nicolae Florea (6601, 06, 09, 15, 39, 46, 49, 58, 60, 67, 71, 801, 83, 86), Breabăn Anca (6510, 25, 26, 36, 63, 84, 85, 86, 601, 05, 09, 15).

S.m. 6 cl. VII. Nicolae Daniela (F: 2217—19, 33, 40, 42, 43, 45). Cl. VIII. Plăieșu Ștefan (E: 2210, 13, 15—17, 19, 33, 35, 40, 45, 47).

POCIOVALIȘTEA (Oltenia). Cl. VI. Burlica Victoria (E: 2198, 206, 20, 26, 32, 35, 40, 43, 47), Păpușică Veronica (E: 2198, 206, 16—18, 20, 40, 43), Tomescu Ion (E: 2211, 13, 16—18, 26, 27, 33, 30, 43). Cl. VII. Ghera Ion (E: 2206, 16, 17, 20, 22, 26, 27, 32, 40), Ingustu Elenora (E: 2210, 11, 20, 25, 27, 32, 35, 42), Nedu Leonica (E: 2206, 16, 18, 20, 32, 35, 40, 43), Popescu Ion (E: 2211, 16, 20, 21, 26, 32, 38, 47), Popescu Maria (E: 2210, 11, 13—18, 20, 23, 25—27, 35, 40, 42), Răduca I. Mircea (E: 2211, 13, 15, 16, 20, 27, 33, 42, 47). Cl. VIII. Circiu Titu (E: 2206, 11, 15, 16, 18, 20, 27,

* În legătură cu dreptele izogonale, în cercul de elevi se poate consulta articolul „Izogonale și unghiuri rotite într-un triunghi", G.M.—B. nr. 4, 1963.

32, 33, 40), Crîngu Aurel (E : 2216, 15, 18, 24, 31, 32, 54, 62), Leuştean Constantin (E : 2211, 15, 18, 32, 33, 40, 42, 43), Leuştean Maria (E : 2202, 06, 07, 20, 25—27, 32, 33, 40), Tomescu Irina (E : 2202, 06, 17, 20, 25, 27, 32, 40, 49).

POCRUIA (Argeş). Şc. 8 ani cl. VI. Grindeanu Mirela (E : 2220, 32, 40, 42, 43, 47, 48, 50, 54), Ioviţă Maria (E : 2220, 26, 32, 42, 43, 47, 48, 50, 54), Virtici Dusia (E : 2226, 32, 40, 43, 47, 48, 50, 54).

PRISĂCANI (Iaşi). Pirtoc Mariana (E : 2220—26, 28, 29, 31, 32, 36, 42, 43, 45).

PRUNDUL BÎRGĂULUI (Cluj). Cl. X. Boieriu Octavian (6504, 07, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 36, 61, 63, 83, 601, 09, 15).

PUCHENI MOŞNENI (Ploieşti). Cl. VI. Stan Vasile (E : 2210, 15—17, 32, 38, 40, 43, 47). Cl. VIII. Stan Stelian (E : 2210, 15—17, 32, 33, 38, 40, 42, 45, 47).

PUCIOASA (Ploieşti). Cl. IX. Toţi elevii au completat numărul de probleme pînă la 12, cu probleme date pentru clasele V-VIII, însă cu soluţii identice.

Cl. X. Angelescu Constantin (6503, 07, 10, 12, 12, 19, 22, 25, 26. 54, 58, 61, 63, 67, 83, 85, 86, 601, 09, 15). Vasilescu Nicolae (6627, 30—36, 39 41, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 53, 57, 60—67, 70—78, 80, 85, 91, 95, 97, 706, 07). Cl. XI. *Aron Constantin* (6580—82, 84, 87, 93, 97, 899, 601, 03, 05, 09, 12, 14 18, 22, 30, 30, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 62,58, 59, 63, 66, 70—78, 80—83, 93, 95), Gorgon V. Viorica (6551, 61, 63, 82, 83, 84, 85, 85, 601, 09, 15, 39, 46).

RĂCARI (Bucureşti). Ş.m. cl. XI. Ionescu Marian (6549, 55, 58, 74, 83, —85, 87, 601, 09, 15, 19, 23), Ştefan Alexandru (6654, 55, 58, 61, 63, 65, 74, 83, 84, 97, 601, 09, 15, 19).

RĂCHIŢI (Suceava). Şc. 8 ani. Moldoveanu Rodica (E : 2200—02, 06, 10, 15—18).

RĂDĂUŢI. S.m.l. cl. X. Condrescu Călin (6553, 54, 57—59, 61, 63, 67, 71, 605, 31, 46).

Ş.m. 2. Cl. IX. Călăraşu Doru (E : 2228, 31, 36, 37, 54, 61, 63, 601, 09, 15, 39, 46, 65). cl. XI. Weinstein Jack (6580—86, 90, 91, 96, 601, 05, 07, 09, 15, 16).

RADU NEGRU. (Dobrogea) Şc. 8 ani nr.1 cl. VI. Radu Vasile (E : 2198, 210, 15—17, 20, 24, 32).

RÎMNICUL SĂRAT. Rogozeanu Dragoş (E : 2210, 15, 20, 27, 31, 32, 33, 38, 40, 43, 47).

RÎMNICUL-VÎLCEA. Sc. 8 ani nr. 5 cl. VIII. Tiblea Mihai (E : 2210, 11, 13, 16—18, 20, 23, 25, 32, 33, 38, 40, 42, 43).

Ş.m. Vasile Roaită, cl. X. Moinescu Dumitru (6510, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 26, 61, 63, 83, 86, 601, 09, 15). Cl. XI. Dina Marin (6551, 54, 55, 58, 59, 61, 63, 66, 67, 71, 72), Droaşcă Bogdan (6551, 54, 55, 57—61, 63, 66, 67, 71, 72).

Ş.m. 3. Tănase Constantin (6554, 61, 80, 82, 83, 87, 601, 07, 09, 15, 19, 24, 32, 41, 46, 63).

ROMAN. Cl. X. Pamfil Valeriu (6504, 10, 15, 25, 62, 84, 87, 601, 05, 09, 15, 16, 34, 39, 44, 46), Rugină Andrei (6504, 12, 23, 32, 36, 53, 67, 89, 82—88, 97, 99, 601, 05, 06, 09, 15, 16, 18, 30, 34, 46, 53, 61, 63, 65).

ROŞIORII DE VEDE (Bucureşti). Ş.m.l cl. IX. Porumbeanu Marin (F : 2219, 28, 29, 30, 37, 45 ; 6510, 63, 85, 86, 609, 15). Cl. X. Sănulescu Ion (6553, 54, 58, 61, 63, 71, 80, 83, 74, 85, 86, 601, 05, 06, 08, 09, 10, 15, 27, 31, 34, 41, 46, 63), Staniu George (6507, 23, 34, 36, 39, 40, 44, 80, 630, 36, 44, 48), Şerban Floarea (6516, 19, 53, 56, 59, 61, 63, 71, 601, 06, 15). Cl. XI. Nedelea Ion (6539, 61, 63, 65, 82—88, 97, 601, 05, 09, 15).

Ş.m. 2 cl. X. Buzea Dobra (6554, 58, 60, 61, 63, 66, 71, 82—84, 86, 605, 09,, 15), Radu Gheorghe (6507), 10, 15, 16, 16, 19, 22, 26, 39, 61, 63, 601, 15).

SĂCUENI (Crişana). Groza Dumitru (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 36, 39, 61, 63, 82, 87, 97).

SATU MARE. Şc. 8 ani nr. 10 cl. II. Görbe Mihai (E : 2210, 11, 13—19).

Cl. X. Bozov Carol (6503, 10, 15, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 83, 85, 86), Nicoară Aurel (6546, 54, 58, 61, 67, 80, 80, 83, 86, 601, 09, 15, 39), Popan Vasile (6546, 54, 58, 61, 67 70, 83, 86, 99, 601, 09, 15, 39), Timoc Dorel (6583, 87, 609, 70—77). Cl. XI. Fodor Sarlota (6551, 54, 55, 57, 61, 63, 66—68, 74, 80, 82, —86, 88).

SĂVENI (Suceava). Cl. V. Airimiţoaie Angela (F : 2214, 15, 18, 19, 22, 32, 36, 40). Cl. X. Buruiană Emil (6561, 63, 71, 83, 85, 86, 601, 09, 09, 15, 36, 53, 64), Sănduc Ioan (6563, 61, 71, 73, 81, 83, 86, 615, 41, 49, 63, 65).

SEBIŞ (Crişana). S.m. Pantazi Nicolae (6503, 10, 16, 19, 26, 53, 54, 61, 63, 71, 83, 86, 601, 09, 15). Cl. XI. Coreanu Radu (6516, 26, 51, 60, 61, 63, 83—85, 88, 99, 609, 15).

SIBIU. Sc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Zaharia Nicolae (E : 2220, 22—27, 31, 2). Cl. VIII. Maniu Iuliana (F : 2248, 50, 51, 54, 55, 57—61, 63), Mihalache Codruţa (E : 2248, 50, 51, 54, 55, 57—61, 63).

Sc. 8 ani nr. 4 cl. VII. Laschescu Dorin (E : 2210, 11, 13—18).

Sc. de *ani nr* 5 cl. VII. Serbănuţ Ligia (E : 2215, 16, 18, 20, 22, 32, 33, 45). Şc. 8 ani nr. 7, vl. VII. Marinuş Marin (E : 2214, 18, 20, 26, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 45, 47). *Şc. 8 ani nr. 8* cl. VI. Fonea Rodica (E : 2226, 27, 33, 38, 39, 40, 43, 46), Răceală Moţoc Mircea (F : 2220, 23, 25, 32, 35, 38, 40, 43,46,

47, 48, 52, 54). Cl. VII. Borcea Lucia (E : 2220, 32, 33, 40, 42,43, 44, 48, 54, 58), Lungu Daniel (E : 2211, 16, 24, 32, 33, 40, 42, 43, (47 Vasilescu Gheorghe (E : 2211, 16, 24, 32, 33, 35, 42, 44). Cl. VIII. Drăgan Florin (E : 2211, 13, 17, 20, 32, 33, 38, 40, 43).

Şc. 8 ani nr. 9 cl. VII. Cismaru Gheorghe (E : 2215—17, 20, 32, 33, 43, 47), Neamţu Viorel (E : 2210, 15—17, 20, 27, 32, 34, 40, 43), Sederiaş Florin (E : 2215—18, 20, 23, 42, 43, 47). Cl. VIII. Filipeanu Gabriel (E : 2210, 15—17, 20, 32, 33, 40, 43), Filipeanu Mihail (E : 2213, 32, 36, 40, 42, 43, 47, 63).

Şc. 8 ani nr. 15 cl. VI. Klokner Gudrun (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20), Maior Carmen (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20), Zauk Gerhard (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 20). Cl. VIII. Brudi Edit (E : 2233, 36, 48, 50, 54, 63, 70, 76), Schuster Marianne (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20

Ş. m. 1 cl. IX. Giurea Ioan (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 53, 59, 71, 88, 601, 09, 15).

Ş. m. 2 cl. XI. Sabău Mircea (6504, 07, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 23, 25, 36, 38).

Ş. m. 3 cl. IX. Niculae Vasile (6554, 55, 58, 59, 61, 63, 71, 83, 86, 601, 09, 15, 46, 60). Cl. X. Modran Liviu (6501, 53—55, 59, 60—63, 67, 71—73, 80, 82—86, 96, 97, 99, 605, 07, 09, 30—34, 36, 39, 41, 44, 46, 49, 57, 64, 65). Cl. IX. *Dăncilă Ioan* (6568, 81, 84, 85, 87, 89—91, 93, 95, 97, 98, 617, 19, 26, 29, 30, 32, 33, 37, 38, 49, 55, 59, 64—67, 69—78, 80, 81, 83, 85, 89, 92, 98, 700, 02, 06—09) *Laşiţă Ileana* (6509, 28—30, 35, 37, 42, 44, 47, 49, 51, 55, 57—74, 77, 89, 91, 95, 97, 99, 601, 03, 05—07, 09—19, 21—25), Mocanu Dan (6551, 74, 82, 83, 85, 87, 605, 09, 15, 15, 34, 44), Raduly Ianos (6551, 55, 67, 72, 74, 79, 82, 97, 601, 09, 15, 44). *Geleriu Dan* (6581, 89—93, 95, 96, 610, 25, 30, 31, 34, 37, 44, 46, 48, 53, 55, 57, —59, 62, 63, 65—67, 70—78, 85, 93, 95, 700, 06, 07, 09, P)

Absolvent Stoicea Marcel (6580—85, 87, 88, 90, 92, 99, 601, 03, 05, 15, 28, 30—34, 39, 41, 44, 46, 48, 53, 59, 66, 67, 69—78,, 80, 83, 85, 700, 03).

SIGHET. Şc. 8 ani nr. 8 cl. VIII. Grigor Nuţu (E : 2232, 33, 36, 45, 48, 54, 61, 63).

SINGERU (Ploieşti). Şc. 8 ani nr. 1. Pişcoci Constantin (E : 2210, 13, 15, 16, 19, 20, 35, 36, 40, 42, 43, 45).

SIMERIA (Hunedoara). Ş. m. cl. VI. Anghel Felicia (E : 2179, 99, 210, 11, 15, 16, 18, 20, 32), Oprea Alexandru (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 20, 32, 43). Cl. XI. Furca Ludovic (6582, 87, 644, 48, 67—78), Petrescu Titi (6630, 34, 44, 48, 66, 67, 70—77).

SINAIA. Cl. VIII. Simionescu Cristian (E : 2210, 11, 13, 15—17, 20, 25, 32, 33, 40, 43). Cl. X. Cojocaru Vasile (6507, 10, 16, 19, 22, 27, 4, 61, 63, 83—85, +01, 04), Sava Costică (6503, 07, 10, 16, 19, 22, 27, 54, 61, 63, 71, 83, 84, 601, 09, 15), Cl. XI *Catană Ilie* (6508, 09, 13, 14, 17, 20, 21, 24, 30, 36, 42, 44, 49—52, 54, 57—59, 61, 63, 65—68, 74, 76, 79, 80—88, 89, 90—92, 95, 601, 05—07, 15, 18, 38, 31, 32, 35, 36, 38, 40, 41, 43, 48, 53, 56, 57, 59, 60, 63, 66, 67, 69, 70—78, 80—82, 85, 92, 95, 97,98, 703) Ştefan Mihail (6503, 04, 10, 12, 15, 16, 19, 22, 26, 54, 61, 63, 71, 83—85, 87, 601, 09, 15).

SIRIU (Ploieşti). Cl. VI. Şerban Nicolae (E : 2211, 15, 16, 20, 24, 32, 46, 47).

SLATINA C. VII. Leulescu Lucian (E : 2210, 13, 15—18, 20, 32, 33, 43).

SÎNTANDREI (Crişana). Cl. V. Chişvasi Dumitru (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 27,, 32, 35 ; 6615), Lobonţ Maria (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 26, 27, 32, 35 ; 6615), Vaida Ion (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 26, 27, 32, 35 ; 6615), Vidican Ioan (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 26, 27, 32, 35 ; 6615). Cl. VI. Maghiar Alexandru (E : 2210, 11, 16, 17, 19, 20, 26, 27, 31, 35).

SINTEŞTI (Bucureşti). Cl. VII. Grigore C. Gheorghe (E : 2213, 17, 20, 27, 32, 33, 40, 43), Stancu Marin (E : 2213, 14, 17,20, 27, 32, 33, 40, 43), Păduraru T. Ioana (E : 2214—17, 32, 33, 40, 43), Radu Elena (E : 2213, 18, 20, 27, 32, 33, 40, 43).

SUCEAVA. Şc. 8 ani nr. 3 cl. VII. Găitan Virgil (E : 2210, 13, 16—18, 32, 40, 43, 47). Cl. VIII. Olaru Maria (E : 2210, 15—19, 28,

Ş. m. 1 cl. V. Berlinski Mara (E : 2224, 26, 32, 35, 38, 47, 48, 50). Cl. IX. Olaru Radu (6583—86, 99, 615, 39, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 82). Cl. X. Petruc Radu (6583, 601, 05, 09, 39, 44, 57, 66, 70, 73, 76, 85, 97).

Ş. m. 2 cl. IX. Tabarcea Petru (65554, 60—63, 73, 83, 86, 601, 09, 15, 39, 46), Zavera Ivan (6462, 82, 507, 19, 22, 25—27, 30, 34, 40, 54, 58—61, 63, 86, 609, 15, 18, 41).

TĂTĂRANI (Ploieşti). Cl. VII. Cremenescu Ion (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 24, 32, 33, 38, 40).

TĂUT (Crişana. Cl. VII. Tirbau Maria E : 2210, 11, 13, 15—17, 20, 24—27, 32). Cl. VIII. Cios Eva (E : 2221, 22, 28, 29, 31, 36, 40, 43, 56, 57, 61, 63), Haş Ioan (E : 2210, 11, 13, 15—17, 20, 21, 22, 24—29, 31, 32, 36, 40, 43, 56, 57, 63), Suciugan Eva (E : 2221, 22, 28, 29, 31, 36, 40, 43, 56, 57, 61, 63), Hodinca G. Teodor (E : 2221, 22, 28, 29, 31, 36, 40, 41, 43, 56, 57, 61, 63), Todinca I. Teodor (E : 2221, 22, 28, 29, 31, 35, 36, 40, 43, 46).

TECUCI. Şc. 8 ani nr. 10 cl. VII. Handreaburea Ecaterina (E : 2215—17, 20, 32, 33, 40, 43). Cl. VIII. Păunescu Liviu (E : 2224, 32, 36, 38, 40, 42, 43, 45, 48)

Cl. X. Chiriacescu Mircea (6510, 16, 19, 26, 63, 83, 85, 86, 601, 09, 15, 46).

Absolvent Oprea Paul (6582, 85, 87, 88, 601, 05, 07, 15, 17, 70, 74, 77).

TELEGA (Ploiești). Șc. 8 ani. Pulber Cătălin (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 21, 23—25, 27, 29, 31—33, 35, 38, 40, 42—44, 46).

TIMIȘOARA Șc. 8 ani nr. 10 cl. VII. Laţia Olimpia (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20' 33, 40, 43).

Ș. m. 1 cl. VII. Priboescu Carmen (E : 2210, 13, 16, 18, 20, 22, 32, 40, 43), Dee Rodica (E : 2197, 99, 206, 16—18, 20, 32).

Ș. m. 2 cl. VII. Dordea Toma (E : 2202, 06, 10, 11, 15—17, 32), Koch Dorothea (E : 2199, 206, 13, 16, 17, 19, 20, 32), Lovosz Renate (E : 2206, 10, 15, 17, 18, 20, 32), Loris Matei (E : 2202, 06, 11, 13, 15, 17—19), Rădulescu Liviu (E : 2210, 11, 13, 15—18, 20, 32), Răduș Adrian (E : 2197, 99, 201, 02, 06, 10, 12, 17, 18), Schuch Cristina (E : 2206, 10, 15, 17—20, 32), Schi Hans (E : 2211, 13, 16—18, 20, 22, 32), Szigler Victor (E : 2194, 202, 06, 10, 15, 17, 20, 32), Wagner Cornel (E : 2220, 31, 33, 36, 38, 40, 42, 43, 46, 47), Winandi Mihail (E : 2199, 206, 10, 13, 17—19, 20, 32). Cl. X. Constăngioară Ion (6670—77, 83, 84, 601, 09, 15). Cl. XI. Fritz Georg (6510, 12, 15, 22, 26, 54, 58, 61, 63, 72, 79, 601, 09, 15), Hack Albert (6582, 85, 86, 97, 609, 44, 70—77, 82, 85). Schwengler Nikolaus (6504, 10, 12, 15, 22, 26, 58, 61, 63, 82, 87, 601, 09, 15), Tonea Constantin (6583, 601, 05, 09, 15, 71—77,), Wetzer Franz (6510, 12, 15, 22, 54, 58, 61, 63, 72, 79, 87, 601, 09, 15). *Popovici Cornel* (6503, 05, 07, 16, 18, 25—27, 32, 34, 35, 42, 49, 51, 54—59, 61, 63, 65—67, 72—74, 76, 77, 82—85, 87, 601, 03, 09, 66, 67, 69, 71, 74—77, 85, 706, P)

Ș. m. 3 cl. VIII. Constandiș Brînduşa (E : 2197—99, 201—03, 06).

Ș. m. 7 cl. VIII. Cotarcă Liviu (E : 2215, 17, 20, 24, 32, 33, 40, 42, 43).

TÎRGOVIȘTE. Ș. m. 3 cl. XI. Bratu Constantin (6580, 82—88, 97, 601, 05, 09, 15, 18, 19, 22, 28, 30, 32—34, 38, 39, 58, 59, 63, 67, 69—77, 80). *Niculescu C* (6628, 37, 38, 40, 41, 49, 55, 67, 70, 71—82, 85, 89, 95, 97, 98, 700, 03, 08—10, 13, 15, 16, 20, 22, 24, 31, 36, 44, 45, 48).

TÎRGU CĂRBUNEȘTI. Ș. m. cl. X. Lazăr Iulian (6580, 82—89, 97, 99, 601, 05, 09, 15, 34, 44, 48, 70—78, 80, 81).

TÎRGU JIU. Ș. m. 1 cl. X. Bratu Traian (6510, 19, 25—27, 36, 46, 83, 84, 86, 601), Buşe Florian (6584—86, 607, 16, 31, 42, 63, 70, 73, 76, 77, 80), Pestroiu Daniel (6561, 67, 80, 82—87, 97, 601, 05, 09). Cl. XI. Bîrsan Nicolae (6553, 55, 57—60, 69, 71—74, 79), Pupăzan C. (6609, 15, 44, 70, 71, 73—77, 82—87).

Ș. m. 2 cl. IX. Elevii au completat numărul de probleme cu probleme de la elementar prin transcriere unul după altul.

TÎRGU LĂPUȘ. Ș. m. cl. VIII. Beluu Zamfira (E : 2210, 22, 32—34, 40, 43, 47, 48). Cl. X. Bude Nicolae (6583, 601, 09, 15, 70, 71, 73—77, 80), Podea Nicolae (6583, 601, 09, 15, 70, 71, 73—77, 80).

TÎRGU MUREȘ. Ș. m. cl. VI. Dragotă Adrian (E : 2210, 11, 13, 15—17, 19, 32), Sonnenfeld Gabriel (E : 2210, 11, 13, 16, 17, 20, 42, 47), Szaloi Klara (E : 2210, 11, 15—19, 32). Cl. VIII. Vamoș Vasile (E : 2203, 18, 20, 22—24, 27, 32, 48—52, 54, 55, 57—63). Cl. X. Pasat Mihaela 6558, 60, 61, 65, 83—85, 91, 99, 601, 09, 15, 71, 74, 77, 83).

TÎRGU NEAMȚ. Ș. m. cl. VII. Călin Octavian (E : 2220, 32, 33, 35, 40, 42, 43, 45, 47), Vasiliu Doina (E : 2210, 15—18, 20, 23, 32).

TORMAC. (Arad) Șc. 8 ani cl. VI. Ban Gheorghe (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 32, 40), Icnea Petru (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 20, 32), Carol Julia (E : 2197, 98, 201, 06, 11, 20, 32), Szöke Sigismund (E : 2197, 98, 201, 02, 11, 13, 20, 32), Vincze Ștefan (E : 2197, 98, 201, 02, 06, 11, 20, 24, 32).

TRUȘEȘTI. Ș. m. cl. X. *Aionesei Ivan* (6580, 82—88, 95, 97, 99, 601, 05—07, 09, 10, 15—19, 21, 23, 30—34, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 53, 56, 60, 61, 65, 66, 68—77, 80, 81, 83, 85, 91, 93, 97, 98, 700, 01), Schiopu Constantin (6580, 82, 601, 09, 22, 34, 70, 71, 73, 76, 77). Cl. XI. *Arcip Petre* (6549, 51, 54—58, 61, 63, 66, 67, 73, 74, 77, 79—80, 82—88, 95—97, 99, 601, 05, 07, 09—12, 15, 16, 21, 31, 32, 39, 41, 42, 44, 46, 53, 58, 60), *Butnaru Dumitru* (6551, 54, 55, 57, 58, 61, 63, 65, 67, 74, 79, 80, 83, 82, 86, 87, 95—97, 601, 05, 07, 09, 10, 15, 16, 18, 21, 30, 31, 32, 34, 41, 42, 44, 46, 48, 53, 62, 63), *Cozmanciuc Dumitru* (6513, 18, 28, 39, 51, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 65—67, 73, 74, 77—79, 80, 82—88, 95—97, 99, 601, 05, 07, 09—12, 15—18, 21, 30—32, 34, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 51, 53, 56, 59, —63), *Mîrza Mihai* (6508, 13, 17, 18, 49, 51, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 66, 67, 73, 74, 77, 79, 80, 82—88, 96, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 10, 15, 16, 21, 31, 32, 39, 41, 42, 44, 46, 53, 56, 58, 60, 62, 63), *Novac Constantin* (6513, 28, 49, 51, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 74, 75, 77—80, 82—88, 96, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 10, 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 30—32, 41, 42, 44, 46, 48, 51, 53, 58, 59, 61—63), *Turculeț Demostene* (6508, 13, 18, 21, 24, 35, 49, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 65—68, 73, 74, 77, 79, 80, 82—88, 91, 93, 95—97, 99, 601, 05, 07, 09—11, 14—16, 21, 30—32, 34, 39, 41, 42, 44, 46, 51, 53, 56—63), Vieru Mihai (6551, 54, 55,

57, 58, 61, 63, 67, 74, 79, 82, 83, 87, 95, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 10, 15, 16, 18, 21, 30—32, 41, 42, 44, 46, 53, 63), Zvîc Dorina (6555—58, 63, 67, 79, 82, 83, 87, 95, 97, 601, 05, 07, 09, 10, 15, 16, 31).

TULCEA. Cl. VIII. Lascu Traian (E: 2228, 36, 37, 39, 61, 63, 80, 85, 601, 09).

TURDA. Cl. VIII. Focşan Petru (E: 2215, 18, 19, 33, 40, 42, 43, 45.

Ş. m. 1 cl. X. Gegu Valeriu (65554, 61—63, 67, 71, 83, 85, 99, 601, 09, 15), Ionuţ Ana (6505, 07, 16, 27, 32, 36, 53, 54, 58, 67, 601, 15), Rusu Epaminonda (6553, 59, 62, 69, 71, 86, 96, 99, 601, 09, 15, 39), Soim Liviu (6510, 54, 58, 62, 63, 67, 82, 83, 601, 09, 15, 8, 9), Vălean Ion (6582, 83,86,601, 09, 31, 39, 46, 48, 70—72, 74). Cl. XI. Drăguş Radu (6555, 58—60, 71, 79, 80, 601, 05, 09, 15, 31, 34), Pop Gheorghe (6551, 53—55, 59, 60, 65, 66, 74, 80, 82—88, 97, 99, 601, 05, 07, 09, 11, 15, 16, 19, 22, 30, 31, 34, 37, 39, 42, 44, 46, 48, 53, 63), Pal Francisc (6504, 07, 10, 11, 12, 14—16, 19—23, 36, 38).

Ş. m. 2 cl. XI. Olariu Adriana (6523, 32, 36, 46, 57, 71, 80, 83—88, 636, 37, 70—77), Pop Gheorghe (6551, 53—55, 59, 60, 65, 66, 74, 80, 82—88, 601, 05, 07, 09, 11, 15, 16, 19), Şerban Petru (6580, 82, 83, 88, 96, 97, 99, 601, 05, 09, 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 27, 30, 31, 34, 36, 37, 39, 42, 44, 46, 48, 53, 56, 57, 59, 63).

TURNU MĂGURELE. Ş. m. Unirea cl. XI. Botea Titus (6551, 55—58, 61, 63, 65, 66, 71—74, 79, 82—84, 601, 03, 05, 09, 15, 16, 31, 32, 39, 41, 44, 53).

TURNU SEVERIN. Şc. 8 ani nr. 1 cl. VI. Căpraru Mihaela (E: 2215—20, 27, 32, 42, 43, 45,), Marghescu Georgeta (E: 2201, 02, 06, 16—20). Cl. VII. Bădescu Iulian (E: 2197, 98, 200, 01, 11, 13, 16, 20, 24, 32), Bicu Kircea (E: 2201, 06, 10, 15—20, 32), Grecu Doina (E: 2213—20, 32, 40, 43, 45), Morţun M. Alexandru (E: 2201, 02, 06, 15—18, 24). Cl. VIII. Grădinaru Ştefan (E: 2210, 13, 15—18, 36, 42, 43, 45), Stocker Elena (E: 2210—19).

Ş. m. 1 cl. VI. Cuică Valentin (E: 2230, 32, 38, 40, 43, 47, 48, 54), Sarvari Andrei (E: 2227, 32, 35, 40, 43, 48, 49, 54), Tontoiu Dorin (E: 220, 23—27, 32, 35, 38, 40, 42—44, 46). Cl. VIII. Galbură Adrian (E: 2198, 99, 201, 06, 07, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 22). Cl. IX. Popescu Constantin (6504, 07, 10, 15, 16, 19, 25—28, 31, 34, 36, 39), Popescu Sergiu (6598, 529—32, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 80, 82—84, 86—88, 99, 601, 06, 07, 09, 15, 17, 36, 39, 41, 42, 47, 48, 53, 63). Cl. X. Armulescu Dumitru (6503, 19, 22, 25, 27, 36, 83, 96, 601, 09, 15, 84, 86, 636, 49, 63). Cl. IX. Popescu A. Constantin (6554, 60, 61, 63, 69, 80, 83—86, 88, 96, 99, 601, 09, 15, 18). Cl. XI. Vulpescu Dan (6580, 85, 97, 659, 70—78). *Popescu Eleodor* (6631, 32, 34, 41, 42, 44, 46, 53, 59—703, 05—16).

Ş. m. 2 cl. VIII. Mirică Rodica (E: 2 97, 99—203, 06, 10, 11, 13).

Ş. m. 3 cl. VIII. Popescu Angela (E: 2197, 201—03, 10, 11, 13, 15, 17, 21, 32, 33, 38, 46). Cl. X. Căpraru Cornelia (6504, 10, 12, 15, 19, 22, 26, 36, 39, 54, 61, 601, 09, 15), Hoară Emilia (6516, 19, 22, 25—27, 40, 54, 58, 60, 61, 63, 83, 86, 615), Popescu Mariana (6504, 07, 10, 12, 15, 15, 19, 22, 23, 36, 54, 61, 63, 86, 87, 601, 07, 09). Cl. XI. Văduva Gabriela (6504, 10, 12, 15—17, 19, 22, 23, 61, 63, 85—87, 601, 09).

ŢĂNDĂREI GARĂ (Bucureşti). Şc. 8 ani cl. VII. Cristea Niculina (E: 2210, 16, 18, 20—22, 32, 40, 43, 46).

TUGLUI (Oltenia). Şc. 8 ani cl. VIII. Idjilof Mioara (E: 2227, 32, 33, 36, 40, 43, 45, 48, 50, 57—59, 63).

URIŞOR (Cluj). Şc. 8 ani cl. VIII. Săplăcean Gabriel (E: 2210, 11, 13, 15—21, 26—28, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 43, 45, 47, 601, 09, 15, 36).

VĂCĂREŞTI (Bucureşti). Şc. 8 ani cl. VII. Stanciu Niculina (E: 2220, 25, 26, 32, 33, 40, 42, 43).

VADUL CRIŞULUI. Ş. m. cl. XI. *Noje Vasile* (6504, 07, 10, 13, 15—29, 31, 32, 34, 36, 40, 45, 46, 53—61, 63, 65, 72, 74, 79, 605, 09, 15).

VĂLENII DE MUNTE (Ploieşti). Ş. m. cl. X. Bocan Ion (6583, 85, 88, 99, 609, 15, 44, 49, 70, 71, 74, 76, 80, 98).

VALEA LUI MIHAI (Crişana) Ş. m. cl. X. Ivan Vesa (6560, 61, 63, 80, 84, 86, 99, 60 , 15, 36).

VASLUI. Ş. m. 1 cl. VI. Cîmpeanu Mariana (E: 2220, 26, 32, 40, 43, 48, 50, 52), Dănilă Mariana (E: 2232, 33, 38, 40, 43, 47, 48, 52), Gold Iulian (E: 2220, 32, 38,g 40, 43, 46, 47, 48), Mendilovici Luciana (E: 26, 32, 35, 38, 43, 48, 52).

VATRA DORNEI. Ş. m. cl. VII. Doru Zazulescu (E: 2220, 32, 33, 35, 39, 40, 42, 43, 48, 49, 50, 54). Cl. VIII. Fleischer Adinel (6558, 61, 63, 6 , 72, 82, 86, 87, 601, 09, 15, 41, 44).

VIDELE (Bucureşti). (6553—55, 58, 61, 63, 67, 71, 80, 83—86, 601, 05, 06, 07, 08, 09, 15, 18, 19, 23, 29, 34, 41, 46, 48, 57, 63).

VIŞEUL DE SUS. Ş. m. 1 cl. VIII. Goran Ligia (E: 2210, 12, 15, 18, 32, 40, 43). Cl. X. Fiţigău Ion (6582, 83, 86, 601, 09, 15, 44, 73—77, 80—83), Guga Ion (6582, 83, 85, 601, 09, 15, 30, 44, 48, 70, 73—77, 80—83).

VLAHI. Şc. 8 ani cl. VIII. Dumitrescu Stana (E: 2231, 33—47), Niculescu Veronica (E: 2231, 33—47), *Poenaru Paraschiva* (E: 2210—47, 6654, 58, 60—63, 82—88, 97, 99, 601, 06, 07, 09, 15, 17, 39, 46).

Pînă la 1 aprilie 1965 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme :

1. *Lău Gheorghe* (cl. X Cîmpulung Moldovenesc), 2. *Crăciun Alexandru* (cl. XI lic. militar Cîmpulung Mold., 3. *Perl Toma* (cl. XI ș.m. 8 Cluj), 4. *Negruțiu Vasile* (cl. XI ș.m.l Oradea), 5, *Sava Petru* (cl. IX Făget), 6. *Răduinea Nicolae* (ș.m. 3 Constanța), 7. *Vrînceanu Vasile* (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 8. *Hărăguș Ștefan* (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 9. *Carpnic Dumitru* (cl. X Trușești), 10. *Stan Emil* (cl. X ș.m. 2 Ploiești), 11. *Văleanu Vladimir* (cl. VII ș.m. 28 București), 12. *Costea Constanța* (cl. VII ș.m. 28 București), 13. *Purdilă Adrian* (cl. VIII Panciu), 14. *Bîrsan Nicolae* (cl. XI ș.m. 1 Tîrgu Jiu), 15. *Pruiu Petre* (cl. XI lic. militar Breaza), 16. *Man Carol* (cl. XI ș.m. 1 Caransebeș), 17. *Corici Ion Cezar* (cl. VI ș.m. 10 București), 18. *Pestroiu Daniel* (cl. X ș.m. 1 Tîrgu Jiu), 19. *Chircu Teodor* (cl. XI ș.m. 1 Constanța), 20. *Gheorghe Felicia* (cl. VIII ș.m. 2 Craiova), 21. *Sandu Darius* (cl. XI ș.m. 1 Craiova), 22. *Bușe C. Marcu* (cl. X Horezu), 23. *Căpățînă Octav* (cl. X Hunedoara), 24. *Brînda Rodica* (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 25. *Lăzărescu Radu* (cl. IX ș.m. 13 București), 26. *Logofătu C. Bogdan* (cl. IX ș.m. 36 București), 27, *Arapu Bogdan* (cl. IX ș.m. 13 București), 28. *Nistorescu Constanța* (cl. X ș.m. 3 Pitești), 29. *Căpățînă Ion* (cl. XI Hunedoara), 30. *Belu Emil* (cl. XI Hunedoara), 31. *Oprescu Gabriel* (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 32. *Reghină Vasile* (cl. XI ș.m. 1. Ploiești), 33. *Căpățînă Valeriu* (cl. X Roman), 34. *Zăgan Dumitru* (cl. X ș.m. 3 Sibiu), 35 *Trif Nicolae* (cl. X ș.m. 2 Sibiu), 36. *Minculescu Gheorghe* (absolvent Ploiești), 37. *Oprișiu Cornel* (cl. XI Petroșeni), 38. *Marinuș Radu* (cl. XI ș.m. 3 Sibiu), 39. *Picol Gheorghe* (cl. VII Ștefănești Argeș), 40. *Budeanu Teodor* (cl. X ș.m. 5 Arad), 41. *Magda Radu* (cl. X ș.m. 3 Sibiu), 42. *Trăilă Gherghe* (cl. XI lic. militar Cîmpulung Mold.), 43. *Popescu Ovidiu* (cl. IX lic. militar Cîmpulung Moldovenesc), 44. *Fulea Eugen* (cl. XI Corabia), 45. *Sbîrnea Mihai* (cl. IX ș.m. 1 București), 46. *Cartianu Dan* (cl. IX ș.m. 12 București), 47. *Ghera Petru* (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 48. *Șerb Ioan* (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 49. *Bena I. Dorin* (cl. XI ș.m. 1 Caransebeș), 50 *Dăncilă Ioan* (cl. XI ș.m. 3 Sibiu), 51. *Biscă C. Octavian* (cl. XI ș.m. 1 Craiova), 52. *Cărbunaru Constantin* (student București), 53. *Manolache Nicolae* (cl. IX ș.m. 5 București), 54. *Simion Gh. Gheorghe* (cl. X ș.m. 1 Ploiești), 55. *Niculescu Constantin* (cl. XI ș.m. 3 Tîrgoviște), 56. *Weinstein Jack* (cl. XI ș.m. 2 Rădăuți), 57. *Chițescu Ion* (cl. XI ș.m. 10 București), 58. *Turculeț Demostene* (cl. XI ș.m. Trușești), 59. *Popovici Cornel* (cl. XI ș.m. 2 Timișoara), 60. *Geleriu Dan* (cl. XI ș.m. 3, Sibiu), 61. *Almer David* (cl. XI ș.m. 71, București), 62. *Bucur Liliana* (cl. XI, ș.m. 3 Sibiu), 63. *Nițescu Dan* (cl. XI ș.m. Pucioasa), 64. *Miculescu Cecilia* (cl. X ș.m. Răcari), 65. *Vasilescu Nicolae* (cl. X ș.m. Pucioasa), 66. *Radu Vasile* (cl. XI ș.m. 2 Ploiești), 67. *Mărculescu Corneliu* (cl. X ș.m. Pucioasa).

Pînă la 1 aprilie 1965 s-au mai primit soluții bune de la :

ADÎNCATA (Ploiești) Ș.m. cl. VIII. Ene R. Bujor (E : 2220, 1, 4, 7—9, 31, 2; 6580, 3, 6, 601, 9, 15).

ADJUD. Șc. 8 ani, cl. VIII. Apostol Constantin (E : 2233, 5, 6, 8, 9, 42, 3, 7). Ș.m. cl. VII. Savu Marilena (E : 2248, 50—2, 63, 5, 70, 4; 5570, 720). Cl. VIII. Apostu Maria (E : 2223, 5, 8, 43, 8, 54, 9, 64), Burnaru Horia (E : 2082—4, 96, 8, 108, 9, 10, 3, 4, 21, 2), Ciobotaru Romea (E : 2243, 6—8, 50—3, 5), Dragomir Luminița (E : 2223, 6, 40, 2, 3, 8, 60, 5), Trendea Celestina (E : 2233, 5, 6, 9, 43, 8, 50, 5), Vasilescu Emil (E : 2232, 40, 3, 8, 50, 2, 62, 3, 5, 8, 70, 4; 6720), Zaharia Ion (E : 2233, 5, 6, 9, 40, 2, 3, 5, 8, 50—2, 4, 7—9, 63). Cl. IX. Tabalcea Maria (E : 2236, 61, 3, 70; 6646, 70—2, 6, 8, 60, 720, 32). Cl. XI. Caraman Georgel (6646, 70—2, 4—6, 80, 1, 713, 5, 20, 2), Cartoafă Marian (6627, 8, 32, 4, 5, 48, 60, 6, 7, 80, 1, 710, 5, 20, 2), Păduraru Ana (6628, 32, 4, 44, 6, 66, 70—2, 4—7, 81), Simion Viorel (6646, 66, 702—, 5—7, 80, 1, 713; 5, 20, 2).

AIUD. *Șc. 8 ani*, cl. VI. Enache Ion (E : 2235, 40, 3, 7, 8, 50, 65, 8), Sima Doina (E : 2080, 1, 3, 90, 2, 5, 104, 15). Cl. VIII. Letiția Tiberiu (E : 2233, 6, 8, 47, 8, 50, 3, 5, 8—60, 3, 5, 70, 4, 8). Cl. XI. Hamarsky Iosif (6684, 96, 706, 10, 1, 5, 20, 2, 4, 6, 33, 5).

ALEXANDRIA. *Ș.m.* cl. XI, Micu Mihai (6580, 2, 3, 6, 7, 97, 9, 601, 5, 22, 34, 41).

AMĂRĂȘTI (Oltenia). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Ruinea St. Victor (E : 2233, 5, 6, 9, 40, 3, 6—8, 54, 6—8, 3, 5, 8, 76).

ANINA. *Ș.m.* cl. VII. Toma Marius (E : 2233—6, 8, 40, 2, 3, 6, 7). Cl. VIII. Bumbeș Ana (E : 2233, 42, 57—9, 63, 77, 8). Cl. IX. Codrea Gheorghe (E : 2236, 7, 61, 3; 6670, 4, 6, 715, 6, 20, 2), Kovacs Paraschiva (E : 2261, 3, 78; 6670, 3, 6, 7, 80, 2, 3, 720—2), Miloiu Rodica (E : 2236, 61, 3, 80; 6670, 4, 6, 7, 80, 715, 6, 20, 2).

ARDUD SAT (Maramureș). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Varga Liviu (E : 2236, 7, 45, 6, 61—4).

ARAD. *Șc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Kesztenbaum Iacob (E : 2248, 50, 2, 8, 60, 5, 6, 8, 70, 8, 80). *Șc. 8 ani nr. 13* cl. VIII. Corbu Nicolae (E : 2247, 55, 61, 3, 5, 76—8, 80). *Ș.m. 2* cl. V. Flore Adriana (E : 2233, 8, 42, 5, 7, 8, 58, 68), Greceanu Radu (E : 2233, 8, 42, 5—8,

68). Cl. VIII. Boşcaiu Voicu (E : 2233, 6, 8, 9, 44—7). *Ş.m. Ion Slavici* cl. IX. Gligor Alexandru (E : 2261, 3, 77—80; 6670, 4, 6, 710, 5, 5, 20, 2). *Ş.m. 5* cl. X. *Budeanu Teodor* (6630, 1, 3, 4, 9, 41, 2, 3, 8, 53, 61, 4, 6, 7, 70, 8, 80, 2, 3, 5, 91, 5, 7, 710, 1, 5, 6, 22, 4, 6, 35—8).

BACĂU. *Ş.m. 1* cl. VIII. Kmoll Raul (E : 2233, 5, 6, 8—40, 2, 3, 7, 7). Cl. IX. Teodeanu Vladimir (E : 2236, 7, 61, 3, 60; 6670, 6, 7, 716, 20, 2), Ţarălungă Lucian (E : 2236, 7, 61, 3, 79, 80; 5670, 3, 6, 80, 172, 6, 20, 2). Cl. X. Ciochină Silviu (6632, 9, 46, 9, 63, 5—7, 70, 1, 3—7). Cl. XI. Eremia Ion (6637, 44, 70—7, 80, 710, 1, 3, 5, 20, 2). *Ş.m. 2* cl. X. Cosma Aurel (6580, 2—6, 97, 605, 7, 9, 10, 3, 6, 8, 9, 21, 3, 30, 2, 4, 9, 42, 4, 6, 8, 61).

BAIA MARE. *Ş.m. 1* cl. IX. Fried Zoltan (E : 2277—80; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 3,5 720, 2, 4). *Ş.m. 3* cl. IX. Apşan Dan (E : 2278, 9, 80; 6730, 49, 53, 61, 3, 70, 1, 3, 4, 6), Condor Dana Adriana (E : 2235, 8, 42, 6—53, 8, 61, 3), Costescu C. (E : 2263, 79, 80; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2). Cl. X. Vasilov Angela (6644, 70, 1, 3—7, 95, 8, 715, 20, 2, 35).

BAIA SPRIE. *Ş.m.* -cl. IX. Trif Ioan (E : 2261, 4, 78, 9; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 710, 5, 6, 20, 2, 3).

BALŞ (Oltenia). *Ş.m.* cl. XI. Ştefănescu Victoria (6628, 70—2, 5, 6, 710, 3, 5, 20, 35).

BĂICOI. *Ş.m.* cl. X. Roman I. Ilon (6644, 8, 66, 70—8, 95, 711, 5, 20, 2, 6, 35).

BĂNEŞTI (Suceava). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Surugiu Elena (E : 2220, 6, 7, 9, 32, 6, 40, 2, 3, 5, 7—9, 52, 54, 53, 5, 8, 9, 76; 6670, 7, 720, 2).

BECLEAN. *Ş.m.* cl. IX. Andronic Petru (E : 2263, 77, 80; 6670, 3, 6, 7, 80, 820, 2, 44, 60).

BEIUŞ. *Ş.m. 1* cl. VI. Covaci Iosif (E : 2233, 8, 48, 50, 4, 65, 8, 70, 4, 80), Laslău Ioan (E : 2233, 38, 48, 50, 54, 65, 70, 4, 80).

BELINT. *Şc. 8 ani* cl. VI. Mioc Ion (E : 2210, 3, 5—8, 20, 31, 2), Nicolai Florica (E : 2238, 42, 8, 53, 4, 65, 8, 70).

BISTRIŢA (Cluj). Absolvent Verveagă R. (4630, 8, 70—5, 7, 80, 710, 1, 5, 6, 20, 6, 8). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Lucaci Pavel (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 3, 8, 54, 63, 5). Cl. IX. Balmoş Domniţa (E : 2236, 45, 63, 77, 8; 6670, 4, 6, 82, 720, 2), Ceapănar Alexandru (E : 2236, 45, 6, 9, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 5). *Ş.m. 1* cl. IX. Moldovan Ion (E : 2236, 7, 45, 61, 3; 6670, 3, 4, 6, 7, 82, 5, 720, 2), Mreneş T. Mihai (6639, 46, 70, 3, 4, 6, 83, 715, 6, 20—2, 6), Olteanu Alexandru (E : 2261—3, 78, 80; 6667, 70, 3, 6, 82, 5, 720, 2), Fucă Sergiu (6630, 39, 44, 8, 51, 6, 7, 62, 3, 5, 72, 5). Cl. X. Lucaci Rodica (6632, 9, 44, 8, 72, 4, 7, 8, 85, 710, 5, 22, 35), Lupşa Nicolae (6631, 39, 67, 70, 1, 3—5, 77, 80, 5, 95, 7). Cl. XI. Buta Grigore (6628, 38, 9, 41, 2, 4, 9, 56, 70, 1, 6, 7, 80, 3, 709), Popescu Şerban (6628, 30, 2, 7, 9, 40, 2, 4, 56, 8, 9, 66, 70—5, 8, 85, 710, 1, 3—6, 20—2, 4, 6, 48).

BÎRCA (Oltenia). *Ş.m.* cl. X. Drăgoi M. Marin (6641, 48, 63, 70, 1, 3, 4, 7, 80, 91, 720, 2 3, 5, 6).

BÎRLAD. *Ş.m. 2* cl. VIII. Cucoş Valeriu (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 65, 6, 8, 9, 71, 2, 6, 8, 80), Monza Sorin (E : 2233, 5, 6, 40, 3, 8, 60, 5, 8, 80), Radoveanu Radu (E : 2265, 8, 9, 74, 7, 80; 6670, 6, 720, 2). *Ş.m. 3* cl. VI. Tabără Felicia Mariana (E : 2210, 5—7, 20, 4, 32, 40, 3). Cl. IX. Dronga Ion (E : 2263, 78, 9; 6670, 3, 6, 7, 80, 715, 20, 3, 4, 35), Nichifor Ionel (E : 2230, 1, 6, 7, 45, 59, 60, 1, 3, 4, 77—80; 6586, 96, 635, 70, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 9, 35), Olaru Mircea (E : 2236, 37, 61, 3, 78; 6670, 6, 7, 80, 820, 22,4, 35), Piperiu Veronica (6646, 70, 3, 80—3, 720, 2—4, 6). C.S.B. Cl. IX. Grigoraş G. (E : 2236, 63, 77ă9, 6, 8, 715, 20, 2).

BLAJ *Ş.m.* cl. XI. Pop Doina (6670, 1, 3, 5, 6, 80, 2, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35).

BOCŞA. Cl. XI. Blaj David (6628, 31, 4, 7, 44, 8, 70, 1, 3, 5, 6, 7, 710, 5).

BOROAIA (Suceava). *Şc. 8 ani* cl. VII. Petrescu Viorica (E : 2220, 3, 7, 40, 2, 3, 7—50, 2, 8, 65, 8, 76, 9).

BOROŞNEU MARE (Braşov). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Szabo Irma (E : 2233, 5, 6, 9—34, 7).

BORŞA (Maramureş). *Ş.m. 2* cl. IX. Timiş Pricopi (E : 2260, 3, 77, 8, 80; 6670, 5, 6, 81, 715, 6, 20, ,2, 4, 35), Vlad Gheorghe (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 80; 6670, 4, 6, 80, 716, 20, 2).

BOTOŞANI. *Şc. 8 ani nr. 2* cl. VIII. Purice Mariana (E : 2236, 40, 2, 3, 5, 6, 65, 8). *Şc. 8 ani nr. 6* cl. VIII. Toma I. Carmen (E : 2220, 7, 32, 3, 6, 54, 5, 8, 58, 63). *Ş.m. 1* cl. VIII. Gheorghiu Elena (E : 2233, 6, 40, 3, 8, 70, 5, 7, 70). Cl. IX. Drăgan Laurenţiu (E : 2236; 6639, 46, 65, 70, 1, 3, 6, 7, 720, 2, 4), Dumitriu Neculai (E : 2260, 1, 3; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 720, 2, 4, 6). *Ş.m. M. Eminescu* cl VII. Taşcu Ştefănică (E : 2233, 40, 3, 6—8, 52, 66, 8).

BOZOVICI (Banat). Cl. X. Lopătilă Tiberiu (6646, 70, 1, 4, 80, 2, 95, 7, 8, 716, 20, 2, 4).

BRAD. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VI. Fonade Cornelia (E : 2235, 38, 40, 3, 7—50, 8), Guia Smaranda (E : 2248—55, 8, 9). Cl. VII. Năstăsoiu Lidia (E : 2248—50, 2, 7—9, 65, 6, 8).

BRANIŞTEA (Galaţi). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Giurgea Iacob (E : 2233—5, 40, 3, 5, 7, 50, 8—60, 3).

BRAŞOV. *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VII. Vătui Lucian (E : 2233—5, 8, 9, 42—4). *Şc. 8 ani nr. 12* cl. VI. Guţi Ana (F : 2220, 5, 7, 32, 3, 8, 40, 2, 3, 7). *Ş.m. 4* cl. VI Gal Pagricia (E : 2248, 52, 4—6, 8, 65, 6, 8, 70, 4, 7, 8, 80), Mănăilă Ileana (E : 2233, 40, 3, 8, 68, 70, 4,7, 80), Popovici Elena (E : 2242, 6, 8, 50, 2, 4—6, 8, 65, 6, 8, 70, 7, 80), Poremski Anicuţa (E : 2242, 8, 64, 5, 8, 65, 6, 8, 80). *Ş.m. Unirea* cl. IX. Chirilă G. Brânduşa (E : 2260, 1, 3, 4, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 2).

BRĂILA. *Şc. 8 ani nr. 22* cl. VII. Dargomir Gheorghe (E : 2238, 50, 2, 4—6, 8, 9). *Ş.m. 1* cl. IX. Botez Elefterie Paul (6628, 37, 69, 70, 3, 4—7, 713, 20, 2), Cucurigu Dinu (E : 2236, 60, 1, 3, 4, 78 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20). Cl. XI. Lovin Gh. (6628, 48, 67, 74, 80, 5, 703, 10—3, 5, 20, 2, 48), Moise Valentina (6587, 99, 601, 5, 9, 15, 34, 7, 9, 49, 59, 70, 5, 6, 85). *Ş.m. 2* cl. IX. Petride Horia (E : 2236, 45, 63, 4, 80 ; 6670, 6, 80, 2, 3, 5, 720, 2). Cl. XI. Frangu Octavian (6628, 31, 7, 8, 40—2, 7, 9, 53, 5, 7), Palade Florentin (6634, 7, 48, 59, 66, 70, 1, 4—8, 85).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). *Ş.m. 2* cl. XI. Dinescu Gabriela Elena (6627, 8, 30—2, 4, 6—41, 4, 6, 8, 9, 55, 63, 9).

BREAZA. *Liceul D. Cantemir* cl. X. Piuaru Ion (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 35). Cl. XI. Alexe Ion (6628, 34, 44, 59, 70, 1, 3—7, 84, 711, 3, 5), Cincică Florin (6628, 34, 53, 66, 7, 70, 1, —37, 80, 84, 711, 3, 5), Predescu Gheorghe (6580, 2, 3, 5—8, 97, 9, 601, 5, 7, 15), *Pruiiu Petre* (6628, 30, 1, 4, 8, 9, 41, 4, 6, 53, 5—7, 9, 62, 3, 6—77, 80, 1, 3, 5, 9, 91—3, 5—8, 700, 02, 03, 07—09), Toader Marian (6628, 46, 8, 67—78, 703), *Trăilă Gheorghe* (6628, 32, 4, 7, 9, 40, 6, 8, 59, 66, 7, 70—8, 80—4, 93, 700, 3, 7, 9, 10, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 44, 5, 6, 45, 8).

BUCIUMENI (Galaţi). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Radovici Dan (E : 2210, 1, 3, 5—8, 33, 40, 3).

BUCUREŞTI. *Student* Cărbunaru C. (6512, 3, 20, 1, 4, 36, 9, 43—6, 51, 4, 7, 61,47, 82—80, 601, 15, 44—60). *Şc. 8 ani* nr. *3* cl. VII. Stoiciu Gheorghe (E : 2233, 5, 8, 40, 8—50, 2, 3, 7, 65, 8, 70, 4, 80). *Şc. 8 ani nr. 5* dl. VI. Cuţută Maria (E : 2235, 8—40, 3, 7, 8, 53, 68, 70, 7, 80). Cl. VIII. Conţeanu Florin (E : 2242, 8, 63, 5, 8—70, 8 ; 6676), Cornea Maria (E : 2235, 6, 42, 8, 61 3, 5, 8 ; 6670, 6, 720, 2), Gheleşel Cristina (E : 2232, 40, 2, 3, 8, 63, 8, 70, 6). *Şc. 8 ani nr. 10* cl. VII. Weintraub Andrei (E : 2234, 8, 42—8, 52, 4, 7—9). *Şc. 8 ani nr. 23* cl. VIII. Georgescu Maria (E : 2233, 5—40, 2—7). Gorodeor Dan (E : 2233, 5—40, 2, 3, 5, 7). *Şc. 8 ani nr. 24* cl. V. Verdeş Cezarina (E : 2232, 8, 43, 8—50, 65, 8). *Şc. 8 ani nr. 26* cl. VIII. Popescu T. Eugeniu (E : 2233, 5—40, 2—7). *Şc. 8 ani nr. 41* cl. VIII. Popescu Sorin (E : 2236, 61, 7, 70, 4, 7, 9 ; 6720, 2). *Şc. 8 ani nr. 46* cl. V. Dinescu Adrian (E' 2235, 38, 40, 3, 8, 65, 6, 8). *Şc. 8 ani nr. 71* cl. VII. Mahalniski Andrei (E : 2233, 8, 40, 2, 3, 6—8, 50, 8). *Şc. 8 ani nr. 75* cl. VII. Vergheş Ştefan (E : 2240, 2, 3, 7, 8, 50, 7,8, 68, 70). *Şc. 8 ani nr. 85* cl. VII. Spătaru Viorel (E : 2233, 5, 40, 2, 3, 6—8, 50, 4, 8, 65, 8, 9, 74). *Şc. 8 ani nr. 93* cl. VII. Spuderca Antoaneta (E : 2239, 42, 5—8, 50, 4, 9). *Şc. 8 ani nr. 103* cl. VII. Marinescu Viorel (E : 2248, 50, 1, 3—5, 7, 9). Şc. 8 ani nr. 111. cl. VIII. Herman Ştefan (E : 2220, 33, 5, 6, 40, 2, 3, 8, 57, 8, 63, 5, 8, 74, 80). *Şc. 8 ani nr. 121* cl. VII. Donescu Florin (E : 2255—9, 73, 4, 6). *Şc. 8 ani* nr. *122* cl. VI. Leonte Viviana.(E : 2240, 3, 7, 8, 52, 4, 65, 8), Munteanu Mihai (E : 22,35, 8, 40, 3. 8, 50, 53, 4). Cl. VII. Balaure Aurora (E : 2233, 40, 2, 3, 7, 8, 50, 3,5), Florian Andrei (E : 2240 ; 2, 3, 53, 6, 8, 65, 8, 74), *Şc. 8 ani nr. 128* cl. VII. Ciora Mihaela (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 5—7), Gruia Vladimir (E : 2233—5, 8, 9, 42, 5—7), Şerban Corina (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 5—7). Cl. VIII. Calaidjoglu Mihaela Angela (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 5, 7), Oprică Rodica (E : 2233—6, 8—40. 2, 3, 5, 7). *Şc. 8 ani nr. 142* cl. VII. Dobre Silvia (E : 2240, 3, 8, 57, 65, 8, 80), Lungu Nicolae (E : 2240, 3, 8, 56—8, 65, 8). *Şc. 8 ani nr. 145* cl. VII. Ciucu Marian (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 5, 8, 9). Logigan Dumitru (E : 2233, 5, 8, 42, 48, 9, 54, 4), Papari Zoiţa (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 5, 8, 9). Cl. VIII. Vlădăreanu Camelia (E : 2233, 5, 6, 8—40, 2, 3, 5). *Şc. 8 ani nr. 146* cl. VII. Bădescu Smaranda (E : 2248—60, 2, 4, 8—71, 6—8, 90). *Şc. 8 ani nr. 151* cl. VII. Tusa Paul (E : 2220, 6, 31—3, 5, 8, 40, 3, 7, 8, 50, 65, 8). *Şc. 8 ani nr. 154* cl. VI, Greceanu Ion (E : 2233, 46, 7, 53, 70, 3, 4, 7, 8). *Şc. 8 ani nr. 166* cl. VII. Cernescu Marina (E : 2197—201, 10, 1, 7, 8, 46, 8, 51—8). *Şc. 8 ani nr. 168* cl. VII. Vijelie Luminiţa (E : 2233, 5—47). *Şc. 8 ani nr. 173* cl. V. Andrievici Bogdan (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 7, 50).

Ş.m. 1 N. Bălcescu cl. VIII. Teişanu Cornel (E : 2236, 7, 60, 3, 78, 80 ; 6670, 3, 6, 80, 5, 720, 2). Cl. XI. Adrian Sorin (E : 2245, 64, 78, 80 ; 6646, 82, 98, 710, 5, 6, 20, 2, 5, 35, P. Croitoru Stibina (E : 2236, 7, 45, 6, 60, 1, 3, 78 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 720, 2, 4), Hann Radu Mihai (E : 2245, 61, 6, 77, 8, 80 ; 6657, 63, 82, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 35, 52), Marcov Eugen (E : 2236, 45, 60, 1, 2, 80 ; 6646, 57, 73, 4, 6, 7, 80, 716, 24), *Sbîrnea Mihai* (E : 2260—4, 78—80 ; 6632, 9, 42, 6, 53, 70, 1, 4—7, 80—2, 5, 97, 8, 707, 10, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6), *Ş.m. 3* cl. VIII. Biculescu I. Niculae (E : 2248, 52, 7, 9, 63, 5, 70 ; 6720, 2). *Ş.m. 5* cl. VI.

Doran Andrei (E : 2246, 7, 52—4, 9, 69—71, 8, 80), Lascu Mihaela (E : 2240, 6, 8, 55, 65, 6, 8, 9). Cl. VII. Cosma Gheorghe (E : 2247, 8, 50, 3, 4, 8, 68, 9, 80), Tocilescu Mihai (E : 2248—58). Cl. IX. Belotu Mihaela (2228, 31, 6, 7, 60—3; 6583, 601, 09, 15, 46, 57, 70, 4, 6, 7). Buia C. (E : 2260, 1, 3, 4, 80; 6670, 4, 6, 7, 80—2, 720, 2), Porumbescu Eugen (E1 2236, 7, 41, 61—3, 78, 9; 6670, 3, 4, 6, 80, 720, 2, 35), Tun Marilena (E : 2237, 45, 60, 1, 3, 77, 80; 6649, 70, 6, 720, 2, 4), Manolache C. Nicolae (6553, 4, 8—63, 7, 9, 71, 2, 9, 80, 3, 4, 6, 97, 9, 601, 6, 7, 9, 15, 9, 22, 4, 5, 39, 51, 6, 9, 53, 61, 5; E. : 2212, 9, 28, 9, 20, 1, 6, 7, 41). Cl. XI. Kirmaier Eduard (6630—4, 7, 70—2, 4—7, 80). *Ş.m. 6* cl. VII. Weiner Irina (E : 2233—5, 8—40, 2—7). *Ş.m. 7* cl. VII. Redinger Faria (E : 2233—5, 8—40, 2, 3, 5—7). Cl. IX. Badea V. Teodor (6668, 70, 1, 4, 6, 7, 80—2, 703, 12, 4—6, 20, 35, 49). Cl. XI. Codreanu Dinu (6666, 7, 70, 1, 4—7, 80, 1, 3, 95, 710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4). *Ş.m. 8* cl. IX. Pop Ionel (E : 2236, 7, 61, 3, 79; 6670, 5, 6, 80, 716, 22, 3, 4). *Ş.m. 10* cl. VI. *Corîciu Ion Cezar* (E : 2233, 5, 6, 8—40, 2—55, 8—60, 2, 3, 5—70, 2—5); 6681, 724), Popescu C. Dorin (E : 2235, 8, 40, 3, 6, 7, 8, 50, 4). Cl. VIII. Tigoiu Victor (E : 2236, 7, 61, 3, 78, 80; 6670, 6). Cl. X. Bad Monica (6670—3, 5—8, 10, 5, 20, 2), Cănilă Carmen (6667, 70, 1, 3, 6, 10, 5, 20, 2, 53, 6, 7, 76), Renţea Anca (6667, 70—7, 10, 5, 2, 20, 35, 51), Cl. XI. *Chiţescu Ion* (6649, 54, 9—63, 66, 7, 72, 5, 7—9, 82, 5, 90, 2, 5—700, 1, 3, 7—9, 16, 7, 21, 3, 5, 6, 8, 31, 2, 5, 6, 40, 1, 4, 5, 7—9, P). *Ş.m. 11* cl. IX. Vlăduţescu Radu (E : 2236, 7, 61, 3, 80; 6670, 4, 6, 720, 2). Cl. X. Lutaşu Marius (6630, 44, 6, 8, 63, 5, 7, 70—2, 4—6, 8, 80 1, 4, 5, 92, 3, 5, 7, 8, 711, 5, 6, 20—2, 4, 9, 32, 5, 6, 48). Cl. XI. Bunea Corneliu Mai (6630 4, 8, 40, 4, 67, 8, 70—2, 4—6), Ursulescu Octavian (6549—52, 5, 7, 65, 71, 601, 5, 9, 18 28), 20, 1, 8, 40, 4, 53, 7, 9, 70, 5, 6, 93, 707). *Ş.m. 12* cl. IX. *Cartianu Dan* (E : 2228, 9, 36 45, 60, 1, 3, 4, 77, 9, 80; 6580, 3, 5, 6, 601, 6, 9, 15, 7, 39, 70—8, 80, 3, 5, 97, 716, 20, 2) Iancu Vladimir (E : 2260, 2—4, 77, 8, 80; 6674, 80, 2, 98, 716, 20, 2—4, 35). *Ş. m. 13* cl. IX *Arapu Bogdan* (E : 2231, 6, 45, 60—4, 77—80; 6583, 6, 96, 615, 49, 57, 65, 70, 2—7, 80 1, 5, 712, 6, 20—8), Bănuţă Florea (E : 2261, 3, 7, 78; 6670, 3, 6, 85, 716, 20, 2, 4, *Lăzărescu Radu* (E : 2228, 31, 6, 7, 45, 60—4, 77, 8—80; 6583—5, 601, 57, 70, 2—7, 80 1, 5, 715, 6, 20—6, 8), Ştefănescu Dan (E : 2228, 36, 61—4, 78, 89, 90; 6615, 70, 80, 91 720, 2, 4, 35). Cl. X. Căpraru Valentin (6670, 1, 4, 5, 7, 710, 20, 2, 4, 6, 7), Dima Corneliu (6663, 6, 71, 752, 3, 5—7, 61, 4, 83, 90), Nenciu Teodor (6657, 70, 710, 42, 57, 64, 83), Popescu Ialomiţa Cristian (6609, 41, 9, 70, 1, 7, 80, 5, 7), Popescu Lucian (6639, 53, 63, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 95), Sălăgeanu Ion (6710, 1, 4, 5, 36, 51—3, 5—7, 9—61, 3), Şerban Cristian (6632, 70, 3—7, 710, 5, 42, 57, 64, i2), Turturică Ştefania (6639, 53, 63, 70, 3, 7, 710, 15, 20, 2, 35, 6). *Ş.m. 17* cl. IX. Avramoiu Valentin (E : 2236, 45, 61, 3, 4, 77—80; 6639, 70, 1, 4, 80, 2, 3, 710, 2, 5, 6, 20—2, 6, 35). Cl. X. Botez Dan (6630, 1, 4, 9, 41, 2, 9, 56, 7, 61, 3—5, 7—6), Boiangiu Teodor (6666, 70—2, 4—8, 80, 95, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 6, 41), Schaffer Silviu (6655, 66, 7, 9—72, 4—7, 80, 2, 3, 92, 3, 6, 8; 6703), Suciu Paul (6631—4, 6, 9, 41—4, 6, 9, 53, 7, 51, 3, 5). Cl. XI. *Almer David* (6630—3, 6, 8, 42, 4, 6, 8, 9, 53, 5, 7, 9, 63, 5, 6, 7, 70—8, 80—95, 706, 7, 9, P). *Ş.m. 18* cl. IX. Musceleanu Ion (F : 2236, 7; 6636, 57, 70, 1, 4—6, 80, 1, 720, 2). Cl. XI. Dumbrăveanu Gh. (6630, 6, 7, 71—7, 80, 2, 95, 709, 15, 20, 1). *Ş.m. 21* cl. VI. Guţă Ileana (E : 2238, 40, 3, 6—8, 50, 2). Cl. XI. Morocoş Adriana (6670, 4, 5, 7, 93, 720; 2, 6; E : 2260, 61, 3, 79). *Ş.m. 22* cl. IX. Gherghitoni Victor (6639, 46, 57, 80—2, 5, 720—2, 4—6, 8). *Ş.m. 23* cl. X. Gheorghe Marian (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 95, 710, 5, 6, 20, 4), Măroiu F. A. (6670, 1, 4, 6, 80, 2, 5, 92, 5, 8, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35). Cl. XI. Mihai Constantin (6628, 31, 2, 4, 9, 41, 4, 8, 53, 7, 9, 66, 7, 70—2, 4—7, 80, 3, 5, 703, 6, 7, 1p, 1, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 36). *Ş.m. 25* cl. IX. Florescu Dan Victor (E : 2260, 78—80; 6653, 4, 7, 80, 3, 720, 2, 8.), Nisipeanu Valentina (E : 2207, 36, 63, 79, 80; 6670, 2, 9, 720, 2, 4), Odobescu Grigore (E : 2236, 7, 45, 61—3; 6649, 57, 70, 4, 6, 7, 81, 5). Pană Ştefan (E : 2264, 78—90; 6639, 82, 5, 716, 20, 2, 4, 6), Voinea Mariana (E : 2236, 63, 77—9; 6670, 3, 6, 716, 20, 2, 4). *Ş. m.* 26 cl. IX. Ripeanu Violette (E : 2236, 7, 61, 3; 6670, 6, 7, 80—2, 720, 2). *Ş.m. 28* cl. VII. *Costea Constanţa* (E : 2233—6, 8—40, 2—7, 8, 50—2, 4—63, 5, 6, 8—71, 4, 6—8, 80; 6670, 6, 716, 20, 2), Stroe Marian (E : 2233, 6, 8, 42, 3, 5, 7, 8, 63), Valter Dan (E : 2233, 4, 6, 8—40, 43, 7), *Văleanu Vladimir* (E : 2212, 20—4, 6, 8, 31—3, 5—47; 6554, 61—3, 71, 80, 3, 5, 6, 705, 7, 9, 15, 6, 8, 31, 46, 9, 57, 61, 5). Cl. VIII. Gartner Ion (E' : 2235, 47, 8, 54, 6, 8, 63, 5; 6670), Răutu Lidia (E : 2263, 47, 7, 80; 6670, 6, 720, 2). Cl. IX. Bogdan Vera (E : 2238, 61, 3, 79; 6670, 4, 6, 7, 715, 6, 20, 2, 4, 8), Petculescu Mariana (E : 2236, 7, 61, 3, 80; 6646, 70, 4, 6, 75, 85, 716, 20, 2), Sevcenco Vlad (E : 2236, 45, 61, 9, 77, 9, 80; 6670, 720, 2, 6). Cl. X. Alexandru Radu (6643, 4, 8, 36, 63, 93, 3, 5, 7, 8, 732, 3, 5, 6,), Ciornei Marian (6670, 1, 3—7, 10, 1, 5, 51, 5), Mihalache Adrian (6670, 1, 4, 6, 7, 711, 6, 20—2, 4, 5, 6). Constantin Ion (6671, 4, 5, 10, 1, 5, 51, 2, 5—7, 7, 63). *Ş.m. 32* cl. VI. Dumitrescu Anca (E : 2244, 6—8, 50—4, 8, 9; 6681), Popovici Liviu (E : 2235, 65—76, 7, 8, 80). Cl. X, Athanasiu Irina (6631, 49, 63, 70, 1, 3—7, 80), Bacivorov Ioan (6632, 70, 1, 4—7, 80, 15, 6, 20, 4), Ghica

Ion (7670—8, 720, 2, 35), Mihai Gh. Paul (6637, 44, 63, 70, 1, 4—6, 720, 2, 4, 6), Piscureanu Nicolae (6633, 6, 70, 1, 3—6, 716, 20, 2, 4), Profeta Horia (6631, 2, 49, 63, 70, 1, 4—7, 80, 1), Zaharescu Mircea Andrei (6632, 49, 63, 70—8). *Ş.m. 33* cl. IX. Gîlgău Veturia (E : 2236, 7, 45, 61, 3 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 720, 2), Radu Cornel (E : 2236, 62, 3 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 82, 720, 2), Tudora Marius (E : 6583, 70, 4, 6, 7, 80, 5, 720, 2). *Ş.m. 36* cl. VI. Logofătu C. Maria Anca (E : 2233, 5, 8—40, 2, 3, 6—8, 50—5, 8—60, 4) . Cl. VIII. *Logofătu C. Bogdan* (E : 2197, 203, 17—9, 36, 7, 41, 5, 53, 9—64, 77, 9 ; 6503—5, 7, 10, 2, 5, 22, 3, 6, 53, 71, 82—87, 99, 604, 15, 30, 3, 4, 9, 44, 6, 8, 60, 60—8, 70, 1, 4—7, 80—3, 5, 98, 715, 6), Popa Aurelia (E : 2235, 6, 40, 3, 5, 7, 8, 50 ; 6670, 6). *Ş.m. 37* cl. IX. Kalisz Eugenia (E : 2241, 78—80 ; 6639, 49, 65, 720, 2—5), Secoşeanu Mihaela (E : 2236, 7, 61, 3, 80 ; 6670, 5, 6, 80, 5, 720, 2, 4). *Ş.m. 39* cl. VII. Bălună Anişoara (E : 2233, 38, 40, 3, 8, 52, 68, 70), Guides Cristian (E : 2264—6, 8—70, 4, 80), Marinescu Iulian (E : 2248, 60, 5, 8—70, 4, 80), Morariu Daniela (E : 2233—5, 40, 3, 8, 56, 7, 65), Ştefanovici Doina (E : 2246, 8, 9, 51, 2, 3, 8, 56, 8), Ursache Elena (E : 2233, 8, 40, 3, 8, 40, 3, 8, 52, 65, 8). Cl. VIII. Wiener Adrian (E : 2233, 5, 6, 7, 8, 40, 3, 7, 8). Cl. IX. Sulea Ion (6639, 70, 4, 6, 7, 80, 715, 6, 20, 2, 4, 35).

BUZĂU. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Bob Gheorghe (E : 2233, 6, 8, 40, 2, 3, 65, 8, 70, 80), Bogdan Ion (E : 2235, 6, 40, 2, 3, 8, 63, 5, 8, 9, 71, 80), Cernahoski Cătălin (E : 2233, 6, 8, 42. 4, 5, 8, 63, 5, 8, 77, 80), Juncu Adrian (E : 2233, 5, 6, 88, 40, 2, 3, 5, 8, 63, 5, 8) Sc. *8 ani nr, 4* cl. VII. Grăjdeanu Vasile (E : 2248, 57, 65, 6, 8, 70, 8, 80). *Sc. 8 ani nr. 6* cl. VIII. Manea Dumitru (E : 2237, 9, 40, 3, 8, 50, 2, 3, 4, 8, 61, 3). S.m.l cl. VII. Ciocan Nicolae (E : 2248,9, 52, 5, 7, 8, 65, 8, 9, 70), Croitoru Viorica (E : 2233, 8, 40, 3, 7, 55, 66, 8, 70), Vasilescu Paul (E : 2248, 9, 51, 2, 5, 8, 65, 8, 70). Cl. IX. Andreescu Florin (E : 2236, 7, 45, 60, 1, 3, 80 ; 6646, 70, 6, 7, 9, 716, 20, 2, 4), Gavrilă C. Şerban (E : 2260—4, 68—80 ; 6631, 9, 46, 65, 70, 1, 4, 6, 7, 9—81, 3, 5, 98, 710, 5, 6, 20—2,4,5,7, 35), Ivănescu Anaton (E : 2236, 7, 45, 60, 1, 3, 78, 80 ; 5546, 70, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 35). Cl. XI. Gavrilă Rodica (6631, 2, 6, 7, 6—7, 70—2, 4—8, 83, 96, 709, 10, 1, 5, 20—2, 4, 33, 5, 6), Onel Gabriel (6628, 67, 70—2, 4—8, 80, 5, 703, 9, 11, 3, 5, 20, 2, 6, 35). S.m. 2 cl. VII. Capşa Carmen (E : 2233, 4, 8, 40, 2—4, 6, 7, 52, 5, 8), Scoala de muzică cl. VII, Tăbîrcă Ana (E : 2248, 57—9, 65, 6, 8, 74).

BUZIAŞ. *S. m.* cl. VIII. Adamescu Nicolae (E : 2233, 5, 40, 2, 3, 7, 8, 68), Albu Elena (E : 2232, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 8, 50, 8, 63, 5, 8, 70), Munteanu Maria (E : 2233, 5, 6, 40, 3, 50, 63, 78), Reinerth Edith (E : 2233, 6, 43, 8, 55, 8, 63, 66).

CALAFAT, *S.* m. cl. IX. Pruiu Adrian (E : 2236, 7, 61, 3, 77, 9, 80 ; 6670, 5, 7, 716, 20, 2). Cl. XI. Buzatu Dumitru (6644, 8, 70—7, 82, 95), Popescu Constantin (6270, 670, 1, 3, 5—7, 82, 95, 710, 5,2).

CARACAL. *S.* m. 1 cl. IX, Vîrtosu Mihail (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 4, 79, 80 ; 6639, 70, 6, 7, 80, 5, 720, 2, 35).

CARANSEBEŞ. Ş. m. *l* cl. IX, Burdugeac P. (E : 2261, 2 ; 6636, 71, 4, 7, 80, 1, 720—4, 35), Geană Nistor Pavel (E : 2236, 63 ; 6646, 53, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 715, 20, 2, 4, 35). Cl., XI. *Bena I. Dorin* (6551—8, 60, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 72, 4, 6, 9, 80—7, 90, 5—7, 9, 601, 5, 7, 9, 10, 13—16, 18, 21, 2, 4, 5, 30, 2, 4, 6, 41, 3, 8, 52, 6, 7, 9, 64, 6, 7, 71, 4, 6, 8, 83, 95—7, 707, 9—11, 5, 6, 20—2, 4, 6, 35, 6, 48), *Man Carol* (6628, 30, 1, 7, 62, 66—78 80—5, 91, 2, 5, 7, 8, 700, 3, 6, 7, 9011, 3, 5, 6, 20—2, 4, 6, 32, 5, 6, 45, 8). S. m. 2 cl. IX. Dumitrescu Trandafir (E : 2236, 63 ; 6670, 6, 7, 80—2, 720, 4).

CALAN. *S. m.* cl. VIII. Anghel Tamara (E : 2233, 6, 40, 3, 61, 3, 70, 8, 9). Cl. IX. Găspărescu Gheorghe (E : 2236, 7, 41, 5, 60, 1, 3, 77—80 ; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 4, 715, 6, 20, 2, 4, 9).

CENADE (Braşov). *Sc. 8. ani* cl. VIII. Olar Mihai (E : 2248, 52, 4, 9, 63, 5, 8, 70, 6, 80).

CIMPIA TURZII. *S. m.* cl. VIII. Cîmpean Gheorghe (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 6, 7). Cl. XI. Bărbătan Emil (6666, 70, 1, 5, 6, 80, 703, 10, 1, 3, 5, 20, 2).

CIMPINA. *S. m. l* cl. VII. Romaşcanu Rodica (E : 2220, 2, 4—6, 32—4, 8, 40, 3). Cl. OX. Constantinescu Florin (E : 2262, 4, 78—80 ; 6657, 77, 9—82, 5, 95, 7, 714—6, 20—2, 4—8, 35), Iosif Ion (E : 2236, 61, 3, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 80, 720, 2, 4), Nica Const. (E" 2236, 7, 61, 3, 80 ; 6670, 7, 80, 720, 2), Niculescu Eugen (E : 2261. 3, 70, 80 ; 6670, 3, 4, 715, 20—4), Stoian Luminiţa (E : 2237, 7, 61, 3, 8, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 6, 720, 2), Surugiu Dan (E : 2260, 1, 3 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 6, 720, 2), Văcăriu Ioana (E : 2261, 3, 4, 78, 80 ; 6670, 4, 6, 7, 716, 20, 2, 35). Cl. X. Bucur Claudiu (6666, 70, 1, 3, 4, 7, 92, 5, 7, 8, 710, 6, 20, 6, 36), Medvediuc Al. (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 82, 95, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35), Olteanu Luminiţa (6670, 1, 3, 4, 6, 85, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35) ; E : 2261, 3, 80), Palada Mihail (6656, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 710, 5, 20, 2, 4). *S. m. 2* cl. IX. Ghica Florentin (E : 2263 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 6, 715, 6, 20, 2, 6) Cl. X. Neagu Petre (6631, 44, 70, 1, 3—5, 7, 80, 1, 720, 2, 35), Puiu Lazăr (6670, 1, 3—7, 80, 715, 6, 20, 35).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *S. m. Dragoş-Vodă* cl. IX. Ciobanu Mihai (E : 2260, 1, 3, 77, 8, 80 ; 6670, 3, 6, 81, 720, 2, 42), *Popescu Ovidiu* (E : 2260, 2—4, 78, 80 ; 6669—71, 3, 4, 6, 7, 9—84, 92, 5, 7, 715, 6, 20—9, 35, 6, 44, 9). Liceul militar cl. X. Dan Nicolae (6653, 70, 1, 3, 5, 6, 80, 2—5, 710, 5, 20, 2, 6, 35), Florian Lucian (6653, 70, 2, 3, 5, 6, 80, 2, 4, 5, 715, 27, 2, 35), Gurban Ion (6653, 70—3, 5, 6, 80, 4, 5, 710, 15, 20, 2, 6, 35), *Lău Gheorghe* (6631—3, 9, 41—4, 6, 8, 9, 63, 6, 7, 9, 61—3, 5—7, 70—8, 80—6, 9, 91—3, 5—8, 700, 2, 6, 7, 10. 11, 4—6, 20—6, 9, 31—8, 40, 1, 7). Cl. XI. Cirnodolea Marcel (6631, 4, 9, 63, 710, 11, 3, 5, 6, 20, 2, 5. 35, 45), *Crăciun Alexandru*)6630, 1, 4, 6, 7, 41, 2, 7, 8, 51, 3, 5, 9, 62, 6—78, 80, 4, 5, 8—91, 3, 508, 703, 7, 10—3, 5, 6, 8, 20, 2, 5, 6, 31, 5—8, 45), Fetica Emil (6628, 24, 7, 8, 53, 7, 9, 66, 7, 70—8, 80—5, 703, 6, 10, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 32, 5, 6, 45 8 Kenyenes Andras (6666, 7, 70—8, 85, 710, 1, 5, 20, 2, 6, 35, 6, 41).

CÎMPULUNG MUSCEL. *S. m.* cl. X. Braga Doina Marilena (6667, 70—6, 8, 96, 720, 2, 35, 6).

CLUJ. *Sc. 8 ani nr. 2* cl. VII. Sîrbu Radu (E : 2249, 51—8). Sc. 8 ani nr. 5 cl. VII. Pop Traian (E : 2233, 4, 9, 40, 2, 3, 8, 50—5, 7—9). *Sc. 8 ani nr. 7* cl. VI. Zglobiu Nicolae (E : 2235, 8—40, 3, 4, 6—55). *Sc. 8 ani nr. 14* cl. VI. Tanasiu Adriana (E : 2248—50, 2, 4—6,8) S. m. 4 cl. V. Voicu Doina (E : 2248, 50, 3, 4, 8, 65, 78, 724). Cl. VII. Cenan Mitcea (E : 2233, 5, 42, 7, 8, 53, 9, 65, 8, 78), Moga Ion (E : 2233, 42, 7, 8, 50, 57, 68, 70). Cl. VIII. Derevenco Nadia (E : 2233, 5, 6, 40, 5, 7, 9, 52, 8, 61, 2, 5, 6, 70, 7, 8 ; 6720, 2, 42). *S. m. 5* cl. VII. Munteanu Lucia (E : 2233, 8. 40, 2, 3, 6, 7, 55). Cl. IX. Grigore Corneliu (E : 2260—4, 78—80 ; 6670, 1, 3, 6, 81). *S. m. 6* cl. IX. Dobroter Bela (E : 2236, 7, 61, 3 ; 6657, 70, 3, 4, 6, 7, 82, 5, 720). Cl. X. Kovacs Ladislau (6632, 5, 9, 44, 8, 53, 63, 70—7, 85, 93). *S.m. 7 N. Bălcescu* cl. VII. Rovenţa Iancu (E : 2248, 50, 52, 65, 6, 8—70). Cl. VIII. Man Augustin (E : 2250, 5, 7, 65, 6, 8, 70, 3, 4 ; 6742), Măscaşiu Mariana (E : 2248, 54, 8, 9, 65, 8, 70, 75—8, 80 ; 6722), Peter Attila (E : 2235, 9, 46, 8, 61, 3, 5, 8), Raţiu Aurel (E : 2242, 6, 54, 5, 61, 5, 8, 80), Simon Sonia E : 2254, 8, 9, 65, 8 ; 6720, 2, 77), Tudoran Tudor (E : 2235, 7—9, 42, 4, 50, 2), Vuşcan Viorica (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 65, 8, 9, 76, 80). Cl. IX. Neca Ioan (E : 2236, 45, 61, 3 ; 6646, 70, 3, 6, 7, 85, 720), Farcaş Ana (6639, 46, 9, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 35), Jurja Cornel (E : 2236, 45, 61, 3, 80 ; 6646, 70, 3, 6, 716, 20, 2). Cl. X. Breharu M. Tamara (6667, 70, 1, 3, 5, 6, 80, 2, 711, 6, 20, 2, 35), Mareş Maria (6646, 70, 1, 3—7, 80, 2, 716, 20, 2, 35), Vulişici Vasile (6639, 46, 61, 70—4, 7, 80, 716, 20, 2, 35). Cl. τI. *Perl Toma* (6628, 30, 1, 3, 4, 7, 8, 50, 4, 6, 9, 59, 63, 6—78, 80—3, 5, 93, 5, 7—9, 701, 6, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2.4, 6, 8, 31, 5, 6, 45, 7, 8). *S.m. 9* cl. IX. Gînscă Ioan (E : 2261, 3, 77, 9, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 2). *S.m. 10* cl. VI. Marfievici Radu (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 3, 8, 50, 1, 4, 8). *S. m. 15* cl. VII. Iancău Marian ((: 2233, 5, 8—40, 2, 4, 6, 8, 50). *Sc. prof. comerţ* an I. Bud Ioan (E : 2248, 54, 8, 65, 8, 9, 77, 80). Inginer Seimeanu T. (6504—7, 10—2, 4—6, 9—24, 41, 4).

COMARNA (Iaşi). *Sc. 8 ani* cl. VII. Ioniţă Mihai (E : 2248, 50, 4, 8, 9, 65, 8, 70, 6).

COMARNIC. *S. m.* cl. IX. Buzatu C. (E : 2236, 7, 61, 3, 78, 80 ; 6670, 3. 4, 6, 7, 80, 2, 716, 20, 2, 4).

COMĂNEŞTI (Bacău). Mintici Dan (6644, 70, 1, 3—7, 710, 5, 20, 2, 4, 35).

CONSTANŢA. *Sc. 8 ani* cl. VII. Ivaneş Mircea (E : 2238, 40, 3, 7, 8, 65, 6, 70). Cl. VIII. Chihaia Mariana (E :2251—3, 9, 60, 2, 3, 76). Cl. IX. Chiriac Călin (E : 2236, 7, 61, 3 ; 6670, 6, 7, 720—2, 4, 8), Mîndruţa Rodica (E : 2269, 79 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 715, 20, 3). Cl. XI. *Chircu Teodor* (6627—32, 5—7, 9, 41, 2, 4, 56, 63, 6—78, 80—3, 90, 2, 3, 5, 7, 8, 700, 3, 6, 7, 9). *S. m. 2* cl. IX. Blană Ionel (E : 2219, 36 ; 6630—2, 6, 41, 2, 4, 6, 52, 61—3). *S. m. 3* cl. IX, Bedivan Maria (E : 2260, 1, 3, 78—80 ; 6673, 4, 7, 80, 1, 95, 716, 20, 3—4, 6, 35, 46). Cl. XI. *Răduică Nicolae* (6630—2, 4, 7—41, 4, 6, 9, 53, 5, 7, 9, 60, 6—78, 80, 1, 3, 91, 5, 6, 703, 6, 9—13, 5, 6, 20, 2, 6, 35, 6, 45, 8).

CORABIA. Voinea Marcel (6671, 4—6, 80, 715, 20, 2, 31, 5, 6, 8). Cl. XI. *Fulea Eugen* (6628, 30, 2, 8, 42, 4, 53, 9, 63, 6, 7, 70—8, 80, 1, 92, 3, 5, 6, 700, 6, 9, 11, 5, 20, 2—4, 6, 36, 8, 45).

COSABA (Răcari Bucureşti). *Sc. 8 ani* cl. VII. Constantin Maria (E : 2233, 40, 2, 3, 7, 8, 50, 8), Dumitru Ion (E : 2233, 40, 2, 3, 7, 8, 50, 4, 8), Ghiţă Maria (E : 2233, 40, 2, 3, 46, 8, 50, 8), Zubac Mariana (E : 2233, 40, 2, 5, 7, 8, 50, 8).

CRAIOVA. *Sc. 8 ani nr. 9* cl. VIII. Stănescu Ovidiu (E : 2236, 43, 8, 50, 3, 4, 7, 61, 3, 5, 70, 4, 8). *S.m.l* cl. VIII. Dinu G. Marin (E : 2258, 61, 3, 5, 8, 70, 6, 80), Dindere Gheorghe (E : 2233, 4, 6, 40, 2, 61, 3, 70), Florescu Nicolae (E : 2236, 48, 61, 3, 5, 77, 8 ; 6670, 6), Poloni Costinel (E : 2233, 48, 50, 8, 63, 5, 6, 8, 73, 4, 8), Tătaru Maria Luiza (E : 2248, 52, 61, 3, 5, 78 ; 6670, 6). Cl. IX. Cîrstea Ion (E : 2236, 45, 63, 80 ; 6670, 3, 6, 720—2, 6), Florian Horia (E : 2236, 45, 63, 77 ; 6670, 6, 7, 716, 20—2, 6). Cl. X. Turulescu Daniela (6670—8, 711, 5, 20, 2, 35). Cl. XI. Andrei N. Dan (6628, 31, 4, 6, 46, 8, 70—7, 80, 703), *Sandu Darius* (6627, 8, 31, 2, 4, 6—8, 44—6, 9, 55, 7, 9, 70—8, 80, 3, 5, 706, 10—3, 5, 20,

2, 4, 6, 35, 5, 7, 8), Biscă C. Octavian (6552, 3, 5—73, 9—91, 6, 7, 9, 601, 04, 09, 15). S. m. 2 cl. VIII. *Gheorghe Felicia* (E : 2233—40, 2—8, 50—65 ; 6670, 1, 3—7, 80—5, 95, 7). Cl. IX. Circiumărescu Ion (E : 2236, 62, 3, 78, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 720, 2), Dincă Melania (E : 2236, 7, 45, 61, 3 ; 6670, 3, 6, 7, 716, 20, 2), Fetică Gh. (E : 2261, 3, 77—9 ; 6670, 3, 6, 716, 20, 2, 6, 35), Grebelescu Alex. (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 78, 80 ; 7670, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 716, 20, 2, 4, 6), Marina Constantin (E : 2236, 7, 61, 3, 4, 77, 8, 80, 9 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 716, 20, 2, 4, 6), Nigrini Adrian (E : 2236, 61, 3, 78, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 80, 716, 20, 2), Ştefănache Cornelia (E : 2261, 3, 78 : 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 720, 2, 6). Cl. X. Diaconu I. Ştefan (6644, 70, 1, 3—7, 82, 5, 720, 2, 6, 35), Georgescu Dan (6630, 3, 4, 8, 9, 70—7, 82), Peterscu A. Ion (6630—2, 4, 5, 9, 44, 6, 56, 7, 9, 70). Cl. XI. Babarada Ion (6627, 31, 2, 4, 44, 59, 70—8, 80—2, 4, 5). *S.m. 3* cl. XI. Cioroiu Dan (6628, 32, 4, 40, 3, 70—3, 5, 6, 720, 2), Diaconescu Mihaela (6628, 30, 1, 4, 9, 48, 55, 67, 9, 80, 5, 6, 20, 2). S.M. 4 cl. VIII. Bordei Nicolae (E : 2236, 48, 61, 63, 5, 6, 77, 8 ; 6670, 6),Constantin Gh. (E : 2248, 61, 3, 5, 6, 8 ; 6676, 720, 2), Duca Marian (E : 2248, 61, 3, 5, 6, 8 ; 6676, 720). Cl. X. Pavel Maria (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 6). S.M. 5 cl. IX. Ilie M. Angela (E : 2236, 37, 45, 61, 3 ; 6670, 3, 6, 7, 716, 22, 4), Iordache Constanţa (E : 2236, 63, 80 ; 6670, 3, 6, 80, 1, 720, 2, 6, 9), Mareş Tatiana (E : 2236, 63, 80 ; 6670, 3, 6, 80, 1, 720, 2, 6, 9), Vişan Ileana (E : 2236, 7, 61, 3, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2, 6, 9).

CRISTUR (Hunedoara). *S.m.* cl. X. Horvat Andrei (6639, 62, 70, 1, 3, 6, 7, 80, 5, 91, 5, 7, 8710, 1, 4—6, 20, 2, 4).

CUMPĂNA. *Sc. 8 ani* cl. VIII. Puiu Anastase (E : 2233—6, 8, 9, 42, 3, 5—8, 50, 1, 4, 8, 63, 5, 6, 8, 70, 80).

DEJ. *S.m.1.* cl. VIII. Kosa Margit (E : 2233, 5, 6, 7, 9, 60, 2, 3, 7, 63), Solymony Zoltan (E : 2233, 5—40, 2, 3, 61, 3, 5, 79, 80, 6670, 6, 720, 2), Zeng Iren (E : 2236, 8, 50, 8, 9, 63, 8, 80 ; 6720, 2). Cl. IX. Borth Ferenc (E : 2236, 7, 41, 5 ; 6636, 46, 57, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80). *S.m. 2* cl. VII. Ciobotaru Gabriela (E : 2233, 5, 43, 8, 50, 4, 65, 6, 8, 78), Mórariu Marcel (E : 2233, 8, 40, 2—4, 6, 7), Năstase Dorina (E : 2233, 4, 54, 5, 7, 8, 65, 6), Popoc Viorica (E : 2233, 40, 43, 8, 52, 3, 65, 6, 7—80, 4), Smărăşanu Ovidiu (E : 2233, 40, 3, 8, 52, 63, 5, 6, 8—70), 4). Cl. IX. Giurgea Laurenţiu (E : 2236, 7, 61, 3, 77, 9 ; 6670, 3, 6, 7, 720, 2), Filip Ion (E : 2236, 7, 61, 3, 79, 80 ; 6670, 3, 6, 720, 2), Mureşan Mircea (E : 2236, 7, 61, 3, 79, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 720, 2). Cl. X. Petrina A. Mircea (6666, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 720, 3, 4, 35).

DEVA. *S.m.* cl. IX. Dinescu Alex. (6670, 6, 7, 80, 720, 2, 4, 35, 42 ; E : 2236, 77, 80).

DITEŞTI (Ploieşti). *Sc. 8 ani* cl. VII. Caloianu Georgeta (E : 2233, 40, 1, 3, 7, 8).

DOROHOI. *S.m.* cl. IX. Avram Iancu (E : 2236, 7, 61, 77 ; 7670, 3, 6, 7, 85, 720, 2).

DRĂGĂNEŞTI OLT. *S.m.* cl. VIII. Dumitra Viorica Angela (E : 2233, 5, 6, 45, 8, 63, 70, 6).

DRĂGĂŞANI. *Sc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Oltu Mihai (E : 2220—2, 2, 4, 32, 3, 6, 8, 42, 3, 5, 6). S.m. 1 Mai cl. VIII. Popescu A. C. Ion (E : 2233, 6, 40, 3, 5, 8, 57, 63, 5, 8 ; 6720). Popescu Mircea (E : 2233, 6, 40, 3, 5, 8, 57, 63, 5, 8, 720). S.m. cl. X. Marin A. Marin (6672, 5, 83, 98, 710, 1 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 35).

DUMBRĂVENI (Oltenia). *Sc. 8 ani* cl. VIII. Popescu Sofia (E : 2235, 6, 40, 5, 7, 61, 3 ; 6670, 3, 6).

DUMBRĂVENI (Braşov). *S.m.* cl. IX. Teodorescu Marilena (6670, 3, 4, 6, 80, 2, 3, 720 ; E : 2236, 45, 61, 3).

DUMITREŞTI (Ploieşti). *S.m.* cl. IX. Jalea Nicolae (E : 2261, 3 ; 6670, 6, 77, 80, 2, 715, 6, 20—2, 35).

FĂGĂRAŞ. *S.m. 1* cl. IX. Savin Gh. (E : 2263, 77 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 715, 6, 20, 2, 35).

FĂGET. *S.m.* cl. IX. *Sava Petru* (6631, 4, 9, 41—4, 6, 7, 9, 59, 61—3, 6, 7, 70—8, 5, 9, 92—5, 8, 700, 1, 7, 10, 1, 5, 6, 20, 2—5, 31, 2, 5, 6, 48). Cl. XI. Petrescu Marius (6228, 30, 8, 40—2, 4, 50, 66—71, 3—8, 80, 3, 4, 703, 9—11, 3, 5, 20, 2, 4, 32, 5, 42, 5).

FĂLTICENI. *S.m. 1* cl. VIII. Asaftei T. (E : 2233, 40, 3, 5, 8, 57, 63, 8, 74, 7—80 ; 6720, 2). Particular Gorovei A. Sorin (E : 2225, 6, 32—6, 8, 9, 42—4, 6, 7 ; 6582, 5, 7, 8, 615, 28, 40, 8).

FELDRU NĂSĂUD. *Ss. 8 ani* cl. VIII. Marinescu Oltea (E : 2236, 44, 8, 57, 63, 5, 6, 8, 80).

FETEŞTI GARA. *S.m.* cl. XI. Dache Constantin (6631, 4, 7, 40, 4, 6, 63, 9—77, 80, 1, 4, 5, 93, 710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 31, 2, 5, 6, 45, 8).

FILIAŞI. *S.m.* cl. IX. Băluţă C. (6636, 9, 46, 70, 1, 3, 4, 6, 7 ; E : 2234, 6, 7, 45).

FOCŞANI. *Sc. 8 ani nr. 3* cl. VIII Băloiu Gabriel (E : 2236, 43, 8, 50, 61, 3, 5, 8, 720, 2, 76 ; 6720, 2, 76). *S.m.1* cl. IX. Balica E. (E : 2261, 3 ; 6670, 1, 3, 6, 7, 80, 2, 715,

1965 OKT 19.

6, 20), Ionescu Mariana (E: 2236, 61, 3; 6670, 1, 3, 4, 7, 80, 715, 6, 20, 2). *S.m. Unirea* cl. XI. Alexandrescu Rodica (6631, 4, 66, 70—8, 711, 5, 20), Avramescu Cornelia (6666, 70, 1, 3—6, 80, 706, 10, 1, 5, 6, 20, 48).

FRASIN (Suceava). *Sc. 8 ani* cl. VIII. Geamănar Zinca (E: 2210—3, 5—22, 3, 6, 8, 9, 32, 48, 50, 2, 4—6, 61, 3), Pînzaru Cornelia (E: 2248, 55, 61, 5, 8, 70, 5, 8).

GALAŢI. Absolventă Suciu Aurelia (6666—75), 7, 80, 703, 7, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 6). *Şc. 8 ani nr. 7* cl. VI. Ioruan Magdalena (E: 2235, 8, 40, 3, 8, 52, 65, 8), Mîrgescu Doina (E: 2247—9, 54, 65, 6, 8, 80). Cl. VII. Biter Viorel (E: 2233, 4, 8, 43, 7, 8, 57, 8, 68), Pavel Cristian (E: 2233, 8, 47, 50, 8, 65, 8). *Sc. 8 ani nr. 14* cl. VII. Floarea Gabriela (E: 2232, 5, 43, 8, 50, 2, 4, 80). *Sc. 8 ani nr. 19* cl. VIII. Sosea Florin (E: 2250, 4, 7—9; 6670, 3,6).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 35—40 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut anunţul sau soluţia problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate şi citeţ semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunţaţi în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puţin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat şi să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaţilor şi de aceea rugăm colaboratorii noştri să se aboneze de îndată. Preţul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicaţie şi altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poştale locale.

I. P. „Informaţia" — c. 2331

INDEX 41601

Lei 2

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS INTÉZET

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

70 DE ANI DE APARIȚIE NEÎNTRERUPTĂ

A „GAZETEI MATEMATICE"

Anul XVI (II) — septembrie 1965

9

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
Anul XVI (II), nr. 9 — septembrie 1965

SUMARUL

		Pag.
1.	La a 70-a aniversare a „Gazetei matematice" de Acad. Ştefan Bălan, ministrului învăţământului	385
2.	Gazeta Matematică — la 70 ani	387
3.	Relaţii geometrice exprimate prin numere complexe de O. Sacter	391
4.	Aspecte ale olimpiadei matematice 1965, de conf. univ. T. Roman	394
5.	Note matematice de D. Voiculescu şi E. Popa	397
6.	Caleidoscop matematic, de L. Ţene	400
7.	Probleme rezolvate (6555, 6558, 6559, 6618, 6820, 6621, 6649, 6662, 6663, 6679, 6692, 6694, 6703, 6707, E: 2228, 2230)	402
8.	Chestiuni de examen (7119—7125)	413
9.	Probleme propuse (7126—7166)	414
10.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2367—2380)	420
11.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	422

ANUL XVI, 9 SEPTEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

MATEMATIKAI KÖNYVTÁR
1963

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XVI (II), nr. 9 septembrie 1965

LA A 70-a ANIVERSARE A „GAZETEI MATEMATICE"

Acad. *ȘTEFAN BĂLAN, Ministrul Învățământului*

Împlinirea a 70 de ani de apariție neîntreruptă a „Gazetei Matematice" reprezintă, în istoria științei românești, un eveniment însemnat. Ministerul Învățământului exprimă, cu acest prilej, marea sa prețuire față de activitatea îndelungată și valoroasă a revistei.

„Gazeta Matematică" a constituit un mijloc important de răspîndire a cunoștințelor matematice. În paginile revistei au fost încurajate numeroase încercări, au fost stimulate multe talente, au apărut articole de valoare. Dezvoltarea științei matematicilor la noi în țară se poate urmări în bună parte, în paginile acestei publicații, care a stat 70 de ani în atenția atît a oamenilor de știință, cît și a începătorilor în acest domeniu.

Partidul și statul nostru socialist acordă un deosebit interes dezvoltării științei. Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român a elaborat un amplu sistem de măsuri pentru înflorirea științei în patria noastră, pentru întărirea bazei materiale a cercetării științifice. Matematicile, ca și celelalte științe, vor avea noi și largi posibilități de dezvoltare.

În etapa actuală, „Gazetei Matematice" îi revin importante sarcini pentru propășirea matematicilor. Este necesar ca Societatea de științe matematice să continue și să dezvolte tradițiile progresiste ale vechii „Gazete Matematice", să intensifice activitatea de documentare privind noile rezultate în domeniul matematicilor pe plan mondial, să încurajeze

tinerii din școli care dovedesc aptitudini. Oamenii de știință, profesorii cu activitate remarcabilă în învățămînt, au posibilitatea să participe tot mai activ, prin studii și probleme, la progresul acestei științe. Cu toții sînt chemați să desfășoare o activitate tot mai rodnică în aprofundarea cunoștințelor de matematici, în aplicarea metodelor matematice în economie și pentru nevoile altor științe, în cunoașterea marilor posibilități ale matematicilor moderne. Problemele de metodică vor trebui să ocupe un loc important în paginile „Gazetei Matematice", pentru a sprijini tot mai mult activitatea profesorilor de specialitate. Socotim, de asemenea, foarte util ca revista să-și intensifice munca în rîndurile elevilor spre a le dezvolta dragostea și interesul pentru matematici, pasiunea pentru munca științifică. Atragerea unui număr tot mai mare de elevi în rezolvarea problemelor publicate în „Gazetă", precum și la olimpiadele de matematici, va demonstra eficiența activității revistei, contribuția ei la formarea viitorilor matematicieni.

Pe drumul indicat de partid în dezvoltarea științei în România Socialistă, sîntem încredințați că Societatea de științe matematice își va lărgi necontenit sfera de activitate, își va spori eforturile pentru sprijinirea învățămîntului și pentru dezvoltarea cercetării științifice.

Ministerul Învățămîntului va acorda și în viitor concursul său Societății de științe matematice și „Gazetei matematice", pentru îndeplinirea importantelor lor sarcini.

Urăm activiștilor ei, tuturor celor ce muncesc în domeniul matematicii, tineretului care studiază cu rîvnă matematicile, noi succese în cercetarea științifică, în răspîndirea și însușirea cunoștințelor matematice, puse în slujba țelurilor majore ale dezvoltării patriei noastre pe culmile luminoase ale socialismului.

Dorim „Gazetei matematice" mulți ani de existență, spor la muncă și rod bogat în activitatea sa.

GAZETA MATEMATICĂ — LA 70 ANI

Gazeta matematică a fost înfiinţată din iniţiativa unui grup de ingineri inimoşi care lucrau la construcţia liniei ferate Feteşti—Cernavodă şi care au fost nemulţumiţi de rezultatele destul de slabe ale absolvenţilor liceului, la intrarea în 1894 în Şcoala de poduri şi şosele (actualul Institut politehnic din Bucureşti). Iată numele iniţiatorilor : Ion Zottu, Vasile Cristescu, Victor Balaban, Mihail Rocco şi Ion Ionescu. Necesitatea unei asemenea iniţiative a rezultat din faptul că guvernele din acea vreme s-au ocupat prea puţin de dezvoltarea şcolii secundare din ţara noastră. Era lipsă de profesori calificaţi, programele erau insuficient coordonate şi instabile, iar politicianismul, interesele electorale şi bunul plac al prefecţilor îl împiedicau pe profesor să-şi facă datoria.

Primul număr al Gazetei matematice a apărut la 15 septembrie 1895. Încă din acest an comitetul s-a întărit prin intrarea unui număr mai mare de profesori şi ingineri, în frunte cu matematicianul Gh. Ţiţeica Condusă de un comitet avînd în frunte cei patru „stîlpi" : *Ion Ionescu Gh. Ţiţeica, A. Ioachimescu* şi *V. Cristescu*, Gazeta matematică a apărut în continuare.

Scopurile principale ale Gazetei au fost dezvoltarea gustului pentru studiul matematicii şi îndrumării spre cercetări originale în special în rîndurile elevilor de liceu. S-au cultivat problemele şi exerciţiile de matematici elementare. În fiecare număr al Gazetei apăreau, pe lîngă probleme propuse şi rezolvate, articole precum şi note originale, multe privind istoria matematicii româneşti. Unele probleme au fost reluate pentru a face comentarii asupra lor, generalizări ş. a. În felul acesta s-a stabilit legături între colaboratori. Gazeta matematică a devenit o adevărată şcoală care s-a bucurat de un mare prestigiu, reuşind să grupeze în jurul ei un număr mare dintre cei mai buni ingineri şi profesori. Pentru elevi era un titlu de mîndrie bine meritat acela de a fi corespondent al Gazetei matematice. Printre aceşti colaboratori se găsesc nume care au ilustrat mai tîrziu ştiinţa şi tehnica românească, sînt azi matematicieni iluştri, ingineri de frunte ai ţării şi oameni de ştiinţă în diferite domenii. Unii dintre foştii corespondenţi, după terminarea studiilor superioare, au intrat în redacţie, unde au lucrat cu entuziasm şi abnegaţie.

Între anii 1934—1949 a apărut Suplimentul Gazetei matematice, cu exerciţii şi probleme din programa liceului, şi care a căpătat o mai largă răspîndire printre elevii care nu puteau citi Gazeta. Aceasta se difuza doar în cîteva sute de exemplare.

Reforma învăţămîntului din 1948 a pus învăţămîntul din ţara noastră pe baze noi. Societatea de matematică şi fizică (S.S.M.F.), înfiinţată în 1949, prin reunirea activului Societăţii Gazeta matematică şi al Societăţii române de ştiinţe — secţiile matematică şi fizică, şi-a asumat printre altele sarcina de a ridica nivelul cunoştinţelor de specialitate ale membrilor săi, de a stimula cercetarea lor ştiinţifică, de a dezvolta în rîndurile tineretului interesul pentru aceste ştiinţe şi de a contribui la îmbunătăţirea muncii metodico-didactice a profesorilor, avînd

sprijinul larg și multilateral al Ministerului Învățământului, colaborarea a mii de cadre didactice.

Pentru activitatea în rîndurile tineretului, se puteau valorifica tradițiile pozitive ale Gazetei. Pentru a face față însă sarcinilor complexe pe care și le-a asumat, S.S.M.F. a hotărît să editeze două reviste lunare : Gazeta matematică și fizică și Revista matematică și fizică, denumite din mai 1954 Gazeta matematică și fizică seria A respectiv seria B, iar în ianuarie 1964 Gazeta matematică seria A și B.

Gazeta matematică seria A se adresează în primul rînd profesorilor din învățămîntul mediu. În cei 16 ani de existență această revistă a înregistrat succese. Prin articolele de informare științifică, ea dă cititorilor posibilitatea să se inițieze în unele ramuri noi ale matematicii și să reconsidere din punct de vedere modern unele discipline clasice, iar prin note scurte ea a sprijinit cercetarea matematică. Printre articole, un rol important îl au cele cu caracter ideologic, prin care se dezbat de pe pozițiile materialismului dialectic probleme filozofice ale matematicii, precum și probleme de istoria matematicii. Un loc deosebit de mare se acordă în această revistă problemelor de metodica predării matematicii. La rubrica Învățămînt se abordează cele mai variate probleme ale predării matematicii, în special în școala medie. În primii ani s-a dus o luptă împotriva superficialității și împotriva formalismului în predarea matematicii, s-au făcut încercări de a apropia matematica elementară de practică, de tehnică. În decursul anilor, Gazeta matematică seria A a oferit profesorilor de matematică din învățămîntul mediu posibilitatea de a publica articole despre munca lor în clasă, înlesnind astfel un larg schimb de experiență. În ultimii ani, de cînd modernizarea învățămîntului matematic se pune cu multă acuitate în Gazeta matematică seria A, au fost publicate numeroase articole în care se dezbate această problemă, documente ale mai multor congrese internaționale ca și informări despre realizările din alte țări. Gazeta matematică seria A a sprijinit direct învățămîntul prin publicarea unor materiale de analiză a manualelor pentru învățămîntul mediu și prin alte acțiuni.

O atenție deosebită acordă Gazeta matematică atît seria A cît și seria B, istoriei matematicii românești și universale. S-au publicat numeroase studii despre succesele obținute de cercetarea matematică în țara noastră, despre viața și opera unor matematicieni români din trecut și din prezent. Prin aceste articole ca și prin cele despre sarcinile școlii în lumina documentelor de partid și de stat, despre izbînzile istorice ale poporului, cele două Gazete contribuie la educația politică și patriotică a cititorilor.

Dacă Gazeta matematică seria A contribuie la ridicarea nivelului învățămîntului prin acțiunea sa asupra profesorilor, seria B se adresează mai ales elevilor. Continuînd buna tradiție a vechei Gazete, Gazeta matematică seria B acordă un loc foarte important problemelor de matematică elementară. Ea se bucură de o foarte largă răspîndire în rîndurile elevilor din școlile generale și licee. Această revistă a reușit să antreneze în munca de rezolvare a problemelor mii de elevi din tot cuprinsul țării. La redacție se primesc zeci de mii de soluții ale problemelor propuse — rubrica cu numele rezolvitorilor ocupă un sfert din paginile revistei.

Prin publicarea unor note scurte, se stimulează inițiativa și gîndirea independentă a colaboratorilor. Se publică articole menite să inițieze cititorii în unele probleme ale matematicii moderne sau care nu fac parte din programa școlară, dar și materiale care adîncesc pregătirea elevilor la matematica elementară.

Numărul mare de exemplare în care se difuzează aceste periodice lunare dovedesc continua creștere a interesului publicului și în primul rînd al oamenilor școlii pentru studiul matematicii, pentru ridicarea nivelului învățămîntului. Tirajul seriei B se ridică pînă la 34 000 exemplare, revista dovedindu-se utilă în pregătirea elevilor în vederea obținerii unor rezultate cît mai bune în activitatea la clasă, precum și la olimpiade, examene de admitere în învățămîntul superior sau mediu. Continuînd tradiția progresistă a concursurilor Gazetei matematice, Societatea de științe matematice organizează, cu sprijinul larg al Ministerului Învățămîntului și al secțiilor de învățămînt, olimpiade la care participă anual zeci de mii de elevi ai liceelor, școlilor pedagogice profesionale, tehnice de maiștri.

Dezvoltînd însă acest gen de activitate din inițiativa S.S.M.F., se organizează din 1957 concursuri anuale de matematică și mecanică pentru studenții de la Universități, Institute politehnice și Institute pedagogice, în colaborare cu U.A.S.R. Tot din inițiativa S.S.M. s-a trecut la organizarea olimpiadelor internaționale de matematică pentru elevi. Primele două au avut loc în 1959 și 1960 în țara noastră, pentru ca să continue în anii următori în R.P. Ungară, R.S. Cehoslovacă, R.P. Polonă, U.R.S.S., R.D.G., participanții români obținînd rezultate bune de fiecare dată.

Dezvoltînd tradiția editării de cărți de informare științifică, de documentare metodică-didactică și de culegeri de probleme, în Biblioteca Societății de științe matematice au apărut în ultimii zece ani 70 volume care s-au bucurat de aprecierea publicului. Avînd sprijinul statului democrat popular, S.S.M. a putut lărgi sfera preocupărilor sale : a organizat 16 filiale regionale și 40 subfiliale, care asigură ținerea anuală de peste 100 de conferințe de specialitate pentru membrii lor, sprijină cercurile de elevi din școli și conduc cercurile de elevi pe oraș. În ultimii ani, S.S.M. a organizat 8 cursuri de vară pentru profesori, la care au făcut expuneri numeroși matematicieni de valoare ; în cele 17 consfătuiri interregionale și 21 consfătuiri pe țară, mii de profesori au dezbătut probleme actuale ale învățămîntului matematicii, au făcut schimb de păreri și experiență, au făcut recomandări utile Ministerului.

S.S.M. acordă importanță sprijinirii muncii științifice participînd la organizarea unor reuniuni de specialitate, în colaborare cu Academia R.S. Romînia și alte instituții, editînd revistele Bulletin Mathématique și Mathematica ce se difuzează în țară și peste hotare, avînd schimb cu peste 400 publicații din toată lumea.

Directivele Congresului al IX-lea al Partidului mobilizînd întreg poporul spre noi acțiuni puse în slujba ridicării nivelului de trai cultural și material al poporului, dau indicații prețioase și cu privire la direcțiile în care activitatea matematicienilor actuali și viitori este cea mai utilă.

În această muncă, se angajează cu elan și hotărîre Societatea de științe matematice, continuatoare a activităților tradiționale ale Societății Gazeta Matematică și secției de matematică a Societății române

de ştiinţe. Avînd asigurat tot concursul şi sprijinul Ministerului Învăţămîntului, S.S.M. îşi lărgeşte continuu sfera de activitate, multiplică eforturile depuse în sprijinirea învăţămîntului de toate nivelele şi în special în direcţia modernizării sale şi înfiinţării claselor speciale; găseşte variate mijloace de a populariza rezultatele obţinute de matematicieni români şi străini, de a lărgi colaborarea şi cunoaşterea lor reciprocă; atrage largi pături ale tineretului spre profesiunea de matematician, spre o pregătire matematică înaltă necesară pentru numeroase alte profesiuni; contribuie la sporirea aportului matematicii în dezvoltarea economiei socialiste, prin rezolvarea problemelor puse de tehnică, de alte ştiinţe, prin studierea bazelor automatizării, a ciberneticii, a economiei matematice.

Munca în mai toate sectoarele S.S.M. trebuie mereu îmbunătăţită. Astfel, este necesar ca munca colectivă a comitetelor de redacţie ale publicaţiilor periodice să fie întărită, iar apariţia lor asigurată la timp; G.M.-A urmează să asigure o mai mare accesibilitate a articolelor de informare ştiinţifică iar în articolele de învăţămînt să se trateze problemele cele mai actuale ale predării matematicii, astfel încît revista să fie mai larg răspîndită în rîndul profesorilor; G.M.-B trebuie să acorde un spaţiu mai mare problemelor matematicii actuale, să antreneze un cerc mai larg de colaboratori din rîndurile profesorilor şi elevilor. Se va urmări ridicarea nivelului consfătuirilor şi mărirea eficienţei lor, printr-o mai bună difuzare a materialelor în masa profesorilor şi prin stăruinţa ca Ministerul Învăţămîntului să acorde mai multă atenţie opiniilor exprimate în referate şi la discuţii. Cursurile de vară pot fi îmbunătăţite printr-o mai bună alegere a temelor conferinţelor, mai multă grijă pentru accesibilitatea lor şi o mai largă participare a profesorilor liceelor. Filialele şi subfilialele Societăţii au sarcina de a lărgi sfera lor de activitate, cuprinzînd noi membri, organizînd cercuri perseverente de studii, conferinţe interesante şi cercuri active ale elevilor pe oraş.

La a 70-a aniversare a Gazetei matematice, conducerea Societăţii de ştiinţe matematice urează „La mulţi ani" tuturor activiştilor ei, tuturor matematicienilor ca şi tineretului ce se pregăteşte cu sîrg, fiind convinsă că vor obţine noi succese în munca de creaţie, de răspîndire şi însuşire a ştiinţei puse în slujba propăşirii patriei, a înfloririi României socialiste, sub conducerea înţeleaptă şi clarvăzătoare a Partidului Comunist Român.

Biroul Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România

RELAȚII GEOMETRICE EXPRIMATE PRIN NUMERE COMPLEXE

de *O. SACTER*

Se știe că oricărui punct M din planul a două axe rectangulare Ox, Oy, îi corespund coordonatele x, y, iar acestei perechi de numere i se poate ataşa numărul complex $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$). Punctul M este imaginea numărului complex z, iar z este afixul punctului M. În cele ce urmează vom nota cu $\bar{z}$ numărul complex conjugat lui $z = x + iy$, deci $\bar{z} = x - iy$. Prin $\mathcal{R}ez$ se va nota partea reală a numărului complex z, iar prin $\mathcal{I}z$ coeficientul lui i din expresia $z = x + iy$. Astfel că avem (fig. 1) :

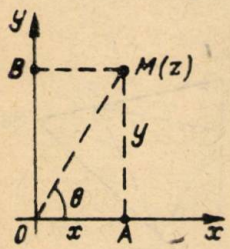


Fig. 1

$$\mathcal{R}ez = \mathrm{pr}_{0x}\overline{OM} = OA = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ şi}$$

$$\mathcal{I}z = \mathrm{pr}_{0y}\overline{OM} = OB = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Reamintim că modulul numărului complex este $\rho = \mathrm{mod}\, z = |z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{z\bar{z}}$ şi argumentul este unghiul θ format de $\overline{OM}$ cu direcția pozitivă a axei Ox, astfel că avem :

$$\arg z = \theta = \sphericalangle(Ox, \overline{OM}) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

şi $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{OM} = \mathcal{I}z : |z|$ iar $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{OM} = \mathcal{R}ez : |z|$.

Ne propunem să exprimăm anumite relații geometrice ale unor configurații de puncte M_k de afix $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Stabilim în prealabil care este *afixul punctului M care împarte segmentul M_1M_2 într-un raport dat* λ.

Presupunînd $\dfrac{MM_1}{MM_2} = \lambda$ avem $x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$ şi $y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$, de unde rezultă afixul Z al lui M egal cu

$$Z = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + i\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}.$$

Mijlocul segmentului M_1M_2 are deci afixul $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ are afixul

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Aplicație. Fiind dat un triunghi $M_1M_2M_3$ și punctele A_1, A_2, A_3 (fig. 2) *așezate respectiv pe laturile M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 astfel ca să avem*

$$\frac{M_2A_1}{A_1M_3} = \frac{M_3A_2}{A_2M_1} = \frac{M_1A_3}{A_3M_2} \tag{1}$$

să demonstrăm că triunghiul $A_1A_2A_3$ are același centru de greutate cu triunghiul $M_1M_2M_3$.

Notînd cu λ valoarea comună a rapoartelor (1), rezultă că afixele punctelor A_i sînt :

$$A_1\left(\frac{z_2 - \lambda z_3}{1-\lambda}\right), \quad A_2\left(\frac{z_3 - \lambda z_1}{1-\lambda}\right), \quad A_3\left(\frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}\right),$$

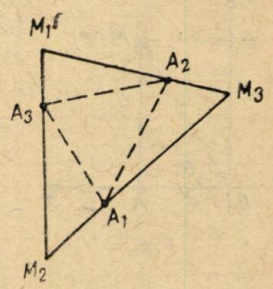


Fig. 2

iar afixul centrului de greutate a triunghiului $A_1A_2A_3$ egal cu

$$\frac{1}{3}\left(\frac{z_2 - \lambda z_3}{1-\lambda} + \frac{z_3 - \lambda z_1}{1-\lambda} + \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3 - \lambda(z_1 + z_2 + z_3)}{1-\lambda} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3},$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

Distanța a două puncte M_1, M_2 este dată de relația $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.

Într-adevăr, din formula cunoscută

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

rezultă

$$M_1M_2 = \sqrt{[(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)]\,[(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)]} =$$

$$= \sqrt{[(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)]\,[(x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)]} = \sqrt{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}.$$

Ținînd seama că $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = \overline{z_1 - z_2}$, rezultă

$$M_1M_2 = \sqrt{(z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)}} = |z_1 - z_2|.$$

Aplicație. Să demonstrăm că segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi echilateral $M_1M_2M_3$ cu un punct oarecare din planul triunghiului, pot fi laturile unui triunghi.

Considerăm punctul oarecare O situat în planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3$ și două axe rectangulare cu intersecția în O, iar z_1, z_2, z_3 afixele punctelor M_1, M_2, M_3 raportate la aceste axe.

Ținînd seama de identitatea

$$z_1(z_2 - z_3) + z_2(z_3 - z_1) + z_3(z_1 - z_2) = 0$$

sau

$$z_1(z_2 - z_3) + z_2(z_3 - z_1) = z_3(z_2 - z_1),$$

căreia îi aplicăm proprietatea $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, obținem

$$|z_3(z_2 - z_1)| \leqslant |z_1(z_2 - z_3)| + |z_2(z_3 - z_1)|.$$

Împărțind ambii membri cu $|z_2 - z_1| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ (pentru că triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral: $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1$), deducem

$$|z_3| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Folosind în același mod identitatea de mai sus, trecînd în membrul drept termenul $z_2(z_1 - z_3)$ și apoi $z_1(z_3 - z_2)$ obținem pe rînd și inegalitățile:

$$|z_2| \leqslant |z_1| + |z_3| \quad \text{și} \quad |z_1| \leqslant |z_2| + |z_3|,$$

ceea ce demonstrează că segmentele OM_3, OM_2, OM_1, formează laturile unui triunghi.

Unghiul u al vectorilor $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ *este dat de relația*:

$$\sphericalangle(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

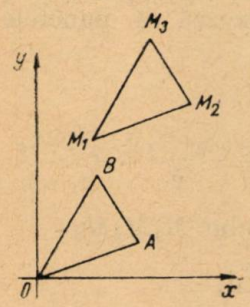


Fig. 3

Pentru a stabili aceasta, luăm vectorii $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ (fig. 3) egali respectiv cu $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. În acest caz rezultă că afixele punctelor A, B sînt respectiv $z_2 - z_1$ și $z_3 - z_1$ și avem

$$u = \sphericalangle(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = \sphericalangle(\overline{OA}, \overline{OB}) =$$

$$= \sphericalangle xOB - \sphericalangle xOA = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) =$$

$$= \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ ceea ce trebuia arătat.}$$

Aplicație. Condiția necesară și suficientă pentru ca patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 *să fie situate pe un același cerc este*

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = (\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \bar{z}_4)$$

unde am notat $(abcd)$ raportul anarmonic al numerelor a, b, c, d.

Într-adevăr, pentru ca M_1, M_2, M_3, M_4 (fig. 4) să fie situate pe un același cerc, trebuie să avem:

$$\sphericalangle(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_4}) + \sphericalangle(\overline{M_3M_4}, \overline{M_3M_2}) = 180°$$

sau

$$\arg\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} + \arg\frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = 180°,$$

de unde rezultă

$$\arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = 180°,$$

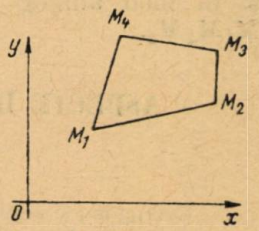


Fig. 4

ceea ce echivalează cu a spune că raportul anarmonic $(z_1z_2z_3z_4)$ este un număr real sau că $\mathcal{I}(z_1z_2z_3z_4) = \frac{(z_1z_2z_3z_4) - \overline{(z_1z_2z_3z_4)}}{2i} = 0$ și prin urmare $(z_1z_2z_3z_4) = \overline{(z_1z_2z_3z_4)}$ sau $(z_1z_2z_3z_4) = (\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}_4)$, ceea ce trebuia arătat.

Reciproc, dacă avem $(z_1z_2z_3z_4) = (\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}_4)$, rezultă $\arg(z_1z_2z_3z_4) = k\pi$ sau

$$\arg\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \arg\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} + k\pi. \tag{2}$$

Ţinînd seama că $\arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \sphericalangle(\overline{M_2M_3},\ \overline{M_1M_3}) + 2n_1\pi$ şi că

$\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \sphericalangle(\overline{M_2M_4},\ \overline{M_1M_4}) + 2n_2\pi$, egalitatea (2) devine :

$$\sphericalangle(\overline{M_1M_3},\ \overline{M_2M_3}) = \sphericalangle(\overline{M_1M_4},\ \overline{M_2M_4}) + k\pi.$$

Se constată astfel că din M_3, M_4 se vede segmentul M_1M_2 sub un acelaşi unghi, sau că suma unghiurilor sub care se vede segmentul M_1M_2 din punctele M_3, M_4 este egală cu π, ceea ce demonstrează că punctele M_1, M_2, M_3, M_4 se află aşezate pe un acelaşi cerc.

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este dată de formulele :

$$A = \pm\frac{|z_1 - z_2|^2}{2}\cdot\mathcal{I}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \pm\frac{|z_2 - z_3|^2}{2}\cdot\mathcal{I}\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \pm\frac{|z_3 - z_1|^2}{2}\cdot\mathcal{I}\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Din relaţia cunoscută care dă aria A a triunghiului $M_1M_2M_3$:

$$A = \frac{M_1M_2 \cdot M_1M_3 \sin(\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3})}{2},$$

unde substituim $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$, $M_1M_3 = |z_1 - z_3|$, $\sin(\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}) =$

$$= \sin\left(\arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \left(\mathcal{I}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) : \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3|}\cdot\mathcal{I}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

obţinem

$$A = \pm\frac{|z_1 - z_2|^2}{2}\mathcal{I}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

şi în mod analog deducem celelalte expresii pentru aria triunghiului $M_1M_2M_3$.

ASPECTE DE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1965

de Conf. univ. *TIBERIU ROMAN*

Continuînd şi dezvoltînd tradiţia concursurilor de matematică — începută încă în 1902, cu concursul pentru rezolvitori organizat de „Gazeta matematică" — Societatea de ştiinţe matematice a organizat şi în acest an o asemenea întrecere tovărăşească între elevii şcolilor medii, profesionale, pedagogice, tehnice de maiştri. În acest an sprijinul Ministerului Învăţămîntului, al secţiilor de învăţămînt a fost deosebit de intens, ceea ce trebuie subliniat de la început.

Aspecte organizatorice

La începutul anului şcolar au existat oscilaţii cu privire la forma organizatorică a olimpiadelor, emiţîndu-se părerea de a se organiza o etapă suplimentară : pe şcoală. În cele din urmă a precumpănit părerea că o asemenea etapă, chiar dacă implică o participare mai masivă a

elevilor, nu permite nici o întrecere esențial deosebită de lucrarea scrisă trimestrială (și ar avea loc imediat după închiderea trimestrului I, după ce elevii au dat multe lucrări scrise), și nici o confruntare personală cu elevii altor școli din localitate. Pe de altă parte aceasta ar fi făcut ca participarea la etapa a doua — pe localitate sau pe raion. să fie mai slabă, interesul multora pentru olimpiade scăzînd mai devreme.

În urma instrucțiunilor definitive s-au format în întreaga țară 16 comisii regionale, o comisie a orașului București și peste 320 de comisii locale. Comisiile regionale au trimis indicații comisiilor locale cu privire la activitatea pe care urmează să o desfășoare, în special din punct de vedere organizatoric și de popularizare.

În ședința lărgită a Biroului SSM din 22 noiembrie 1964 s-au hotărît unele măsuri cu privire la etapa locală și în particular faptul că subiectele vor fi fixate de comisii formate în filialele București, Iași, Cluj și Timișoara, pe baza propunerilor regiunilor vecine. Totodată s-a stabilit că fiecare filială trebuie să asigure probleme pentru anumite clase necesare comisiei centrale la definitivarea subiectelor etapelor regională și finală.

Ținînd seama de prevederile regulamentului școlilor de cultură generală, Ministerul Învățămîntului a hotărît ca etapa locală a olimpiadei de literatură romînă, a olimpiadei de matematică și a olimpiadei și fizică și chimie să aibă loc în aceeași zi, 7 februarie, pentru a se asigura că nici un elev nu participă la mai multe acțiuni de acest fel. Pe de altă parte, școlile medii nu au avut în acest an școlar decît trei clase, cl. VIII-a aparținînd școlii generale și neparticipînd la olimpiade. Toate acestea au făcut ca participarea elevilor la etapa locală să fie mai redusă decît în anii precedenți și anume 18 970, din 665 de școli situate în 305 centre. Scăzînd numărul de 9 370 elevi ai clasei a VIII-a, participanți în anul 1964 la olimpiadă, din numărul total de 32 571 participanți, rezultă că organizarea simultană, a micșorat cu cca. 2 300 numărul participanților din acest an. Scăderea numărului de participanți nu este uniformă pe regiuni : cea mai mare scădere s-a înregistrat, în regiunile Galați, Dobrogea, Iași, Bacău, Banat, unde procentul participanților este, în ordinea între 33 % și 50 % față de anul trecut, procentul mediu pe țară fiind de aproape 60 %. A scăzut într-o oarecare măsură numărul școlilor participante, în special în regiunile : Bacău, și Galați ; a crescut numărul școlilor participante în regiunile Brașov, oraș București, reg. Cluj, Dobrogea, Crișana, Suceava.

Subiectele pentru etapa locală au fost trimise de cele 4 filiale secțiilor de învățămînt raionale și orășenești. În toată țara, sute de directori de școli medii și profesionale, mii de profesori de matematică au asigurat buna desfășurare a acestei etape, corectarea lucrărilor, au înaintat comisiilor regionale rezultatele, propunerile de participare la etapa următoare. Cu atît mai regretabilă este comportarea unor comisii locale ca cele din : Cisnădie, Tîlmamaci, Avrig, Sălișle, Rupea, Baraolt, (reg. Brașov), Belcești, Strehaia, Calafat (reg. Oltenia), Hațeg, Ilia, Certej, Zlatna, Cugir, (reg. Hunedoara), Negru Vodă, (reg. Dobrogea), care au trimis cu întîrziere aceste documente sau nu le-au trimis deloc. Trebuiesc subliniate și asemenea lipsuri ca : filiala București a Societății nu a trimis subiecte pentru comisiile din raionul Medgidia, în raioanele Mefudia, în raionale Pătîrlagele și Pașcani subiectele n-au parvenit la timp de vina poștei sau a secției de învățămînt.

Etapa regională, fixată inițial la 22—24 martie, s-a desfășurat, conform dispozițiilor Ministerului, în zilrle de 4—5 aprilie. Numărul participanților la această etapă a fost de 2446, ceea ce reprezintă un procent mai mare din participanții la etapa regională de anul trecut decît la etapa locală. Au fost reprezentate astfel 463 școli din 255 centre. Amînarea datei etapei regionale și ținerea acesteia în ultimele zile ale vacanței a făcut ca numărul absenților să fie destul de important în unele regiuni : 26 % în reg. Brașov, 16 % reg. Bacău, 15 % în or. București, 13 % în reg. Mureș-Aut. Maghiară, 12 % în reg. București 10 % în reg. Ploiești.

Etapa finală a avut loc în zilele de 9 și 10 mai la București. Au participat 181 de elevi, într-un procent mai mare din participanții de anul trecut, decît la etapele locală și regională. Au fost reprezentate astfel 109 școli situate în 61 de centre din toate regiunile.

Subiectele olimpiadei și pregătirea elevilor

Comisiile regionale apreciază bună măsura de a se organiza în mod simultan etapa locală la toate olimpiadele pentru că elevii sînt determinați astfel să-și concentreze atenția asupra unui obiect, în activitatea desfășurată, evitîndu-se supraîncărcarea și suprasolicitarea. Există însă și observații cu privire la faptul că, în unele școli, elevii nu au fost îndrumați de la începutul anului în acest sens așa încît înscrierile de participare la olimpiadă au întîmpinat unele greutăți, au fost elevi care s-au înscris ținînd seama de puncte de vedere nesemnificative, s-au prezentat astfel în mod nesatisfăcător.

Majoritatea comisiilor regionale apreciază că este necesar ca să se asigure la toate clasele, și în special la prima clasă de olimpiadă, un nivel cît mai accesibil al tuturor problemelor date la etapa locală, astfel încît fiecare elev participant să poată începe rezolvarea unor probleme.

Se consideră, şi pe drept cuvînt, că rolul stimulator pe care olimpiadele îl au în perioada de pregătire trebuie continuat prin rezultatele pe care le obţin elevii fruntaşi dar şi prin nedemobilizarea celorlalţi; fiecare elev trebuie să aibă satisfacţia de a fi putut aborda problemele şi nu dezamăgirea de a da lucrări albe. Este necesar ca comisia centrală să asigure în viitor subiecte adecuate, unice de la etapa locală. Evident că, totodată, este necesar ca în munca la clasă şi în afara ei să se acorde atenţia cuvenită pregătirii elevilor fruntaşi, acomodării cu felul problemelor pentru olimpiadă, rezolvării problemelor date în anii precedenţi şi care se publică în Gazeta matematică, seria B. Redacţia revistei nu se poate mulţumi cu publicarea enunţului şi a unor rezolvări sporadice; este necesar ca problemelor de olimpiadă să li se acorde o atenţie mai susţinută, publicînd rezolvări variate, cu observaţii asupra metodelor folosite de elevi şi grupîndu-le astfel, ca, într-un număr al revistei să se găsească toate cele corespunzătoare unei etape a olimpiadei, în perioada de pregătire a olimpiadei următoare.

Problemele date în acest an s-au publicat în numerele 5—8 ale G.M.—B.

Din observaţiile comisiilor locale şi regionale asupra acestor probleme se desprind următoarele :

La *etapa locală* se relevă în mod unanim că problemele clasei a IX-a au cerut calcule laborioase sau prea multe, faţă de nivelul de pregătire a elevilor şi de caracterul etapei. Anumite observaţii simple ar fi uşurat rezolvarea problemelor de algebră, dar puţini le-au făcut, majoritatea lucrînd pe căile cele mai directe care au facilitat numeroase greşeli. Se apreciază că problemele de geometrie analitică date de filialele Bucureşti şi Iaşi au cerut de asemenea prea multe calcule şi mai puţin aplicarea în mod creator a unui raţionament.

Subiectele de geometrie pentru clasele a IX-a şi a X-a (date de filiale Timişoara) şi de analiză (date de filiala Bucureşti) sînt apreciate dificile şi în parte necorespunzătoare acestui etape.

Se remarcă totodată că mulţi elevi au greutăţi în a-şi organiza în mod raţional munca, a efectua calculele sistematic şi cu minimum de efort; pe de altă parte se remarcă faptul că unii elevi fac afirmaţii pe care nu le demonstrează sau le justifică foarte sumar, întîmpină greutăţi la folosirea cunoştinţelor căpătate în clasa precedentă sau la reducerea unei probleme de geometrie în spaţiu la una de geometrie plană. În fine, greutăţi mari întîmpină elevii şcolilor profesionale, atît din cauza programelor diferite de studiu cît şi din faptul că, în multe şcoli, nu se rezolvă decît probleme simple, de calcul numeric direct, dezvoltarea raţionamentului fiind lăsată pe planul doi.

La *etapa regională* sînt criticate în mai mică măsură problemele. Se relevă totuşi că la geometrie analitică, problema implică mai multe calcule decît raţionament direct sau observaţii simplificatoare, că particularizările din enunţul problemei de geometrie în spaţiu nu erau necesare (de altfel problema generală se găseşte în culegerea de Ţiţeica, revizuită de Gh. D. Simionescu, că formularea „comportarea funcţiei în punctul $x = 0$" la sfîrşitul problemei de analiză nu era destul de precisă. Mai multe filiale subliniază însă lipsuri care trebuie să fie eliminate din pregătirea elevilor cu privire la descompunerea unui polinom în factori, reprezentarea unui dreptunghi faţă de axele de coordonate, pornind de la un sistem simplu de inecuaţii, operaţii cu numere complexe, modulul unei funcţii liniare. Se mai remarcă faptul că unii elevi nu pot aplica cunoaştinţele teoretice însuşite, la cazurile particulare ale problemelor de rezolvat, că au greutăţi la rezolvarea independentă a unor probleme cu mai multe puncte, mai complexe decît cele pe care le rezolvă în mod obişnuit la clasă. Unele comisii regionale ridică însă şi probleme de altă natură : prima se referă la faptul că la fiecare clasă, există cel puţin un punct mai dificil (de obicei ultimul) la probleme acesta se consideră necesar pentru a tria elevii cei mai bine pregătiţi, cu capacitatea de a sezisa mai bine relaţii matematice, de a da rezolvări deosebite, elevii care să participe la etapa finală ; a doua se referă la cererea de a se trimite comisiilor regionale soluţiile problemelor — ceea ce nu se consideră necesar pentru că problemele propuse elevilor pot fi rezolvate de profesori în mai bune condiţiuni, într-un timp mai scurt şi prin consultări, pe de o parte, iar pe de alta, elevii au posibilitatea de a da şi altă soluţie decît cea indicată de autor, aşa încît comisia regională trebuie să aprecieze ceea ce a scris elevul şi nu concordanţa cu o soluţie dată.

Şi la etapa regională s-au evidenţiat numeroşi elevi a căror pregătire matematică s-a consolidat prin activitatea individuală susţinută, prin studiul materialelor suplimentare din cărţi şi reviste, prin rezolvarea de probleme din G.M. — B şi culegeri. Nu este vorba de depăşirea programei şcolare, ci de adîncirea ei, de înţelegerea şi însuşirea profundă a noţiunilor, a proprietăţilor studiate, a metodelor de demonstraţie şi calcul etc.

La *etapa finală* problema de algebră (cl. IX-a) este considerată mai simplă decît cele date la etapele precedente, iar problema de analiză (cl. XI-a) a provocat greutăţi tuturor elevilor care — pare-se, sînt deprinşi — în majoritatea cazurilor — să li se dea expresia analitică a funcţiei de studiat. Dar şi mulţi dintre cei care au determinat corect funcţia, nu au studiat-o complet, deoarece au comis greşeli la rezolvarea unei ecuaţii raţionale, la separarea rădăcinilor

existente în intervalul de definiţie al funcţiei. Determinarea ariei unui domeniu plan nu a putut fi făcută, elevii încurcîndu-se în calcule de integrale şi neobservînd că domeniul era echivalent cu un altul, a cărui arie se calcula foarte simplu, pe cale elementară. Au întîmpinat greutăţi la lucrările scrise şi unii elevi ai şcolilor profesionale. Este indicat ca profesorii de matematică ai acestor şcoli să sprijine mai susţinut efortul de pregătire suplementară a elevilor înscrişi la olimpiadă.

Proba orală s-a soldat cu rezultate mult mai bune, deşi problemele propuse au fost pretenţioase.

Programul conex. La etapa locală s-au dat premii în cărţi elevilor evidenţiaţi în regiunea Hunedoara şi Bacău. La Buzău s-a organizat o reuniune a elevilor care au obţinut rezultate bune la toate olimpiadele, în cadrul căreia s-au distribuit şi premii. La etapa regională s-a organizat, în general, un program, variat, cuprinzînd vizitarea oraşului gazdă, a muzeelor, monumentelor istorice şi a altor instituţii cultural-ştiinţifice, ca : centrul de calcul şi seminarul matematic al Universităţii din Iaşi, iar la Giurgiu, o excursie pe Dunăre ; s-au prezentat conferinţe de informare ştiinţifică la Bacău, Baia Mare, Bucureşti, Cluj, Craiova, Iaşi, Timişoara ; s-au vizionat spectacole de teatru sau operă la Bacău, Braşov, Cluj, Constanţa, Craiova, Galaţi, Piteşti, Timişoara. Este necesare ca şi celelalte filiale Tg. Mureş, Deva, Suceava, să depună toate eforturile ca să se asigure un program corespunzător elevilor şi profesorilor participanţi la etapa regională. Cu excepţia Sucevei, în toate celelalte 16 oraşe care au găzduit etapa regională, au avut loc : prezentarea rezolvării problemelor date, cu observaţii asupra greşelilor comise, consfătuiri cu cititorii G.M. — B şi împărţirea premiilor, în valoare de 1 000—3 000 lei.

În toate regiunile au fost prezenţi delegaţi ai Societăţii, la Braşov şi Constanţa au participat inspectori din Ministerul Învăţămîntului, delegaţi ai secţiunilor de învăţămînt regionale şi orăşeneşti. Conducerile comitelelor filialelor S.S.M. au urmărit desfăşurarea etapei regionale, au participat la închiderea ei festivă. În acest an, se semnalează intensificarea sprijinului dat de secţiunile de învăţămînt, a atenţiei cu care aceste întreceri tovărăşeşti au fost urmărite ceea ce a contribuit la desfăşurarea lor în cît mai bune condiţiuni. Se semnalează de asemenea, că Institutele pedagogice de 3 ani din Piteşti şi Tîrgu Mureş, prin membri ai catedrelor de matematică, au ajutat la corectare problemelor (sau au făcut-o în exclusivitate) pentru a asigura obiectivitatea şi a permite apoi, o analiză mai amplă, a rezultatelor obţinute, a lipsurilor constatate în pregătirea elevilor. Absenţa profesorilor din oraşul Timişoara la corectarea lucrărilor scrise iese astfel cu atît mai mult în relief ; şi în marele oraş de pe malul Begăi, lucrează peste o sută de profesori de matematică. La etapa finală, elevilor şi profesorilor li s-a oferit un spectacol de teatru. Membri ai comisiilor de corectarea problemelor au prezentat rezolvările acestora. Sărbătorirea a 70 de ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice a început cu acest prilej, printr-o festivitate în cadrul căreia prof. univ. *M. Mihăileanu* a vorbit despre activitatea desfăşurată de această revistă în decursul anilor, în slujba ridicării nivelului de pregătire matematică a elevilor ; s-au distribuit apoi premiile acordate celor 68 elevi, cei mai activi rezolvitori de probleme la G.M. — B în 1964 ş s-au evidenţ at cele 40 şcoli fruntaşe în acitvitatea extraşcolară la matematică, în acelaşi an. Liceul „Mate Basarab" a găzduit în continuare, serbarea de închidere a Olimpiadei propriu zise. Tov. acad. *Grigore C. Moisil*, preşedintele S.S.M. a arătat elevilor, imporanţa studiului matematicii pentru toate ramurile ştiinţe . Citînd exemplul Centrului de calcul al facultăţii de matematică a Universităţii Bucureşti, care colaborează cu foarte multe instituţii şi întreprinderi din toată ţara, la rezolvarea unor probleme de tehnică şi economie, lingvistică şi biologie, vorbitorul i-a îndemnat pe elevi să pregătească temeinic la matematică pentru a deveni atît oameni de ştiinţă, profesorii de care ţara are nevoie în viitorul apropiat, cît şi inginerii, economiştii, biologii etc. cu o foarte bogată pregătire teoretică, necesari dezvoltării multilaterale a Republicii noastre dragi. Adresîndu-se profesorilor, preşedintele S.S.M. i-a solicitat să asigure ca toţi elevii să-şi însuşească într-o măsură tot mai mare matematica, ceea ce azi, cînd ştiinţa a devenit o adevărată forţă de producţie — reprezintă într-o ţară socialistă o contribuţie la îndeplinirea planului de stat actual, o premiză pentru îndeplinirea viitoarelor planuri de stat sub îndrumarea clarvăzătoare a Partidului.

NOTE MATEMATICE

Asupra unor polinoame

Relaţiile :

$$x + x^{-1} = (x + x^{-1}) ; \quad x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2 ; \quad x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1})$$

ne sugerează ideea să căutăm expresia lui $x^n + x^{-n}$ în funcţie de $u = x + x^{-1}$.

Fie $P_n(u) = x^n + x^{-n}$; vom avea $P_n \cdot P_m = P_{n+m} + P_{n-m}$. Punînd $m = 1$ găsim $P_{n+1} = u P_n - P_{n-1}$. Ţinînd seamă că $P_1 = u$ şi $P_2 = u^2 - 2$ această relaţie de recurenţă ne permite să stabilim prin inducţie completă propoziţiile:

a) P_n este un polinom de grad n,

b) P_n este de forma: $P_n = u^n B_n^0 - u^{n-2} B_n^1 + u^{n-4} B_n^2 - u^{n-6} B_n^3 + \ldots$

c) $B_n^0 = 1$ pentru orice n natural,

d) $B_n^p = B_{n-2}^{p-1} + B_{n-1}^p$

Dacă $m = 2$ şi $n = 2k$ avem $P_{2(k+1)} = P_2 \cdot P_{2k} - P_{2(k-1)}$ (de unde prin inducţie completă folosind formulele $B_0^0 = B_2^1 = 2$ deducem $B_{2k}^k = 2$).

Dacă vrem să formăm tabloul:

B_0^0,
B_1^0,
B_2^0, B_2^1,
B_3^0, B_3^1,
B_4^0, B_4^1, B_4^2,
B_5^0, B_5^1, B_5^2,
B_6^0, B_6^1, B_6^2, B_6^3,
. . . . . .

este de ajuns să înscriem numerele de forma B_n^0, $(n > 0)$ şi B_{2k}^k egale cu 1 respectiv 2, iar apoi aplicînd regula:

$$B_n^p = B_{n-2}^{p-1} + B_{n-1}^p$$

aflăm toate celelalte numere.

Rezultă de aici propoziţia:

Numerele B_n^p sînt determinate în mod unic de condiţiile:

$$B_n^0 = 1\ (n > 0);\ B_{2k}^k = 2;\ B_n^p = B_{n-2}^{p-1} + B_{n-1}^p.$$

Se verifică uşor că numerele

$$\frac{n(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!}$$

satisfac aceste trei condiţii; deducem:

$$B_n^p = \frac{n\,(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!}$$

Din $u = x + \frac{1}{x}$ scoatem: $P_n = \left(\frac{u + \sqrt{u^2-4}}{2}\right)^n + \left(\frac{u - \sqrt{u^2-4}}{2}\right)^n$

sau, dezvoltînd şi efectuînd unele reduceri:

$$2^{n-1} P_n = 4^0 \cdot u^n \cdot S_0 - 4^1 \cdot u^{n-2} \cdot S_1 + 4^2 \cdot u^{n-4} \cdot S_2 - 4^3 \cdot u^{n-6} \cdot S_3 + \ldots$$

unde

$$S_k = C_n^{2k} C_k^k + C_n^{2(k+1)} C_{k+1}^k + C_n^{2(k+2)} C_{k+2}^k + \ldots$$

Formula $2^{n-1} B_n^p = 2^{2k} S_k$ permite calculul sumelor S_k.

În încheiere mai dăm cîteva rezultate interesante legate de polinoamele P_n:

a) Ecuația: $y^k - B_n^1 y^{k-1} + B_n^2 y^{k-2} + \ldots + (-1)^k B_n^k = 0$ unde $n=2k$ sau $n = 2k + 1$ are rădăcinile:

$$4\cos^2\frac{\pi}{2n};\ 4\cos^2\frac{3\pi}{2n};\ \ldots;\ 4\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

b) Avem formulele:

$$B_{2p+k}^p = B_{2p-2}^{p-1} + B_{2p-1}^{p-1} + \ldots + B_{2p+k-2}^{p-1}$$

$$B_{p+2k+1}^k = B_p^0 + B_{p+2}^1 + B_{p+4}^2 + \ldots + B_{kp+2k}^k$$

$$B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - B_n^3 + \ldots = \begin{cases} = 1 \text{ pentru } n = \mathfrak{M}\,6 \pm 1 \\ = -1 \text{ pentru } n = \mathfrak{M}\,6 \pm 2 \\ = -2 \text{ pentru } n = \mathfrak{M}\,6 + 3 \\ = +2 \text{ pentru } n = \mathfrak{M}\,6 \end{cases}$$

$$2^n B_n^0 - 2^{n-0} B_n^1 + 2^{n-4} B_n^2 - 2^{n-6} B_n^3 + \ldots = 2$$

$$u^{n-1} P_{n-1} = 2 + P_2 + uP_3 + u^2 P_4 + \ldots + u^{n-2} P_n$$

$$P_{2n+1} = P_1 \cdot [P_{2n} + (-1)^1 P_{2n-2} + (-1)^2 P_{2n-4} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} P_2 + (-1)^n]$$

$$P_n[P_m(u)] = P_m[P_n(u)] = P_{mn}(u)$$

$$P_n[i\,(x - x^{-1})] = i^n[x^n + (-x)^{-n}]$$

Observație. — B_n^k este numărul de poligoane convexe cu k laturi ale căror vîrfuri coincid cu vîrfurile unui poligon convex cu n laturi dat, iar laturile lor sînt diagonale ale poligonului cu n laturi. (Vezi „Probleme neelementare tratate elementar" de A. M. Iaglom și I.M. Iaglom, p. 20, „problema lui Cayley").

Dan Voiculescu
cl. IX, s.m. 21 București

În legătură cu proprietatea unor numere naturale.

Se știe că numerele 25 și 76 se bucură de următoarea proprietate: ultimele două cifre ale pătratelor lor sînt 25 și respectiv 76 : $25^2 = 625$; $76^2 = 6776$. Mai există și alte numere cu aceeași proprietate, $375^2 = 141\,375$; $625^2 = 390\,625$; $51^2 = 132\,651$.

Să căutăm nu număr N_1 cu $(n + 1)$ cifre, astfel ca N_1^a $(a \geqslant 2)$ să aibă ultimele $(n + 1)$ cifre identice cu cele ale numărului N_1 și în aceeași ordine; adică să verifice relația:

$$N_1^a - N_1 = \mathfrak{M}10^{n+1}. \qquad (1)$$

Pentru aceasta să scriem $N_1 = 10^n x + N$, unde x este o cifră, iar N un număr oarecare cu n cifre.

Relația (1) devine:

$$(10^n x + N)^a - 10^n x - N = \mathfrak{M}10^{n+1}.$$

Dezvoltînd şi eliminînd multiplii de 10^{n+1} se ajunge la relaţia :

$$a \cdot N^{a-1} 10^n x + N^a - 10^n x - N = \mathfrak{M}10^{n+1}$$

sau :

$$10^n x (aN^{a-1} - 1) + (N^a - N) = \mathfrak{M}10^{n+1}. \quad (2)$$

Este evident că $N^a - N = M \cdot 10^n$. Deci N trebuie să aibă proprietatea că ultimele n cifre a numărului N^a să fie identice cu ale numărului N şi aşezate în aceeaşi ordine. Presupunem cunoscut numărul N şi împărţind prin 10^n, relaţia (2) devine :

$$x(aN^{a-1} - 1) + M = \mathfrak{M}10. \quad (3)$$

Dacă N şi a sînt cunoscute, M se determină uşor, şi înlocuind, punem condiţia ca x să verifice relaţia (3) şi apoi calculăm pe N_1. Pentru a simplifica calculele, în loc de N şi M putem considera doar ultimele lor cifre. Pentru a folosi relaţia (3) se vede că este suficient să cunoaştem numerele de o cifră care verifică relaţia $N^a - N = \mathfrak{M}10$. Apoi, punînd condiţia succesiv, vom putea determina numere cu această proprietate de oricîte cifre. Numerele de o cifră care verifică relaţia sînt : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dacă $a = \mathfrak{M}4 + 1$; 1, 4, 5, 6, 9 dacă $a = \mathfrak{M}4 + 3$, şi 1,5,6 dacă $a = \mathfrak{M}2$.

Exemple. Să determinăm toate numerele de două cifre ale căror cuburi au ultimele două cifre identice cu cele ale numărului considerat şi aşezate în aceeaşi ordine. Avem $a = 3$ şi deoarece $a = \mathfrak{M}4 + 3$ putem avea : $N = 1$, $N = 4$, $N = 5$; $N = 6$; $N = 9$. Dacă $N = 1$, atunci $M = 0$ iar condiţia este $2x = \mathfrak{M}10$, de unde $x = 5$. Numărul este 51. Dacă $N = 4$, atunci $M = 6$, iar condiţia este : $7x + 6 = \mathfrak{M}10$, de unde $x = 2$. Numărul este 24. Dacă $N = 5$ atunci $M = 12$ iar condiţia este : $4x + 2 = \mathfrak{M}10$ de unde $x = 2$, $x = 7$. Numerele sînt 25 şi 75. Dacă $N = 6$ atunci $M = 21$, iar condiţia este $7x + 1 = \mathfrak{M}10$, de unde $x = 7$. Numărul este 76. Dacă $N = 9$ atunci $M = 72$, iar condiţia este : $2x + 2 = \mathfrak{M}10$, de unde $x = 4$, $x = 9$. Numerele sînt : 49, 99. Se verifică uşor, că toate satisfac. Pornind de la unul din aceste numere, de exemplu de la $N = 51$ putem determina numere de 3 cifre cu aceeaşi proprietate. Avem $a = 3$, iar $M = 1336$ şi condiţia devine : $2x + 6 = \mathfrak{M}10$, de unde $x = 2$, $x = 7$. Se obţin numerele 251 şi 751, care satisfac, deoarece $251^3 = 15813251$, iar $751^3 = 423564751$.

Popa Eugen, elev Iaşi.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Folosind scrierea numerelor în sisteme diferite de cel zecimal, se pot explica unele jocuri distractive cunoscute.

Să luăm jocul :

1. a) *Se înscriu primele 100 numere pe 7 cartoane diferite în aşa fel ca să se poată „ghici" numărul gîndit de o persoană care indică acele cartoane pe care se găseşte înscris acel număr.*

Se iau 7 cartoane ; pe primul se scrie a_0, pe al doilea a_1 şi aşa mai departe.

Indicii 0, 1,...6, arată exponenţii lui 2. Fiecare din numerele de la 1—100 se scriu pe acele cartoane care conţin puterile lui 2 în care se descompune numărul scris în sistemul binar.

O persoană ne arată cartoanele pe care este înscris numărul gîndit.

Presupunem că numărul gîndit este 85.

$$85 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1.2^2 + 0 \cdot 2 + 1.$$

Numărul este scris pe cartoanele a_6, a_4, a_0 deci se poate ușor afla.

b). Folosind sistemul de numerație în baza 3 se pot afla numerele de la 1—242 cu ajutorul a 10 cartoane.

Numerotarea se face cu ajutorul literelor cu doi indici : a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12} ... a_{41}, a_{42}. Primul indice arătînd exponentul lui 3 iar al doilea cu cît se înmulțește puterea lui 3. Presupunem că numărul gîndit este 88.

$$88 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

el va fi scris pe cartoanele : a_{01}, a_{12}, a_{41} aflîndu-se astfel numărul gîndit. În loc de indici se pot folosi culori, figuri etc.

2. *Jocul NIM.* Se iau trei grămezi formate fiecare din cîte un număr oarecare de chibrituri. Doi jucători iau alternativ chibrituri din ele, fiecare putînd lua orice număr de chibrituri din orice grămadă (însă numai din una). Se consideră că a cîștigat cel care ia ultimul chibrit.

Să se determine în ce condiții inițiale jucătorul care începe jocul poate să cîștige și în care nu ; să se găsească metoda jocului corect (*IAGLOM* — Probleme neelementare tratate elemementar).

Fie a, b, c numerele de chibrituri din cele trei grămezi.

În sistemul binar aceste numere se scriu :

$$a = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \ldots + a_k 2^{n-k} + \ldots + a_{n-1} \cdot 2^1 + a_n 2^0$$
$$b = b_0 2_n + b_1 2^{n-1} + \ldots + b_k 2^{n-k} + \ldots + b_{n-1} \cdot 2^1 + b_n 2^0$$
$$s = c_0 2^n + c_1 2^{n-1} + \ldots + c_k 2^{n-k} + \ldots + c_{n-1} \cdot 2^1 + c_n 2^0$$

Considerăm că numerele a, b, c au același număr de cifre deoarece putem adăoga unul sau mai multe zerouri la începutul numerelor cu cifre mai puține

Formăm sumele :

$$a_0 + b_0 + c_0 ; \; a_1 + b_1 + c_1 \ldots ; \; a_k + b_k + c_k ; \ldots$$

și fie $a_k + b_k + c_k$ prima sumă impară, aceasta însemnînd că un termen al sumei sau toți trei sînt unu.

Primul jucător scoate dintr-o grămadă un număr de chibrituri, astfel încît toate sumele de forma : $a_k + b_k + c_k$ să fie pare.

Orice număr al lua jucătorul al doilea dintr-una din grămezi va schimba paritatea cel puțin a unei sume de forma $a_k + b_k + c_k$.

Revenindu-i rîndul primului jucător, el stabilește din nou paritatea sumelor.

Procedînd în continuare, după fiecare mișcare a primului, toate sumele vor deveni pare și astfel după ultima mișcare a primului nu va mai rămîne nici un chibrit, cîștigînd jocul.

Deci, în cazul cînd cel puțin una din sumele de forma $a_k + b_k + c_k$ este impară, cîștigător va fi primul jucător ; în caz contrar cîștigă al doilea, presupunînd că nu se fac greșeli.

De exemplu :

$$a = 52 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 0.2^0 = \ll 110100 \gg$$
$$b = 13 = 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1.2^0 = \ll 001101 \gg$$
$$c = 27 = 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1.2^2 = \ll 011011 \gg$$

Primul jucător ia 30, 15, 1, 20, 1 chibrituri respectiv din grupele a, c, a, c ; c, iar al doilea ia 13, 1 , 22, 1 respectiv din grupele b, c, a, c ;

Iată și operațiile :

110100	10110	10110	10110	10110
001101	01101	00000	00000	00000
011011	11011	11011	10110	10101

10101	00000	00000	00000
00000	00000	00000	00000
10101	10101	00001	00000

BIBLIOGRAFIE

BACHET : *Problèmes „Plaisant et délectable"*, Paris 1879.

A. M. IAGLOM : *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. Tehnică Buc. 1962.

Lucia Țene, profesoară București

PROBLEME REZOLVATE

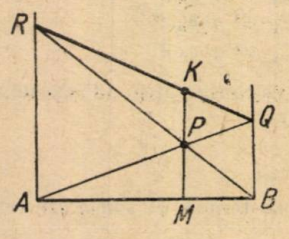
Problema 6555

Se dă o dreaptă (D) și în exteriorul ei un punct fix P. Prin P se duc două drepte variabile care taie pe (D) în A și B. Prin A și B se ridică perpendiculare pe dreapta (D) care intersectează dreptele variabile în Q și R. Să se arate că dreapta QR trece printr-un punct fix și să se determine acest punct.

A. Roman, profesor Galați

Soluție dată de *Crișan Victor*, elev Aiud.

Oricare ar fi dreptele variabile ce trec prin P, patrulaterul $ABRQ$ este un trapez, punctul fix P fiind intersecția diagonalelor. Ducînd prin P o perpendiculară pe (D), aceasta întîlnește pe (D) în M și pe QR în K; dreapta MK este paralelă cu bazele trapezului și trece prin intersecția diagonalelor, prin urmare $PM = PK$. Dar PM fiind fix ca mărime și poziție, urmează că și segmentul PK rămîne fix. Dreapta QR trece prin punctul fix K situat pe perpendiculara PM, astfel că $PK = PM$.



Problema 6558

Să se arate că expresia:

$$E = 16875 \cdot 27^{3n} \cdot 5^{9n-1} - 4^{3n+1} \cdot 11^{6n+2}$$

este divizibilă cu 2891.

Constanța Grigoraș, profesor Tecuci

Soluție dată de *Manolache Nicolae*, elev Ș.m. 5 București.

Deoarece avem $1687^5 = 27 \cdot 5^4$ putem scrie expresia E sub formele:

$$E = 27 \cdot 5^4 \cdot 27^{3n} \cdot 5^{9n-1} - 4^{3n+1} \cdot 11^{6n+2}$$
$$E = 5^{3(3n+1)} \cdot 27^{3n+1} - 4^{3n+1} \cdot 11^{2(3n+1)}$$
$$E = 125^{3n+1} \cdot 27^{3n+1} - 4^{3n+1} \cdot 121^{3n+1}$$
$$E = (125 \cdot 27)^{3n+1} - (4 \cdot 121)^{3n+1}$$
$$E = 3375^{3n+1} - 484^{3n+1}$$

Am ajuns la o expresie de forma $a^m - b^m$, care se divide cu $a-b$, adică cu $3375-484 = 2891$. Deci, $E \vdots 2891$.

Problema 6559

Se dau două drepte perpendiculare Ox și Oy și două drepte paralele cu Oy, dreptele D_1 și D_2. Un unghi drept cu vîrful în O se rotește în jurul lui O, intersectînd cu o latură pe D_1 în P, iar cu a doua latură pe D_2 în Q. Să se afle locul geometric al proiecției lui O pe dreapta PQ. Se cere o demonstrație prin geometrie elementară.

D. Costiniuc, profesor Galați

Soluție dată de *Penciu Mihai*, elev Vaslui.

Să însemnăm cu A și B intersecțiile dreptei Ox cu D_1 și D_2 și cu M proiecția vîrfului O pe dreapta PQ.

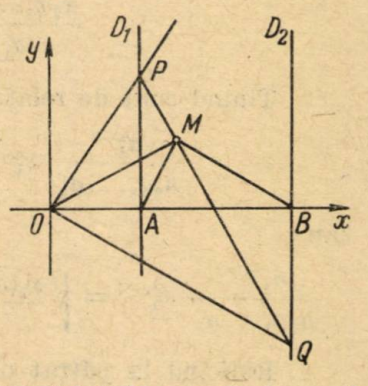
Patrulaterul $OAMP$ este inscriptibil.

Rezultă

$$\sphericalangle AOP + \sphericalangle AMP = 180°.$$

Patrulaterul $OMBQ$ este deasemenea inscriptibil. Rezultă relația:

$$\sphericalangle OQB + \sphericalangle OMB = 180°.$$



Unghiurile AOP și OQB sînt însă egale avînd laturile perpendiculare; rezultă deci și egalitatea

$$\sphericalangle AMP = \sphericalangle OMB.$$

Din cei doi membri ai ei scădem unghiul OMA și obținem egalitatea

$$\sphericalangle OMP = \sphericalangle AMB = 1 \text{ dr.}$$

Punctul M este vîrful unui unghi drept, laturile lui trecînd prin punctele fixe A, B. Locul lui M este deci cercul descris pe AB ca diametru.

Problema 6618

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x_2x_3\ldots x_n}{a_1} \underset{(1)}{=} \frac{x_1x_3\ldots x_n}{a_2} \underset{(2)}{=} \cdots \underset{(n-1)}{=} \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{a_n} \underset{(n)}{=} \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sînt pozitive*

Liviu Pîrșan, student București

Soluție dată de *Chițescu Ion*, cl. XI, ș.m. 10 București

Din egalitatea (1) $\frac{x_2x_3\ldots x_n}{a_1} = \frac{x_1x_3\ldots x_n}{a_2}$ deducem că $\frac{x_2}{a_1} = \frac{x_1}{a_2}$ (1').

Din egalitatea (2) deducem că $\frac{x_3}{a_2} = \frac{x_2}{a_3}$ (2') ...

Deasemenea $\frac{x_n}{a_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{a_n}$.

Din (1') avem $x_2 = \frac{a_1}{a_2} x_1$

Din (2') avem $x_3 = \frac{a_2}{a_3} x_2 = \frac{a_2}{a_3}\left(\frac{a_1}{a_2} x_1\right) = \frac{a_1}{a_3} x_1$;

avem $$x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{a_1}{a_{n-1}} x_1\right) = \frac{a_1}{a_n} x_1 .$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități avem :

$$x_2 x_3 \ldots x_n = \frac{a_1^{n-1}}{a_2 a_3 \ldots a_n} \cdot x_1^{n-1} \qquad (1'')$$

Să considerăm ecuația

$$\frac{x_2 x_3 \ldots x_n}{a_1} = \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

Ținînd cont de relațiile (1'), (2') ... (1'') obținem :

$$\frac{a_1^{n-2}}{a_2 a_3 \ldots a_n} x_1^{n-1} = \sqrt{x_1 + \frac{a_1}{a_2} x_1 + \ldots + \frac{a_1}{x_n} x_1}$$

sau :

$$\frac{a_1^{n-2}}{a_2 a_3 \ldots a_n} x_1^{n-1} = \sqrt{\frac{x_1(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1})}{a_2 a_3 \ldots a_n}}$$

Ridicînd la pătrat obținem :

$$\frac{a_1^{2(n-2)}}{(a_2 a_3 \ldots a_n)^2} x_1^{2(n-1)} = \frac{x_1(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{a_2 a_3 \ldots a_n}$$

Deducem $x_1 = 0$ și toți $x_i = 0$ (soluția banală) și

$$x_1^{2n-3} = \frac{(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_1 a_3 \ldots a_n}{a_1^{2(n-2)}}$$

deci

$$x_1 = \sqrt[2n-3]{\frac{(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n) a_2 a_3 \ldots a_n}{a_1^{2(n-2)}}}$$

Dar :

$$x_i = \frac{a_1}{a_i} x_1 ; \quad i = 1, \ldots, n$$

deci

$$x_1 = \sqrt[2n-3]{\frac{(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1})\, a_1^{2n-3}\, a_2 a_3 \ldots a_n}{a_1^{2(n-2)}\, a_i^{2n-3}}}$$

sau

$$x_i' = \sqrt[2n-3]{\frac{(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 + \ldots a_{n-1})\, a_1 a_2 \ldots a_n\, a_{i-1} a_{+1} \ldots a_n}{a_i^{2(n-2)}}}$$

oricare ar fi $i = 1, \ldots, n$.

În cazul particular $n = 3$ obținem problema 6280 din Gazeta matematică 4/1964.

Problema 6620

Se consideră ecuațiile :

$$x^5 - p_1x^4 + p_2x^3 - p_3x^2 + p_4x - p_5 = 0,$$
$$y^5 - q_1y^4 + q_2y^3 - q_3y^2 + q_4y - q_5 = 0.$$

Știind că

$x^5 - 5x^4y - 10x^3 + 10x^2y + 5x - y = 0$ și $p_1 + p_5 = p_3$ să se arate că

$$q_1 + q_2 = q_3$$

Corneliu N. Popescu, profesor

Soluția dată de *Gheorghiu Doina*, cl. X ș.m. 6 București
Avem :

$$y = \frac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$$

Relația $p_1 + p_5 = p_3$ se poate scrie :

$$\Sigma x_1 - \Sigma x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3x_4x_5 = 0$$

Dacă notăm $x_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$; ... ; $x_5 = \operatorname{tg}\alpha_5$, atunci avem

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_5) = \frac{\Sigma\operatorname{tg}\alpha_1 - \Sigma\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_4\operatorname{tg}\alpha_5}{1 - \Sigma\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 + \Sigma\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_4}$$

Deci $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_5) = 0$, de unde $\alpha_1 + \ldots + \alpha_5 = k\pi$

Pe de altă parte $y = \dfrac{5\operatorname{tg}\alpha - 10\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^5\alpha}{1 - 10\operatorname{tg}^2\alpha + 5\operatorname{tg}^4\alpha} = \operatorname{tg}5\alpha.$

Dar $\operatorname{tg}(5\alpha_1 + \ldots + 5\alpha_5) = \operatorname{tg}5(\alpha_1 + \ldots + \alpha_5) = 0.$

Deci $$\frac{\Sigma y_1 - \Sigma y_1y_2y_3 + y_1y_2y_3y_4y_5}{1 - \Sigma y_1y_2 + \Sigma y_1y_2y_3y_4} = 0$$

Deci $\Sigma y_1 + y_1y_2y_3y_4y_5 = \Sigma y_1y_2y_3$, adică :

$$q_1 + q_5 = q_3$$

Problema 6621

Să se arate că într-un triunghi ABC avem :

$$24rR^{-1} \leqslant \sum (r_a^{\frac{1}{2}}r_b^{-\frac{1}{2}} + r_a^{-\frac{1}{2}}r_b^{\frac{1}{2}})^2 \leqslant 6r^{-1}R,$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Tudor Zamfirescu și *Toma Albu*

Soluție dată de *Ilie Nicolae*, cl. XI. ș.m. Giurgiu
Avem evident,

$$\sum a(b + c)^2 = \prod (a + b) + 4abc$$

oricare ar fi numerele reale a, b, c.

Înlocuind a, b, c cu r_a, r_b, r_C și ținînd seama de relațiile

$$r_a r_b r_c = p^2 r\,;\ \prod (r_a + r_b) = 4p^2 R,$$

obținem

$$\sum r_a (r_b + r_c)^2 = 4p^2 (R + r)\,.$$

Dar $R \geqslant 2r$, cu egalitate numai pentru triunghiul echilateral. Deci

$$\sum r_a (r_b + r_c)^2 \leqslant 6p^2 R,$$

sau, împărțind la $r_a r_b r_c$ în stînga și la $p^2 r$ în dreapta,

$$\sum \frac{r_a (r_b + r_c)^2}{r_a r_b r_c} \leqslant 6\, Rr^{-1}$$

adică

$$\sum (r_a^{\frac{1}{2}} \cdot r_b^{-\frac{1}{2}} + r_a^{-\frac{1}{2}} \cdot r_b^{\frac{1}{2}})^2 \leqslant 6\, Rr^{-1}$$

cu egalitatea numai pentru triunghiul echilateral.

Însă

$$r_a^{\frac{1}{2}} r_b^{-\frac{1}{2}} + r_a^{-\frac{1}{2}} r_b^{\frac{1}{2}} \geqslant 2,$$

deci

$$\sum (r_a^{\frac{1}{2}} r_b^{-\frac{1}{2}} + r_a^{-\frac{1}{2}} r_b^{\frac{1}{2}})^2 \geqslant 12.$$

Cum $1 \geqslant 2rR^{-1}$, rezultă

$$\sum (r_a^{\frac{1}{2}} r_b^{-\frac{1}{2}} + r_a^{-\frac{1}{2}} r_b^{\frac{1}{2}})^2 \geqslant 24\, rR^{-1}$$

cu egalitate numai pentru triunghiul echilateral.

Problema 6649

A spune: *B este vinovat. B spune*: *A minte. C spune*: *eu nu sînt vinovat. D spune*: *A este vinovat.*

a) Dacă o singură afirmație este adevărată, cine este vinovatul.

b) Dacă o singură afirmație este falsă, cine este vinovatul.

c) În cîte feluri se poate ca exact două afirmații să fie adevărate. Găsiți în fiecare caz vinovatul.

Eureka, Cambridge, 1963

Soluție dată de *Bîscă Octavian*, elev Craiova și *Voiculescu Dan*, elev București. — Notînd cu + afirmația adevărată și cu — afirmația falsă putem alcătui următorul tabel:

Vinovatul	Aritmația lui				Concluzii
	A	*B*	*C*	*D*	
este *A*	—	+	+	+	o afirmație falsă
este *B*	+	—	+	—	2 afirmații adevărate
este *C*	—	+	—	—	o afirmație adevărată
este *D*	—	+	+	—	2 afirmații adevărate

a) Dacă o singură afirmație este adevărată vinovatul este C.

b) Dacă o singură afirmație este falsă vinovatul este A.

c) Două afirmații pot să fie adevărate în două feluri: A și C, în care caz B este vinovat sau B și C în care caz D este vinovat.

Problema 6662

Să se arate că dacă $13° \leqslant x \leqslant 28°$, *avem*:

$$\frac{3}{2} \leqslant \sin^2(4x + 8°) + \cos^2(4x - 82°) \leqslant 2$$

$$0 \leqslant \operatorname{ctg}^2(4x - 8°) + \operatorname{tg}^2(4x - 82°) \leqslant \frac{2}{3}$$

$$1 \leqslant \sec^2(4x - 82°) - \sin^2(4x - 82°) =$$

$$= \operatorname{cosec}^2(4x + 8°) = \cos^2(4x + 8°) \leqslant \frac{13}{12}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Dăncilă I.*, elev Sibiu. Avem

$\cos(4x - 82°) = \sin(90° - 4x + 82°) = \sin(172° - 4x) =$
$= \sin(170° - 8° - 4x) = \sin(4x + 8°)$

Prima inegalitate devine:

$$\frac{3}{2} \leqslant 2\sin^2(4x + 8°) \leqslant 2 \text{ sau}$$

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin^2(4x - 8°) \leqslant 1.$$

Cum $13° \leqslant x \leqslant 28°$, $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, deci

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(4x + 8°) \leqslant 1. \text{ Rezultă imediat}$$

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin^2(4x + 8°) \leqslant 1$$

$$\operatorname{tg}(4x - 82°) = -\operatorname{ctg}(4x + 8°).$$

Cum $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, $|\operatorname{ctg}(4x + 8°)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Inegalitatea obținută $0 \leqslant 2\operatorname{ctg}^2(4x + 8°) \leqslant \frac{2}{3}$ este evidentă.

Folosind transformările

$\sec(4x - 82°) = \operatorname{cosec}(4x + 8°)$ și

$\sin(4x - 82°) = \cos(4x + 8°)$, avem imediat

$\sec^2(4x - 82°) - \sin^2(4x - 82°) = \operatorname{cosec}^2(4x + 8°) - \cos^2(4x + 8°)$

Folosind identitatea $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

putem scrie inegalitatea $1 \leqslant \sec^2(4x - 82°) - \sin^2(4x - 82°)$

astfel $\operatorname{tg}^2(4x - 82°) - \sin^2(4x - 82°) \geqslant 0$

$$\text{sau } \sin^2(4x - 82°)\left[\frac{1}{\cos^2(4x - 82°)} - 1\right] = \frac{\sin^4(4x - 82)}{\cos^2(4x - 82)} \geqslant 0$$

$$4x - 82° \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Cea de a doua inegalitate o scriem:

$$\sec^2(4x - 82°) - 1 - \sin^2(4x - 82°) \leqslant \frac{1}{12}$$

sau:

$$\frac{\sin^4(4x - 82°)}{\cos^2(4x - 82°)} \leqslant \frac{1}{12}$$

cum $\cos^2(4x - 82°) > 0$ pentru $13° \leqslant x \leqslant 28°$.

Inegalitatea de mai sus devine transformînd consinusul în sinus

$$[4\sin^2(4x - 82°) - 1]\,[3\sin^2(4x - 82°) + 1] \leqslant 0.$$

Cum $3\sin^2(4x - 82°) + 1 > 0$ și $-30° \leqslant 4x - 82° \leqslant 30°$, avem

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin(4x - 82°) \leqslant \frac{1}{2} \text{ deci } \sin^2(4x - 82°) \leqslant \frac{1}{4},$$

inegalitate evidentă.

Problema 6663

În triunghiul ABC inegalitatea $a > b$ implică $a + h_a \geqslant b + h_b$. În ce caz avem egalitate?

Olimpiada de matematică R.D.G.1964

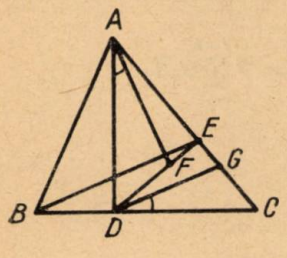
Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București. — Inegalitatea $a > b$ este echivalentă cu $\sin A > \sin B$, iar cea de demonstrat cu $\sin A + \sin B.\sin C \geqslant \sin B + \sin A.\sin C$, adică $(\sin A - \sin B)(1 - \sin C) > 0$, inegalitate evidentă, deoarece $1 - \sin C \geqslant 0$. Egalitate avem cînd $1 - \sin C = 0$, adică $C = 90°$.

Problema 6679

Se dă un triunghi oarecare ABC. Fie D piciorul înălțimii din A, E proiecția lui D pe AC, iar F punctul care împarte segmentul ED în raportul egal cu $BD : DC$. Să se arate pe cale elementară că AF și BE sînt perpendiculare între ele (Generalizarea problemei 6419).

Petre Liviu, profesor Tîrgoviște

Soluția I-a, a autorului. Ducem dreapta DG paralelă cu BE (G pe EC), deci



$$\frac{BD}{DC} = \frac{EG}{GC} \tag{1}$$

Se știe că înălțimea DE a triunghiului dreptunghic ADC îl împarte în două triunghiuri asemenea, deci

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DE}{CE} \tag{2}$$

Din relația $\frac{EF}{FD} = \frac{BD}{BC}$ și din (1) obținem

$$\frac{EF}{FD} = \frac{EG}{GC} \text{ de unde } \frac{EF + FD}{FD} = \frac{EG + GC}{GC} \text{ sau } \frac{ED}{DF} = \frac{EC}{GC}$$

$$\text{sau } \frac{DE}{CE} = \frac{DF}{CG} \tag{3}$$

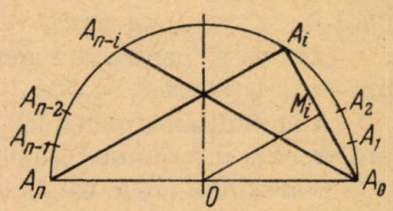
Din (2) și din (3) obținem $\frac{AD}{DC} = \frac{DF}{CG}$.

Triunghiurile ADF și DCG sînt asemenea. Rezultă că $\sphericalangle DAF$ și $\sphericalangle CDG$ sînt egale. Laturile lor AD și DC fiind perpendiculare și cele două unghiuri avînd același sens de rotație, rezultă că și latura AF este perpendiculară pe DG, deci și pe paralela ei BE.

Soluția a II-a dată de *Dan Voiculescu*, elev București. Ducem înălțimea BB' pe AC. Triunghiurile ADE și BCB' sînt asemenea și unghiurile DAE și $B'BC$ au laturile perpendiculare iar BB' și DE sînt paralele. Punctele F și E împart laturile FD și $B'C$ ale triunghiurilor ADE și BCB' în raport egal, deoarece : $B'E : EC = BD : DC = FE : FD$. Putem deduce că și ADF și BEC sînt asemenea și au laturile perpendiculare, deci AF și BE sînt perpendiculare.

Problema 6692

Un semicerc de diametru A_0A_n și de rază R este împărțit în n părți egale, prin punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}. Să se arate că $A_0A_1 + A_0A_2 + \ldots + A_0A_{n-1} = 2(OM_1 + OM_2 + \ldots + OM_{n-1})$, *unde O este mijlocul lui A_0A_n, iar M_1, M_2, ..., M_{n-1} sînt mijloacele coardelor A_0A_1, A_0A_2 ..., A_0A_{n-1}.*



G. D. Sorescu, profesor Răcari

Soluție dată de *Popescu Eleodor*, Turnu Severin. — Dintre punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ considerăm punctele A_i și A_{n-i} care sînt evident sime-

trice față de diametrul dus prin O perpendicular pe AA_n. Cum M_1 este mijlocul coardei A_0A_n deducem ușor:

$$2OM_i = A_nA_i = A_0A_{n-i} \quad \text{sau:} \quad \sum_{i=1}^{n-1} A_0A_{n-i} = 2\sum_{i=1}^{n-1} OM_i$$

care este chiar relația ce trebuie demonstrată.

Problema 6694

a) În planul unui poligon convex regulat $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nu există un punct M astfel încît $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$. b) În planul unui poligon convex regulat $A_1A_2\ldots A_{2n-1}$ nu există un punct M astfel încît $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$.

Dan Voiculescu, elev, București

Soluția autorului: Fie trei puncte A, B, C în plan. Ne propunem să aflăm locul geometric al punctului A care satisface condiția $AB > AC$, cînd B și C sînt fixe. Dacă A' este proiecția lui A pe BC atunci conform unei teoreme cunoscute trebuie ca $A'B > A'C$. Locul geometric căutat este deci una din regiunile în care mediatoarea lui BC împarte planul și este aceea în care se află punctul C.

Dacă luăm un poligon regulat $A_1A_2\ldots A_{2n}$ și căutăm punctele M pentru care $MA_1 < MA_2$ obținem o regiune O_1 a planului. Pentru a avea $MA_1 < MA_2 < MA_3$ trebuie să considerăm doar acele puncte din O_1 care satisfac și condiția $MA_2 < MA_3$, obținînd astfel o regiune O_2. Continuăm astfel pînă la regiunea O_{n+1}. Observăm că mediatoarele segmentelor A_1A_2, $A_2A_3,\ldots A_{n+1}A_{n+2}$ trec printr-un punct comun și că mediatoare consecutive formează un unghi de $\frac{180^\circ}{n}$. Regiunea O_1 poate fi astfel considerată drept interiorul unui unghi de 180°, regiunea O_2 interiorul unui unghi de $180^0 - \frac{180^\circ}{n}$ regiunea O_3 interiorul unui unghi de $180^\circ - 2\frac{180^0}{n}$ etc.

Continuînd acest raționament vedem că regiunea O_{n+1} este interiorul unui unghi de 0° adică o mulțime vidă. Nu există deci în planul lui $A_1A_2\ldots A_{2n}$ un punct M astfel ca $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$

Analog și pentru poligonul convex regulat cu $2n-1$ laturi dovedim că relația $MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_{n+2}$ este imposibilă.

Aici mulțimea punctelor lui O_{n+1} este interiorul unui unghi negativ care trebuie interpretat drept mulțimea vidă.

S-ar putea crede că $MA_{n+1} < MA_{n+2}$ este o condiție inutilă. Nu este așa; calculînd găsim că O_n este interiorul unui unghi pozitiv, deci condiția este necesară.

Problema 6703

Se consideră un cerc oarecare O și un diametru fix AB, al aceluiași cerc.

O dreaptă variabilă (Δ), paralelă cu AB, taie cercul în punctele M și N. Fie P proiecția lui N pe AB și Q simetricul lui P față de punctul A.

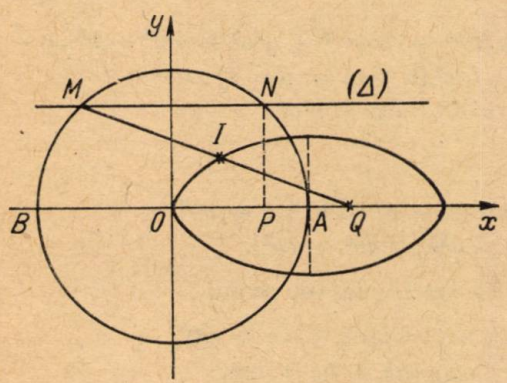
Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului MQ.

C. Săndulache, profesor Negrești, Iași

Soluție dată de *Răgălie Niță* cl XI. S.m. Deva.

Luînd centrul cercului ca origine și pe AB ca axă Ox, ecuația cercului va fi $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Punctele din enunț sînt:

$$M(\alpha, \beta);\ N(-\alpha, \beta);\ P(-\alpha, 0),\ A(r, 0);\ Q(\alpha + 2r, 0)$$



Coordonatele punctului I sînt date de

$$x = \alpha + r \text{ și } y = \frac{\beta}{2},$$

cu condiția:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Eliminînd pe α și β obținem:

$$\frac{(x - r)^2}{r^2} + \frac{y^2}{\frac{r^2}{4}} - 1 = 0.$$

Locul geometric este deci o elipsă cu centrul în A și unul din vîrfuri în 0, avînd semiaxele $a = r$, $b = \frac{r}{2}$.

Problema 6707

Să se arate că:

$$(T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n)\cdot \sin^2 x \cos^2 x = T_1 - T_{n+1}$$

unde $T_n = sin^{2n}x + cos^{2n}x.$

Liviu Pîrșan, student București

Soluție dată de *Gheorghiu Doina*, s.m. 6 cl. X, București — Deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie:

$$T_n = (\sin^{2n}x + \cos^{2n}x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = T_{n+1} + \sin^2 x \cos^2 x \cdot T_{n-1}.$$

Analog avem:

$$T_{n-1} = T_n + \sin^2 x \cos^2 x\ T_{n-2};\ T_{n-2} = T_{n-1} + \sin^2 x \cos^2 x \cdot T_{n-3};\ldots;$$
$$\ldots;\ T_2 = T_3 + \sin^2 x \cos^2 x\ T_1;\ T_1 = T_2 + \sin^2 x \cos^2 x T_0.$$

Adunînd parte cu parte aceste egalități obținem:

$$T_1 = T_{n+1} + \sin^2 x \cos^2 x\ (T_0 + T_1 + \ldots + T_n).$$

Problema E : 2228

Să se arate că dacă $a \neq b \neq c$, *avem*

$$\frac{(a+b)(a^3+b^3)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{(a-c)(b-a)} - \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{(c-b)(a-b)} = ab + bc + ca.$$

* * *

Soluție dată de *Pestroiu Daniel*, cl. VIII, S.m. 1 Tg. Jiu.

Aducem egalitatea la același numitor :

$$(a^2-b^2)(a^3+b^3) + (b^2-c^2)(b^3+c^3) + (c^2-a^2)(c^3+a^3) = (ab+bc+ca)(b-c)(c-a)(a-b)$$

Avem :

$$a^5 + a^2b^3 - a^3b^2 - b^5 + b^5 + b^2c^3 - b^3c^2 - c^5 + c^5 + a^3c^2 - a^2c^3 - a^5 = a^2(b^3-c^3) - a^3(b^2-c^2) - b^2c^2(b-c) = (b-c)(a^2b^2 + a^2bc + a^2c^2 - a^3b - a^3c - b^2c^2)$$

Grupăm din nou termenii :

$$(b-c)[-b^2(c^2-a^2) + a^2c(c-a) + a^2b(c-a)] = (b-c)(c-a)(a^2c + a^2b - ab^2 - cb^2).$$

După gruparea termenilor din al treilea factor avem :

$$(b-c)(c-a)[a(ab+bc+ca) - b(ab+bc+ca)] = (b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca).$$

Problema E : 2230

Să se demonstreze identitatea :

$$2[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-d)^4 + (d-a)^4] - [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2]^2 + 8(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = 0$$

Dan Voiculescu, elev București

Soluție. — Vom nota : $A=a-b$; $B=b-c$; $C=c-d$; $D=d-a$.

Avem relația :

$$A + B + C + D = 0$$

Deducem relația

$$(A+B)^2 = (C+D)^2 \quad \text{sau :} \quad A^2 + B^2 - C^2 - D^2 = 2CD - 2AB.$$

Ridicînd încă odată la pătrat avem :

$$(A^2 + B^2 - C^2 - D^2)^2 = (2CD - 2AB)^2$$

sau :

$$A^4 + B^4 + C^4 + D^4 + 2A^2B^2 + 2C^2D^2 - 2A^2C^2 - 2A^2D^2 - 2B^2C^2 - 2B^2D^2 = 4C^2D^2 + 4A^2B^2 - 8ABCD.$$

Relația se mai scrie :

$$A^4+B^4+C^4+D^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2A^2D^2-2B^2C^2-2B^2D^2-2C^2D^2+$$
$$+8ABCD=0.$$

Dar,

$$2A^2B^2+2A^2C^2+2A^2D^2+2B^2C^2+2B^2D^2+2C^2D^2=$$
$$=(A^2+B^2+C^2+D^2)^2-(A^4+A^4+C^4+D^4)$$

Obținem deci,

$$A^4+B^4+C^4+D^4-[(A^2+B^2+C^2+D^2)^2-(A^4+B^4+$$
$$+C^4+D^4)]+8ABCD=0$$

sau :

$$2(A^4+B^4+C^4+D^4)-(A^2+B^2+C^2+D^2)^2+8ABCD=0$$

adică, ceea ce trebuia demonstrat.

Observație. Dacă luăm $d=a$, identitatea de mai sus se transformă într-o identitate cunoscută :

$$2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=0$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

7119. Se consideră patratul $ABCD$. Un unghi drept are vîrful fixat în A, iar laturile lui întîlnesc dreptele BC și CD respectiv în M și N. Să se arate că : a) Triunghiul AMN este isoscel, b) Mijlocul segmentului MN se găsește pe dreapta BD.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7120. Se dau polinoamele :

$$P(x)=4x^4+4x^3-25x^2-x+6 \text{ și } Q(x)=x^3+2x^2-5x-6$$

și se cere :

a) Să se afle $(P\,;\,Q)$ și $[P\,;\,Q]$ și să se deducă rădăcinile comune ale ecuațiilor $P(x)=0$ și $Q(x)=0$.

b) Să se simplifice fracția $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ și să se calculeze

$$\frac{1}{P(x)}-\frac{1}{Q(x)}.$$

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7121. Se dă ecuația : $m\cos 6x+(4-m)\sin 3x+2-m=0$.

a) Să se rezolve ecuația ; b) Să se afle valorile lui m pentru care toate soluțiile ecuației sînt reale ; c) Să se scrie soluțiile particulare cuprinse între $0°$ și $360°$ pentru $m=2\sqrt{2}$.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7122. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + ax + b}{x^4 + 3x^3 - x^2 + cx + d}$$

a) Să se determine a, b, c, d astfel ca fracția să se simplifice cu $x^2 - x - 2$ și să se efectueze simplificarea. b) Să se discute natura rădăcinilor ecuației $f(x) = m$, după valorile parametrului real m, $f(x)$ fiind fracția obținută prin simplificarea fracției $F(x)$.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7123. Pe un semicerc de diametru $AB = 2R$ se ia un punct M. Se notează cu x lungimea distanței lui M la AB.

a) Să se exprime în funcție de R și x suma $s = AM + MB$, iar din rezultat să se deducă lungimea maximă a lui s; b) Să se determine poziția lui M pentru care $s = kx$. Discuție după k. Se cere valoarea minimă a lui k. Interpretare geometrică.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7124. Se dau polinoamele:

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 + mx^2 + nx + p \quad \text{și}$$
$$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + a.$$

a) Să se determine a și să se rezolve ecuația $Q(x) = 0$ astfel ca să aibă rădăcinile în progresie aritmetică. b) a fiind înlocuit cu valoarea aflată, să se determine m, n, p astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x)$ și să se afle cîtul $C(x)$; c) Să se arate că avem $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 3\alpha\beta = 0$, unde α și β sînt rădăcinile ecuației $C(x) = 0$.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

7125. Un tetraedru echilateral are lungimea muchiei egală cu a. Pe muchia AB se ia un punct M și se notează $AM = x$.

a) Să se calculeze în funcție de a și x suma distanțelor punctului M la muchiile tetraedrului; b) Să se determine poziția lui M pentru care suma este minimă și să se calculeze mărimea ei.

La admiterea în Inst. Pedagogic 3 ani Timișoara, 1964

PROBLEME PROPUSE *)

7126. Se dă un triunghi ABC și un punct M în interiorul său. Să se ducă două semidrepte cu originea în M, care împreună cu segmentul MA să împartă triunghiul în trei părți echivalente.

Petre Liviu, profesor Tîrgoviște

---

*) IX (7126–7132), X (7133–7138), XI (7139–7147), S (7148–7150). Soluțiile problemelor din acest număr al G.M.–B., se primesc pînă la 30 decembrie 1965.

7127. Să se găsească cifrele x și y, astfel ca numărul $N = xy45721$ să fie multiplu de 53.

Florica Ionescu, București

7128. Fie xOy un unghi dat și A un punct în interiorul său. Să se construiască grafic două puncte M_1 și M_2 pe Ox și Oy, astfel încît $\sphericalangle M_1AM_2 = \alpha$ și $M_1A/M_2A = k$.

Dan Voiculescu, elev București

7129. Fie $a>3$ un număr natural. Să se demonstreze că numerele $(a-1)^3$ și $(a+2)(a-1)^2$ se scriu, în baza de numerație a, cu aceleași cifre, diferind prin ordinea lor.

Corneliu Popescu, București

7130. Fie $ABCD$ un trapez oarecare (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB taie diagonala BD în DM și paralela tot la AB, dusă prin D, taie prelungirea diagonalei AC în N. Să se arate că AB este media geometrică a segmentelor CM și DN.

Petre Simon, Tg. Mureș

7131. Să se arate că :

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}}\right)^3}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

Ion I. Cristea

7132. În triunghiul ABC în care $\sphericalangle B=45°$, perpendicularele ridicate în A' (mijlocul lui BC) și în C pe latura BC intersectează latura AB, respectiv în D și E. Paralelele duse prin D și E la BC intersectează latura AC în D' și E'; iar perpendiculara ridicată în D' pe AC intersectează pe AB în F. Să se arate că unghiul $E'FC$ este drept. (În legătură cu problema 6571).

Theodor Gh. Cocea, București

7133. Să se afle numărul maxim de regiuni în care n cercuri împart planul.

Alexandru Vinea, student electronică București

7134. Fără a utiliza valorile numerice ale funcțiilor trigonometrice să se demonstreze inegalitatea : $\cos 36° > \operatorname{tg} 36°$.

T. Gh. Mișakova, (Odessa, URSS)

7135. Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{C_m^k \cdot C_n^{s+1} \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^s \cdot C_p^{r+1} \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^r \cdot C_m^{k+1} \cdot C_{n+1}^{s+1}}{C_m^{k+1} \cdot C_n^s \cdot C_{p+1}^{r+1} + C_n^{s+1} \cdot C_p^r \cdot C_{m+1}^{k+1} + C_p^{r+1} \cdot C_m^k \cdot C_{n+1}^{s+1}} = 1$$

Parascan Ilie, Moinești

7136. Să se arate că polinomul :

$$x^{120} - 6x^{100} + 15x^{80} - 20x^{60} + 25x^{40} - 6x^{20} + 1$$

se divide cu $(x-1)^6$.

Iuliana Bal, Cluj

7137. Să se demonstreze că relaţia $x+y+z=xyz$, implică dubla inegalitate :

$$9 \leqslant yz + 2x + xy \leqslant \frac{9 + x^2y^2z^2}{4}$$

unde x, y, z sînt numere strict pozitive.

Chifescu Ion, Bucureşti

7138. Se dă polinomul :

$$P(x, y, z) = (x^2 + y^2 + axz)^2 - y^2\,[(x-y)^2 + (x+y+az)^2]$$

şi se cere să se determine a, astfel încît să se dividă prin $x^2+y^2-xz-yz$. Să se determine cîtul.

Miron Oprea, Ploieşti

7139. Pe muchiile SA şi SD ale unei piramide patrulatere oarecare se iau punctele N şi M astfel ca $SN/NA + SM/MD = m/n = \text{const}$, iar pe muchiile SB şi SC se iau punctele P şi Q astfel ca $SP/PB + SQ/QC = p/q = \text{const}$. Fie $V \equiv (AM, DN)$ şi $T \equiv (PC, BQ)$. Să se afle locul geometric al punctului O care împarte segmentul VT într-un raport constant. (În legătură cu problema 6026)

Simion Gheorghe, elev Ploieşti

7140. Să se arate că dacă n este număr natural, atunci expresia :

$$E = 3168^n - 729^n - 528^n + 132^n - 24^n + 6^n + 4^n - 1$$

se divide prin 1965.

Ştefan Marica, profesor T. Severin

7141. Să se determine a şi b reali din ecuaţia :

$$P(x) = x^5 + [(a^3 - 8a^2 - 21a - 30)(\sqrt{3}+1) + 27]x^4 - (131-a)x^3 -$$
$$- (4018 + b^3 + a^2 - 5a + b)\sqrt{2}\,]x^2 + (25900 + b)x - 20084 - 20a + 5b = 0$$

ştiind că ecuaţia admite numai rădăcini raţionale nenule.

Bogdan Lungulescu, elev Piteşti

7142. Să se arate că între elementele unui triunghi există relaţia :

$$\frac{a}{\sin B + \sin C} + \frac{b}{\sin A + \sin C} + \frac{c}{\sin A + \sin B} \geqslant 6r$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

Dan Tonceanu, elev Bucureşti

7143. Fie şirul :

$$a_n = \left[\frac{(a+n)!}{n!\, n^a}\right]^n$$

unde a este un număr natural. *a*) Să se calculeze limita şirului a_n. b) Dacă notăm $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, să se demonstreze :

$$f(1)\cdot f(2)\ \ldots f(a) = \sqrt[3]{f(a)^{n+2}}$$

Julius Ambrozius, Sighişoara

7144. Să se arate că :

$$\left(\frac{|x+a|-|x-a|}{|x+a|+|x-a|}\right)^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(\frac{|x+a|+|x-a|}{|x+a|-|x-a|}\right)^2$$

unde $ax \neq 0$.

Victor Crişan, student Bucureşti

7145. Să se arate că polinomul :

$$f(x) = (x^{p-1} + ax^{p-2} + \ldots + a^{p-1})x^{(p+1)n+1} + a^{(p+1)n+p}$$

este divizibil cu polinomul : $g(x) = x^p + ax^{p-1} + \ldots + a^{p-1}x + a^p$, unde a este număr întreg, iar p şi n numere naturale.

Liviu Pîrşan, student Bucureşti

7146. Fie un număr natural N. Se notează cu n numărul divizorilor şi P produsul divizorilor numărului N. Să se arate că $P^2 = N^n$.

Eugen Popa, elev Iaşi

7147. Considerăm feţele S_a şi S_b ale unui tetraedru. Să se arate că locul geometric al punctului A, aflat pe S_a, cu proprietatea că există un punct B_A pe S_b astfel încît între A şi B_A să se poată duce pe suprafaţa tetraedrului trei drumuri distincte de lungimi minime şi egale, dintre acelea care traversează cel mult două muchii ale tetraedrului este aria unui patrulater convex.

Tudor Zamfirescu

7148. Fie a şi b două numere naturale. Să se demonstreze că dacă $a^2 + a + 1$ şi $b^2 + b + 1$ sînt relativ prime între ele, atunci şi numerele $ab-1$ şi $a+b+1$ sînt relativ prime între ele.

F. Kacsó, student Cluj

7149. Dacă notăm cu u_k ($k = 1, 2, \ldots$) numerele şirului lui Fibonacci, să se arate că pentru $p = 20+13$ expresia $F = 405^p - 12u_p - u_{p-1}$ se divide prin 1965. (Se va considera $u_1 = u_2 = 1$).

Dăncilă Ioan, elev Sibiu

7150. Să se arate că dacă $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 0$, avem :

$$a^{13} + b^{13} + c^{13} = (ab + bc + ca)^2 abc\,[16a^2b^2c^2 - (ab + bc + ca)^3]$$

C. Ionescu-Ţiu

7151. Două trenuri merg în sens contrar pe două linii paralele alăturate,unul cu viteza de 24 km pe oră şi altul cu viteza de 30 km pe oră. O persoană din primul tren vede trenul al doilea trecînd pe dinaintea sa în 9 secunde, iar o persoană din al doilea tren vede trecînd primul tren în 12 secunde. Să se afle în cît timp ar fi trecut cele două trenuri pe dinaintea celor două persoane dacă ele ar fi mers cu aceleaşi viteze, dar în acelaşi sens şi lungimile celor două trenuri.

G.M. 1895, p. 16 — *I. Ionescu*

7152. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 2(a-1)x^3 - (5a-1)x^2 + 2(a^2+1)x - a = 0$$

şi să se arate că ecuaţia are totdeauna două rădăcini reale. Să se afle limitele între care trebuie să fie cuprins a, pentru ca ecuaţia să aibă numai două rădăcini reale. Care este valoarea lui a cînd ecuaţia are numai două rădăcini egale şi valoarea pentru care toate rădăcinile sînt egale.

G.M. 1895, p. 112 — *G. Ţiţeica*

7153. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-se diferenţa unghiurilor B şi C, distanţa de la vîrful A la punctul de întîlnire al înălţimilor şi diferenţa segmentelor determinate pe latura BC de înălţimea ce pleacă din A.

G.M. 1896, p. 182 — *V. Cristescu*

7154. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 unghiurile unui patrulater convex. Se consideră expresia :

$$\left(x - \operatorname{tg}\frac{A_1}{2}\right)\left(x - \operatorname{tg}\frac{A_2}{2}\right)\left(x - \operatorname{tg}\frac{A_3}{2}\right)\left(x - \operatorname{tg}\frac{A_4}{2}\right).$$

Dacă se efectuează produsul indicat se obţine o expresie de forma

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4$$

Să se afle relaţia ce există între coeficienţii acestui polinom .Aceeaşi chestiune înlocuind tangentele prin sinusuri.

G.M. 1896, p. 207 — *A.G. Ioachimescu*

7155. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd direcţiile laturilor AB şi AC şi punctul M unde înălţimea ce pleacă din A întîlneşte cercul circumscris triunghiului.

G.M. 1899, p. 296 — *Tr. Lalescu*

7156. Să se discute şi să se separe rădăcinile ecuaţiei $(x-2)^4 - \lambda(2x-1)^3 = 0$, λ fiind un parametru variabil.

G.M. 1913, p. 200 — *N. Abramescu*

7157. Să se construiască un trunchi de piramidă triunghiulară cunoscînd lungimea tuturor muchiilor sale.

G.M. 1911, p. 200 — *S. Mirea*

7158. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$3\beta x^4 - 4\alpha\beta x^3 + 6\alpha^2\beta^2 x^2 + \alpha^2\beta^2 - 1 = 0$$

cînd α și β iau toate valorile reale.

G.M. 1913, p. 460 — *P. Sergescu*

7159. Să se descompună o forță dată F în două componente F_1 și F_2 știind că

$$F_1^2 + F_2^2 = a_2, \quad F_1 = kF_2$$

a și k fiind cunoscute. Se vor da soluții grafice și numerice.

G.M. 1927, p. 80 — *Ernest Abason*

7160. Într-o progresie aritmetică se dă : numărul, suma și suma pătratelor termenilor ei. Să se determine progresia aritmetică. Datele fiind numere reale, în ce caz termenii progresiei vor fi reali? Datele fiind întregi, să se determine condițiile în care termenii progresiei vor fi întregi.

G.M. 1928, p. 319 — *Th. Angheluță*

7161 Să se arate că punctele în care se taie laturile a două triunghiuri isoscele ce se pot înscrie într-un cerc de rază R și circumscrie unui cerc de rază r, sînt situate pe un cerc. Discuție.

G.M. 1936, p. 454 — *C. Ionescu-Țiu*

7162. Să se scrie ecuația cercurilor tangente parabolei $y^2 = 2px$ și să se scrie locul centrelor atunci cînd raza este constantă.

S.G.M. an VI, 1940, p. 206 — *G.G. Constantinescu*

7163. Să se arate că expresia

$$E = x^{2n+2}(x^{4n+1} - 3x^{2n} + 3x) - 1$$

se împarte exact cu $(x-1)^3$. Să se afle cîtul.

S.G.M. an IX, 1943, p. 78 — *I.I. Stamate*

7164. Să se studieze variația funcției

$$y = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

și să se construiască curba reprezentativă.

S.G.M. an IX, 1943, p. 121 — *Șerban Gheorghiu*

7165. Fie A, B, C, D patru puncte în plan pe care le proiectăm ortogonal pe două axe perpendiculare Ox, Oy în A', B', C', D' respectiv A'', B'', C'', D''. Notînd cu (ABC) aria triunghiului ABC, să se arate că

$$OB' \cdot (ADC) + OC' \cdot (ABC) = B'D' \cdot (OAC) + A'C' \cdot (OBD)$$

S. G. M. an. XII, 1945, p. 30 — *N. Mihăileanu*

7166. O placă omogenă este alcătuită dintr-un triunghi ABC dreptunghic în C şi un semicerc avînd ca diametru cateta AC. 1° Dacă $AC = b$ rămîne invariabilă, să se determine lungimea catetei BC, astfel ca centrul de greutate al întregii plăcii să se afle pe cateta AC. Să se precizeze poziţia sa. 2° Să se afle locul geometric al centrului de greutate al acestei plăci cînd cateta BC variază ca lungime.

S.G.M., an. XIII, 1947, p. 159 — *Gh. D. Simionescu*

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V – VIII *)

E : 2367. Se dau două numere. Dacă îl mărim pe primul de 6 ori şi îl micşorăm pe al doilea de două ori, suma lor nu se schimbă. Dacă îl mărim pe primul de patru ori, iar pe al doilea de două ori, suma lor creşte cu 65. Să se afle cele două numere.

Al. Filipoiu, elev Buzău

E : 2368. Două trenuri pornind simultan unul către celălalt din oraşele A, respectiv B, se întîlnesc după 8 ore. Dacă cele două trenuri ar avea viteza cu cîte 10 km/oră mai mare s-ar întîlni după 6 ore. Ştiind că primul tren are viteza de două ori mai mare decît celălalt, se cere distanţa dintre oraşele A şi B.

* * *

E : 2369. O cămaşă, o pereche de pantofi şi un costum de haine costă împreună 910 lei. Să se afle cît costă fiecare articol în parte, ştiind că costul cămăşii este de 12 ori mai mic decît costul pantofilor şi al costumului luate împreună, iar costul pantofilor reprezintă 1/5 din costul costumului.

Petru Grăjdeanu, profesor Tansa, Iaşi

E : 2370. În patru cutii sînt acelaşi număr de nasturi. Dacă se scot din fiecare cutie cîte 300 nasturi, în toate cutiile la un loc rămîn atîţia nasturi cîţi nasturi erau la început în fiecare cutie. Cîţi nasturi erau în total?

B. Baieră, Păunești

E : 2371. Într-un butoi se află cu 2,3 hl de vin mai mult decît în alt butoi. Să se afle cîţi litri de vin sînt în fiecare din cele două butoaie, ştiind că 2/3 din cantitatea de vin aflată în primul butoi egalează 3/2 din cantitatea aflată în butoiul al doilea.

N. Negoiescu, profesor Timişoara

E : 2372. O parte din suprafaţa unei cooperative agricole de producţie, de 1410 ha este cultivată cu grîu, porumb şi sfeclă. Ştiind că 47/80 din suprafaţa cultivată cu sfeclă este egală cu 47/390 din suprafaţa cultivată cu grîu, iar suprafaţa cultivată cu porumb este media aritmetică între cele două suprafeţe cultivate, să se afle suprafaţa fiecărei culturi.

I. Albescu, Făgăraş

E : 2373. Dintr-un depozit s-au vîndut într-o zi 5/12 din cantitatea de combustibil existentă şi încă 40 tone ; a doua zi s-au vîndut 2/5

*) (E : 2367–2370), VI (E : 2371–2374), VII (: 2375–2377), VIII (E : 2378–2380). Soluţiile se primesc pînă la 30 decembrie 1965.

din rest şi încă 32 tone; a treia zi 5/14 din noul rest şi ultimele 27 tone. Ce cantitate de combustibil era în depozit?

Nelu Dobre, Merei-Buzău

E: 2374. În două magazii de cereale se afla o cantitate de grîu. Dacă luăm 5/7 din cantitatea de grîu din prima magazie şi 2/5 din cantitatea de grîu din a doua magazie obţinem 17,2 tone. Se cere cantitatea de grîu din fiecare magazie, dacă 5/7 din grîul din prima magazie întrece cu 2,8 tone pe 2/5 din grîul din a doua magazie.

Octavian Sulea, Vaslui

E: 2375. Două uzine metalurgice trebuie să producă după plan, 1560 tone laminate pe lună. Ştiind că prima uzină a depăşit planul cu 20%, iar a doua cu 25% şi astfel au produs pe lună 1910 tone laminate, să se afle cu cîte tone a depăşit planul fiecare uzină?

* * *

E: 2376. Un apicultor are 32 stupi de albine. În primăvara anului 1963 el a dus stupi la salcîm de unde a scos 1242 kg miere de albine. După aceea a dus stupi la floarea soarelui, unde a scos cu 234,5 kg miere mai puţin. Apoi a dus stupi la tei, unde a scos cu 234,5 kg mai mult decît la salcîm.

a) Să se afle cîte kg de miere a scos la salcîm, tei şi floarea-soarelui;
b) cîţi lei primeşte apicultorul dacă vinde mierea de salcîm la stat cu 16 lei kg, iar mierea de tei şi floarea-soarelui cu 20 lei kg.

Ioniţă Marin, elev Bucureşti

E: 2377. Să se arate că:

$$[5738_2 - 34_4] \cdot 20_5 - 13_2\,[131_5 - 73_4] - 609_{10} = 1.$$

unde indicii indică bazele de numeraţie în care sînt scrise numerele respective.

C. Pop, profesor Cluj

E: 2378. Trei autocare au plecat în excursie pe itinerarii diferite. Să se afle ce distanţă a parcurs fiecare autocar dacă 4/7 din distanţa parcursă de primul reprezintă 0,4 din distanţa parcursă de al doilea şi 3/5 din distanţa parcursă de al treilea, ştiind că lungimea celor trei trasee însumează 4970 km.

* * *

E: 2379. La sfîrşitul anului 1964 în agricultura ţării noastre lucrau 173 100 tractoare, semănători mecanice şi combine pentru cereale păioase. Numărul tractoarelor era de $2\,\frac{5}{44}$ ori mai mare ca al combinelor, iar al semănătorilor mecanice cu 10 900 mai mic decît numărul tractoarelor. Să se afle numărul de tractoare, de semănătoare mecanice şi combine cu care era dotată agricultura la acea dată.

Ştefan Marica, T. Severin

E: 2380. Am avut o sumă de bani din care am dat fratelui mai puţin cu 5 lei decît 1/4 din suma totală. Surioarei i-am dat cu 3 lei mai puţin decît 2/5 din suma dată fratelui. Constat că mi-au rămas 3/4 din suma totală. Ce sumă am avut şi ce sumă am dat fratelui? Dar surioarei?

Suciu Liviu, elev Dej

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Soluții bune primite pînă la 1 aprilie 1965, urmare)

GALAȚI. *Șc. g. 21* cl. VIII. Carabăț Cornelia (E: 2248, 63, 5, 8, 71, 6, 80, 720, 2), Caraghiosu Angela (E : 2233, 5, 42, 8, 65, 78 ; 6670, 6, 720, 2), Pătru Mioara (E : 2248, 52, 4, 5, 7, 63, 5, 6, 8), Voicu Elena (E : 2248, 54, 63, 5, 8, 70 ; 6676, 720), Wexler Adrian (E : 2265, 6, 8—71, 6, 9, 80 ; 6720, 2). *Șc. 8 ani nr. 24* cl. VIII. Costiniuc Florin (E : 2238, 44, 52, 4, 8, 65, 8, 9, 80). *Șc. 8 ani nr. 26.* cl. VIII. Ionescu Fulger (E : 2233, 5—8, 42, 5, 7). *S. m. 1* cl. IX. Rosenzweig Niky (E : 2236, 7, 41, 5, 60, 1, 3 ; 6670, 3, 4, 6, 80—2). Cl. XI. Andrei Viorel (6628, 30, 3, 4, 7, 41, 53, 6, 9, 60, 2, 4, 6—78, 80—3, 92, 3, 5, 7, 8, 700, 3, 6—8, 11, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 31, 3, 5, 6, 45, 8). *S. m. 3* cl. X. Gheorghe Elide (6632, 41, 2, 4, 6, 64, 70, 3, 6, 710, 5, 6, 20, 2, 36). Cl. XI. Codreanu Rodica (6667, 71—8, 92, 703, 6, 11, 3, 6, 20, 35). *S. m. 4* cl. V. Basalic Rodica (E : 2233, 5, 8, 43, 5, 7, 8, 51, 2). Cl. VI. Ariton Petrică (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 5—7), Vasiliu Mariana (E : 2235, 42, 7, 8, 50, 9, 66, 8). Cl. VIII. Anton Gh. (E : 2233, 5, 6, 40, 2, 3, 5, 7). Cl. IX. Buruiană Rodica (E : 2236, 60, 1, 3, 4, 78—80 ; 6679, 80, 720, 2, 4). Cl. XI. Neguț Sorin (6646, 70—8, 703, 9, 20, 2). *S. m. 5* cl. VIII. Panait Ivona (E : 2234, 6, 45, 8, 50, 4, 63, 5, 9, 70, 7, 80), Tîru Petru (E : 2233—6, 40, 3, 5, 7). Cl. IX. Anghel Dorin (E : 2263, 78—80 ; 6674, 7, 81, 716, 20, 2—4, 35), Bejan Ortansa (E : 2236, 7, 61, 3, 79, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 720, 2), Dumitriu Ion (E : 2236, 7, 45, 60, 1, 3, 4, 78—80 ; 6670, 2, 4, 6, 7, 720—2), Lupoaie Marian (E : 2237, 61, 3, 77, 8 ; 6670, 3, 4, 6, 720, 2, 4). Cl. X. Anghelescu Gabriela (6632, 67, 70, 3, 5, 6, 710, 1, 5, 20, 2, 5), Popa Victor (6670, 1, 3—7, 710, 5, 20, 2). *S. m. 6* cl. VII. Burluc Ionel (E : 2233, 40, 2, 3, 8—50, 2, 4, 7, 8, 68, 81). Cl. IX. Căpraru Mihalache (E : 2277—80 ; 6670, 2, 4, 6, 7, 716, 20, 2, 8, 35), Lazăr Stelică (E : 2236, 62, 9 ; 6670, 2, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2), Munteanu Florin (E : 2236, 63, 77 ; 6670, 6, 7, 80, 1, 720, 2, 9), Suceveanu Dumitru (E : 2236, 63 ; 6670, 3, 4, 6—8, 80, 716, 20, 2), Vasiliu Ilie (E : 2236, 45, 63, 78—80, 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 720, 2, 35). *S. m.* 7 cl. XI. Crîstea Miorița (6670, 1—3, 5—7, 710, 5, 20, 2, 6). *Șc. muzică* cl. VII. Onu Costică (E : 2233, 8, 47, 8, 52, 5, 8, 68, 80).

GĂIEȘTI. *S. m.* cl. X. Bădoiu Ion (6661, 70, 1, 5, 6, 711, 20—2, 31, 3, 5, 6), Prundeanu Valentin (6644, 71, 2, 4, 5, 7, 9, 96, 711, 6, 20—2, 35, 6).

GĂTAIA. Cl. IX. Pleava Petru (E : 2236, 63, 78, 80 ; 6670, 3, 4, 7, 85, 716, 20, 2, 35)

GHERGANI (București). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Popescu Daniela (E : 2248, 50—5, 8—60, 4).

GHERLA. Cl. XI. Ungur Ștefan (6628, 34, 7, 9, 40, 9, 58, 9, 62, 5).

GIURGIU. *S. m. 2* cl. X. Durbac Linică (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 710, 5, 20, 2, 4, 35).

GRUIA (Oltenia). *Șc. 8 ani* cl. VI. Streche Georgeta (E : 2233, 5, 40, 2, 3, 5, 6, 8, 54, 65), Togoe C. Constanța (E : 2233, 40, 2, 3, 4, 7, 8, 54, 66, 8).

GUGEȘTI (Galați). *S. m.* cl. VIII. Petrovici Paulina (E : 2233, 5, 6, 40, 2, 3, 7, 8, 50, 2, 4, 6—9, 61, 3).

GURA HUMORULUI. *S. m.* cl. XI. Adămiței (6580—5, 8—90, 2, 5, 601, 5, 6, 14, 28, 30, 2, 9, 40, 1, 8, 53, 9).

HALEȘ. *Șc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Enache Virginia (E : 2239, 61, 5, 6, 8—71), Marinescu Marcela (E : 2248, 54, 61, 5, 6, 8—71).

HAȚEG. *S. m.* cl. IX. Berghean Ion (E : 2236, 45, 61, 3, 4, 6639, 46, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2).

HOREZU (Argeș). *S. m. 1* cl. X. *Bușe C. Marcu* (6631, 2, 4, 9, 53, 61, 2, 6, 7, 70—2, 4—85, 92, 3, 5—8, 710—2, 4—6, 20—2, 4—9, 32, 5, 6).

HUEDIN. *S. m.* cl. X. Voiculescu I. (6671, 5, 92, 710, 2, 5, 6, 22, 4, 32, 5, 6). Cl. XI. Coldea Aurel (6670, 3—7, 80, 716, 20, 2).

HUNEDOARA, *S. m. 1* cl. VIII Atanasoaie Gabriela (E : 2217, 29, 32, 3, 6, 40, 2, 3, 5). Cl. IX. Drăghici George (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 720, 2), Mogoșan V. Petru (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 78, 9, 80 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 710, 5, 20, 2, 4, 5). Cl. X. *Căpățînă Oct.* (6630—2, 4, 6, 41, 3, 4, 53, 7, 8, 63, 6 ; 7, 70—7, 80, 2, 3, 5, 9, 93, 5, 7, 707, 10, 3, 5, 20, 2, 3, 35, 45, 8), Petrescu Petre (6631, 4, 44, 6, 9, 63, 70, 3—7, 80, 1, 5, 93, 5, 7, 8), Suruceanu Alexandru (6605, 31, 4, 9, 44, 6, 63, 70, 3—6, 80, 1, 3, 5, 93, 5, 8). Cl. XI. *Belu Emil* (6628, 32, 3, 6—9, 41, 4, 8, 53, 5, 7, 9, 60, 6—78, 80, 2, 3, 5, 92, 3, 703, 6, 7, 9—11, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 45, 8), *Căpățînă Ion* (6628, 30—4, 6—41, 4, 8, 9, 53, 5, 7, 8, 60, 2, 3, 6, 8, 9, 73, 5, 8, 80, 2, 5, 93, 703, 6, 7, 9—11, 3, 5, 20, 2, 35, 48), Enciu George (6628, 30, 6, 48, 57, 63, 7, 72—4, 85, 706, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 6, 35).

HUSI. *S. m. Cuza Vodă* cl. X. Darie Viorel (6644, 9, 66, 70, 1, 4—7, 80, 5, 93, 8).

IAŞI. *Şc. 8 ani nr. 7* cl. VIII. Partenie Gica (E : 2233, 5, 6, 43, 8, 50, 4, 9, 60, 3, 5), Rătărescu Angela (E : 2220, 6, 7, 32, 48, 50, 4, 9, 60, 3, 5, 78). *S. m. 1* cl. VII. Budui Liviu (E : 2233, 5, 40, 3, 8—50, 6, 80), Mînrezanca Magda (E : 2223, 6, 7, 31, 3, 8, 40, 3, 7). Cl. VIII. Ioniţă Nicoleta (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 7, 8). *S. m. 2* cl. VII. Duţan Aneta (E : 2233—5, 40, 2, 4, 4, 6, 7), Polcovnicu Alina (E : 2233—5, 9, 40, 2, 4, 6, 7). Cl. VIII. Chelaru Anton Dumitru (E : 2235, 41, 3, 7, 9, 61, 3, 5, 77), Mihailovici Manuaela (E : 2085, 6,, 98, 9, 100, 3, 4, 9, 13, 29). *S. m. 3* cl. V. Adomnicăi Radu (E : 2235, 8, 47, 8, 50, 65, 8, 75 7, 8). Cl. VII. Bărbulescu Mihai (E : 2210, 1, 5, 33, 48, 50, 4, 5, 9, 65), Bradu Dorin (E : 2284, 5, 8, 9, 91, 5, 6, 8, 9, 105, 7—9, 13, 6, 20, 1, 2, 39, 47, 58), Linde Radu (E : 2033, 5—40, 2—7, 92, 3, 5, 6, 7, 8, 100, 3, 4), Vescan Robert (E : 2235, 44, 6, 8, 50, 2, 4—6, 8). Cl. VIII. Abăcioaie Neculai (E : 2236, 42, 3, 7, 8, 50, 61, 3, 5, 79), Enăşescu Ancuţa (E : 2234, 5, 7, 9, 46, 7, 8, 50, 4, 8, 9, 63), Grindei Iulia n (E : 2197—100, 3, 4, 7, 9, 13, 20—2), Lozeannu Tiberiu (E : 2084, 91, 6, 8, 105, 7, 18, 21, 31), Lică Ioan (E : 2082, 3, 6, 8 92, 5—7, 9, 100, 0, 5, 7, 9, 39), Teodorescu Octavian (E : 2236, 7, 45, 63, 70, 7, 9,; 6670, 3, 6). Cl. IX. Bodron Fănică (F : 2260—3 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2), Dima Valentin (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 2, 4, 35), Irma Constantin (6653, 70, 2, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 2, 4, 35), Păduraru Mihai (E : 2245, 63 ; 6646, 70, 81, 2, 5, 92, 720, 2—4), Stănel Rene (E : 2236, 61, 3 ; 6671, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 4, 35, 60). Cl. X. Botez Constantin (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 4, 5, 95, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35), Darabană Vasile (6670—4, 6, 7, 80—2, 4, 5, 92, 5, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35). Herea Dumitru (6670—4, 6, 7, 80, 1, 4, 5, 92, 5, 610 20, 2, 35), Lupescu Florin (6639, 44, 70—7, 80, 1, 5, 716, 20, 2, 5, 35). *S. m. 4* cl. VI. Porcescu Liliana (E : 2232, 5, 8, 43, 45, 7, 8, 54). Cl. VIII. Goian Laura (2250, 59, 65, 8, 77, 8, 9, 80, Picoş Sabina (E : 2258, 61—3, 70, 4, 6—8, 80, 722), Săveanu Sanda (E : 2236, 42, 4, 7 8, 52, 8, 63, 5, 80, 720, 2), *S. m. 5* cl. VI. Dumitriu Claudia (E : 2220, 4, 6, 7, 35, 8, 40, 3). Cl. VIII. Gogu Radu (E : 2236, 7, 41, 61, 3—, 78, 9, 80). *S. m. 7* cl. VI. Barbu Gelu (E : 2248, 54, 9, 62, 5, 8, 73, 4, 7, 8, 80), Dumitriu Alexandru (E : 2248, 50, 65, 8—70, 2, 3, 4), Malcoci Eugenia (2220, 3, 4, 33, 5, 8, 47, 8), Rotărescu Gheorghe (E : 2220, 6, 7, 32, 59, 60, 5, 70). Cl. VII. Bîrleanu Dorel (E : 2238, 46, 8, 50, 2, 5, 7—9, 68, 74, 5), Popa Ioan (E : 2233, 4, 8, 40, 2, 3, 7—9, 52, 5). Cl. VIII. Barbă Georgeta (E : 2233, 6, 8, 40, 2, 3, 8, 50, 7, 8, 61, 3, 6, 8, 70, 6, 80 ; 6670, 720, 2), Enache Dumitru (E : 2239, 50, 3, 9—52, 5, 8, 65, 6, 8, 9, 77, 8), *S. m. 8* cl. VI. Buchholtzer Ţoreley (E : 2259, 65, 6, 9, 70, 7, 8, 80). Cl. VII. Avram Eugen (E : 2235, 8, 40, 3, 7, 8, 52, 4), Dobre Emil (E : 2248, 50, 8, 9, 65, 6, 8, 74). Cl. X. Amariţei Gheorghiţă (6644, 66, 70—6, 80, 5, 92), Fliscu Gh. (6670, 1, 3, 5, 6, 80, 1, 92, 720, 2, 4 Hulubei Marius (6636, 44, 70, 3—7, 715, 6, 20) . *S. m. 9* cl. IX. Creţi Octavian (E : 2236 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 715, 6, 20, 2, 8), Lencu Georgică (E : 2263, 70, 3, 6, 7, 80, 2, 715, 20, 2, 35). Inst. Pedagogic. Herşcovici Samoil (6670—8, 80, 2, 3, 5, 6, 95, 706).

IBĂNEŞTI (Suceava). *Şc. 8 ani* cl. VIII—Toma Elena (E : 2227, 32, 8, 42, 3, 8, 58, 80).

INOTEŞTI (Ploieşti). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Stan Gheorghe (E : 2250, 4, 5, 7, 8, 61, 3, 70, 2, 6, 81).

IZVORU (Argeş). Cl. VIII. Tilănoiu Ilie (E : 2233, 4, 42, 4, 65, 6, 8—70, 5).

IZVORUL RECE (Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Glogoveanu Aurelia (E : 2248, 54, 63, 5, 6, 8, 70, 4, 6, 7, 8, 80), Sinca Maria (E : 2233, 9, 40, 65, 8, 70, 4, 7).

LUGOJ. *S. m. 1* cl. VIII. Cădariu Ioan (E : 2081, 2—4, 90—2, 5, 6, 8—100, 4, 21, 39). Cl. XI. *Şerb Ioan* (6563—602, 5—7, 9, 10, 5, 6, 8, 21, 41, 6, 9, 61, 3). *S. m.* 2 cl. VIII. Daba Laurenţiu (E : 2243, 8, 52, 63, 5, 6, 8, 9, 74, 8), Popescu Tiberiu (E : 2236, 46—8, 54, 8, 63, 5, 8). Cl. X. *Hărăguş Ştefan* (6627, 8, 31, 2, 4, 41—4, 6, 50, 1, 3, 6, 8—61, 3, 6, 7, 70—8, 80—2, 5, 9—93, 5, 702, 7, 10, 1, 5, 20—4, 6, 31, 5, 44, 7). Cl. XI. *Brînda Rodica* (6630—4, 7, 44, 8, 53, 9, 65, 6, 7, 7—8, 80, 1, 5, 702, 6, 7, 10, 1, 3—6, 20, 2, 4, 6, 9, 35, 45, 8), *Gherea Petru* (6637, 8, 40, 1, 53, 9, 65—78, 80—2, 4, 5, 702, 3, 6, 7, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 35, 6, 45, 7, 8), Jurca Ion (6631, 4, 7, 8, 40, 53, 61, 2, 6—77, 80, 1, 5, 95, 7, 8, 700, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 2, 5, 6, 20, 2, 31, 5, 6, 44, 8). *Şerb Ioan* (6563—6602, 5, 7, 9, 10, 5, 6, 8, 21, 41, 6, 9, 61, 3).

LUPENI. Cl. IX. Poenaru Gabriela (E : 2289 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 3, 5, 720, 2, 35).

MĂGURELE (Ploieşti). Dorogheanu Ion (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2—4, 50, 63).

MARGINA (Banat). Pragay Iosif (E : 2248, 58, 63, 5, 8, 70, 7, 8).

MEDGIDIA. *S. m. 2* cl. VIII. Buţu Enache (E : 2248—53, 55—8, 63, 5, 6, 8—71, 76). Cl. IX. Pelican Gheorghe (E : 2245, 61 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2, 35). S. m. Nicolae Bălcescu cl. VII. Tones Zisu (E : 2248, 50—2, 4, 6—8, 63—71, 4, 6, 80).

MEDIAŞ. *S. m. 1* cl. XI. Moldovan Liviu (6666, 7, 70—7, 80, 96, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 4). *S.m. 2* cl. X. Georgescu Clement (6630, 3, 9, 48, 70—8, 81). Cl. XI. Orban Elek (6580, 1, 3—5, 96, 7, 9, 601, 5, 9, 11, 5, 9, 22).

MIZIL. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Bogdan Paul (E : 2238, 46—8, 50, 2, 4, 5, 8, 9), Vlădăreanu Doina (E : 2265, 6, 8—71, 6, 8, 80). Cl. VIII. Van Benedict (E : 2265, 6, 8, 70, 1, 6, 7, 80). Cl. XI. Ionescu Vasile (6644, 8, 71, 3—5, 80, 710, 5, 6, 20, 35).

MOINEŞTI (Bacău). Cl. VI. Niţu Teodor (E : 2235, 8, 40, 3, 52, 65, 8, 9). Cl. VIII. Vrînceanu Gabriela (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 6, 7).

MOLDOVA NOUĂ (Banat). Cl. X. Iancovici Elena (6670, 1, 3, 4, 6, 91, 720, 2, 4, 5, 35).

MOZACENI DEAL (Argeş). Cl. IX. Amzărescu Liliana (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 2), Iacşa Constantin (E : 2236 ; 6639, 70, 73, 4, 80, 1, 716, 20, 2), Rădulescu Ion (E : 2236, 7 ; 6670, 1, 3, 4, 6, 80, 715, 6, 20, 2), Vochin Alexandru (6639, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 2). Cl. XI. Badea Petre (6669—78, 80, 1, 713, 5, 6, 20, 2), Dună Eugen (6631, 2, 9, 41, 4, 6, 56, 63, 5, 9—72, 6, 8, 84, 5, 96, 707).

NADRAG (Banat). Cl. XI. Bobescu Gheorghe (6671, 2, 4—7, 80, 2, 4, 5, 95, 706, 20, 2, 4, 42).

NĂSĂUD (Cluj). Cl. X. Vălean Aurora (6653, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 4, 716, 20, 2).

NOVACI (Oltenia). Cl. VII. Comănescu Valentin (E : 2233, 40, 2, 3, 5, 7—9). Cl. IX. Manta Alexandru (E : 2261 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 3, 5, 720, 2).

ORAŞUL GHEORGHIU-DEJ. *S. m. 1* cl. XI. Cheinic Leonard (6628, 34, 7, 44, 8, 59, 66, 7, 80—9, Şerban Nicolae (6628, 30, 1, 40, 1, 4, 8, 53, 5, 9, 71, 3), Timaru Theodor (6628, 30, 3, 4, 7, 8, 40, 59, 63, 5—7, 9σ78, 80—3, 5, 92, 8, 703, 6, 7, 9, 15).

OBREJA (Banat). *Sc. 8 ani* cl. VI. Dumitrescu Gheorghe (E : 2220, 4—7, 32, 5, 47), Laitin Gheorghe (E : 2220, 3—6, 32, 5, 47), Lungu Maria (E : 2220, 4—6, 32, 4, 47), Marcu Ana (E : 2220, 4—7, 32, 5, 47), Meicovici Ion (E : 2220, 4—7, 32, 5, 7), Vasile Petru (E : 2220, 4—7, 32, 5, 47).

ORADEA. *S. m. 1* cl. X. Crişan Liviu (6580, 2, 7, 8, 99, 607, 9, 16, 49, 70, 1, 3—7, 80, 5, 92, 3, 5), Lazăr Virgil (6670, 1, 3—8, 80, 2, 3, 720, 2). Cl. XI. *Negruţiu Vasile* (6549, 51, 4, 5, 7—9, 61, 3, 5, 7, 71, 4, 6, 9—88, 97, 9, 601, 2, 5—7, 9, 12, 5, 8, 9, 23, 6, 8, 31, 2, 4, 6, 7, 9, 42, 6, 8, 53, 5, 8—60, 2, 3). S. m. 2 cl. X. Mănucu Dumitru (6583, 601, 9, 15, 70—7, 80, 2). S. m. 4 cl. X. Ardeleanu Aurel (6587, 801, 46, 8, 70—6, 95, 7), But Tiberiu (6582, 3, 6, 96, 9, 601, 7, 9, 15, 71, 3, 6). Cl. XI. Sabău Maria (6582, 7, 601, 15, 9, 22, 70, 1, 3—7, 95).

ORAŞUL VICTORIA. S. m. cl. X. Nan Vasile (6586, 8, 605, 15, 41, 8, 70, 1, 3—7, 80, 1, 5).

ORLEŞTI. Cl. X. Călineanu Mihai (642, 4, 70, 1, 3—7, 85, 711, 20, 2, 6, 35, 6).

ORŞOVA. S. m. cl. VI. Cristescu Răzvan (E : 2220, 4, 6, 7, 32, 40, 3, 6, 7). Cl. VIII. Stroisici Miodrag (E : 2236, 7, 61, 3, 72, 7, 7, 80, 5).

OSTROVENI (Oltenia). Sc. 8 ani cl. VII. Ionele Virginia (E : 2220, 32, 3, 5, 40, 2, 3, 8, 50, 4, 8, 9).

OŢELUL ROŞU. S. m. cl. VII. Neicu Victorian (E : 2227, 32—4, 40, 2, 3, 8), Tăroată Anghel (E : 2222, 4, 8, 50, 2, 4, 8, 60).

PALOTA (Crişana). cl. VII. Schizer Emeric (E : 2248—50, 2, 6—9, 65, 8, 77, 8).

PANCIU. *S. m.* cl. VIII — Pop Gica (E : 2220, 7, 31—4, 40, 3, 9, 58), Popa Petrişor (E : 2233, 1, 40, 2, 3, 6—8, 53, 4), *Purdilă Adrian* (E : 2220, 5—8, 32, 3, 5—9, 42, 3, 4, 6, 7, 8, 50, 2—5, 7—9, 61, 2, 5—72, 4, 6, 8—80). Cl. IX. Mînea Gheorghe (6657, 70, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 4, 9).

PARVA (Cluj). Cl. VII. Scurtu Ion (E : 2248, 50, 2, 4, 7, 9, 61, 3). Cl. VIII. Cicedea Gheorghe (E : 2248, 50, 2, 4, 7, 9, 61, 3), Rus Anton (E : 2248, 50, 2, 4, 7, 9, 61, 3), Scurtu Vasile (E : 2248, 50, 2, 4, 7, 9, 61, 3).

PATIRLAGELE (Ploieşti). *S. m.* cl. X. Băiculescu Ion (6583, 99, 601, 3, 70, 1, 3—7, 85, 95), Bîrjoveanu Constantin (6580, 3, 5, 6, 99, 609, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 95), Bancu Luigi (6583, 96, 9, 601, 9, 15, 31, 4, 41, 8, 63, 70—7, 80, 1, 4, 5, 92, 5, 7, 8, 715, 22, 4), Poşoiu Constantin (6580, 2, 3, 6, 7, 96, 606, 9, 15, 9, 30, 9, 43, 4, 6, 70—7, 80, 1, 3, 92, 5, 7, 8). Cl. XI. Andrei Titus (6599, 608, 10 , 4, 32, 4, 7, 41, 6, 8, 53, 5—7, 67, 70—7, 80, 1, 5, 95, 7, 8, 700).

PĂUNEŞTI (Bacău). Cl. VIII. Berbece Maria (E : 2222, 5, 6, 33, 40, 2, 3, 6, 8), Bogdan Marita (E : 2226, 7, 31, 45—8, 50, 4, 8), Gheorghiu Gabriela (E : 2222, 3, 38, 42, 6, 7, 50, 8), Novac Maria (E : 2223, 5, 6, 35, 8, 42, 3, 5, 7, 8), Rizuc Rodica (E : 2221—3, 31, 8, 46, 8, 50, 8, 9).

PETROŞANI. Cl. VIII. Cantacuzino Smaranda (E : 2220, 1, 3—7, 32, 3), Ştefan Mircea (E : 2213, 27, 8, 32, 3, 5—7, 40, 2, 3, 7, 61, 3, 70, 6). Cl. IX. Paicu Nicolae (6609, 29, 39, 53, 9, 60, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 5, 95). Cl. X. Joni Nicolae (6581, 2, 6, 601, 5, 44, 6, 73—8, 80). Cl. XI. *Oprişiu Cornel* (6579, 82—8, 99, 601, 7, 9, 15, 6, 9, 36, 48, 9, 59, 61, 6, 7, 70—7, 80, 1, 92, 3, 5, 7, 706, 7, 9).

PEŞTEANA JIU. *S. m.* cl. IX. Cojocaru Stefan (E : 2236, 63 ; 6646, 2, 5, 7, 8, 63).

PIATRA NEAMŢ. *Sc. 8 ani nr. 3* cl. VIII. Ioanovici Adrian (E : 2248, 56, 8, 63, 5, 6, 8, 70, 4, 7, 8, 80).

PITEŞTI. *Sc. 8 ani nr. 4 cl.* CII. Ruse Lilian (E : 2220—3, 32, 40, 2, 3, 5). *Sc. 8 ani nr. 10* cl. VI. Mîndruţeanu Dan (E : 2233, 8, 40, 3, 8—50, 3). *Sc. 8 ani nr. 17* cl. VIII. Burlacu Gheorghe (E : 2222, 32, 3, 6, 40, 2, 3, 8, 63).

S. m. 1 cl. IX. Bardici Mihail (E : 2228, 31, 6, 7 ; 6583, 601, 9, 15, 70, 3, 6, 80, 2, 5) Dumitrache Ion (E : 2228, 9 ; 6580, 3, 5, 6, 8, 99, 601, 9, 15), Dumitru Nicolae (E : 2228 31, 6 ; 6583, 601, 9, 15, 70, 3, 7, 80, 2, 5), Iordache Romana (E : 2228, 61 ; 6596, 609, 15, 70, 3, 6, 9—82, 5), Trandaş Constantin (6583, 6, 601, 9, 15, 70, 3, 6, 7, 80, 2, 5). Cl. X. Bulat Alina (6582—6, 8, 601, 70, 3, 5—7, 80). Cl. XI. Nimereală Virgil (6582—6, 8, 601, 2, 5, 70—6 Tănăsescu Didona (6558—88, 601, 6, 7, 70, 3, 5, 6, 7, 80). *S. m. 3* cl. XI. Zarafie Ion (6601) 5, 7, 41, 4, 53, 60, 3, 96, 8, 706, 7).

PLOIEŞTI. *Sc. 8 ani nr. 9 cl.* VIII. Niţă Stelian (E : 2224, 8, 36, 43, 5, 63, 609, 70, 5). *Sc. 8 ani nr. 12* cl. VIII. Steriu Alexandru (E : 2220—2, 4, 7—9, 32). *Sc. 8 ani nr. 21* cl. VIII. Drăgan Elvira (E : 2229, 33, 6, 48, 50, 63, 6, 70, 6), Stoica Georgeta (E : 2224, 31, 48, 50, 3, 8, 63, 76), Toma Liviu (E : 2224, 42, 7, 8, 54, 7, 61, 3, 70, 6). *S. m. 1 I. L. Caragiale* cl. VI. Gheorghiu Mihai (E : 2232, 3, 5, 40, 3, 7, 8, 54). Cl. VII. Manolescu Paul (E : 2220, 2, 7, 32, 4, 5, 40, 7), Marcovski Carmen (E : 2240, 3, 6—8, 54, 6, 8, 63, 81), Olteanu Gheorghe (E : 2265, 6, 8, 70, 5—8, 80), Păun Ana (E : 2220, 7, 33, 4, 40, 3, 2, 7, 50), Teodoru C. Mihai (E : 2220, 5, 7, 34, 40, 2, 3, 8, 57, 8). Cl. VIII. Boaldă N. Nicolae (E : 2221, 33, 6, 7, 48, 50, 70, 3, 6), Ionescu Ioana (E : 2248, 50, 2, 6, 7, 8, 61, 3), Cl. IX. Anghel Paul (6599, 601, 9, 15, 39, 70, 1, 3, 4, 6, 80, 3, 5), Dinescu Iulian (6583, 601, 9, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5), Olteanu Raluca (6639, 49, 53, 65, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2). Cl. X. Andronescu Dan (6580, 2, 3, 6, 7, 99, 601, 15, 31, 44, 70, 1, 3—7, 95—7), Apostolescu Dan (6583, 5, 99, 630, 1, 9, 44, 67, 70, 1, 3—7), 80, 2, 5, 93, 8), Barbu Constantin (6634, 71—8, 80—2, 4, 5, 96, 720), Brandabur Liviu (6671—8, 81, 2, 5, 95, 720, 2, 4, 35), Grecicovski Alexandru (6620, 34, 70—3, 5—8, 80, 1, 4, 5, 96, 716), Dinu Marian (6580, 2—8, 96, 7, 9, 601, 3, 5—7, 9, 15, 8, 21, 31—4, 9, 41—4, 6, 8, 9, 53, 6, 61—3, 5). Dumitrescu Gheorghe (6615, 7, 20, 31, 4, 70, 1, 3, 4, 7, 8, 80, 4, 5), Pădure Nicolae (6634, 70—7, 80, 1, 4, 5, 96, 720, 2, 35), Petru Stelian (6582, 6, 7, 99, 601, 5, 7, 9, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 91, 5, 720, 2, 3), Putzlacker Vica (6655, 70, 1, 3—7, 81, 2, 91, 711, 20, 3, 4, 33), Oprea A. Cornel (6620, 34, 70—3, 5—7, 80, 1, 4, 5, 96, 716, 20, 2), *Reghină Vasile* (6582—5, 6, 8, 99, 601, 5, 7, 9, 13, 5, 6, 8, 20, 30—2, 4, 9, 41, 4, 6, 8, 53, 7, 64, 70—8, 80, 2, 5, 93), Saulea Emil (6644, 8, 59, 70—2 5, 6, 8, 85, 710, 5, 20, 2, 35), Simion G. G. (6505, 6, 30, 2, 7, 46, 65, 73, 5—9, 82, 6, 93, 5, 603, 4, 20, 1, 3, 30, 1, 3, 4, 6, 9, 41, 2, 6, 9, 51, 60—3), Stoian Liviu (6630, 44, 70—8 81, 3, 5, 91, 5, 6, 720, 2), Ştefănescu Doru (6523, 82, 6, 99, 601, 05, 07, 9, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 95), Ştefănescu Elena (6670—7, 81, 2, 91, 5, 711, 20, 2, 4, 35), Tănăsescu Octavian (6580, 2, 3, 6, 7, 99, 601, 15, 30, 1, 9, 44, 67, 70, 1, 3—7, 82, 95). Toader Gheorghiu (6582, 8, 99, 601, 9, 15, 6, 46, 66, 70, 6, 80, 92, 3, 8), Tudor Dumitru (6580, 3—5, 8, 99, 601, 5, 7, 9, 15, 6, 8, 21, 34, 41, 2, 4, 8, 53, 66, 70—77, 80, 1, 3, 9, 92, 3), Vasiliu Constantin (6586, 610, 21, 30, 4, 41, 61, 2, 78, 80, 4, 91, 6, 707), Vasilescu Doina (6671—5, 7, 8, 80—2, 5, 91, 5, 6, 720, 22, 4, 35), Vişoianu Mihai (6634, 39, 70—76, 8, 80—2, 96, 720), Vlad Constantin (6670, 1, 3, 5—7, 80, 1, 4, 96, 735, 40). Cl. XI. Davidescu Radu (6581—4, 7, 97, 9, 601, 09, 15, 39, 44, 8, 59, 63, 5), Ivan Sorin (6582, 3, 7, 97, 609, 15, 39, 63, 70—3, 5, 6, 80, 3, 700), *Oprescu Gabriel* (6580, 1, 5—8, 90, 1, 3, 6, 7, 9, 601, 5—7, 9, 11, 5, 8, 21, 2, 7—9, 31, 4, 7—42, 4, 6, 8, 55, 7—9, t63, 5), Săvulescu Alexandru (6605, 15, 33, 4, 67, 70—8, 82, 5, 706, 15, 22), Vasilescu Mihai (6580, 2, 3, 5, 97, 9, 601, 66, 7, 70—8, 85, 703, 13, 5, 20, 2, 3, 6), *Vrinceanu Vasile* (6549, 50, 2, 68, 76, 8, 81, 7, 9—92, 606, 12, 21, 34, 7, 8, 40—2, 3, 51, 5, 7, 61, 2, 5—8, 70—81, 3, 6, 91, 2, 7, 9, 706—8). *S. m. 2* cl. V. Florescu Gheorghe (E : 2232, 4, 5, 40, 3, 8, 50, 63). Cl. VIII. Mazăre Alexandru (E : 2228, 9, 30, 7, 45 ; 6580, 3, 4, 6, 601, 9, 15, 70—7, 80, 1, 4). Cl. X. Georgescu Marius (6582, 3, 6, 8, 99, 601, 7, 9, 14, 5, 22, 44, 8), 53, 7, 65, 6, 70, 1, 3—8, 80, 5, 95, 6), *Stan Emil* (6591, 6, 8, 600, 2—4, 6, 8, 10—3, 7, 4, 20, 1 3, 6, 30, 2, 42, 9, 52, 3, 6, 8, 9, 61, 2, 70—82, 5, 95, 710, 5, 26, 41). S. m. 3 cl. VI. Micu Gheorghe (E : 2235, 8—40, 3, 7, 8, 54), *S. m. 4* cl. VIII. Vasilache Dan (E : 2227, 8, 31, 3, 5, 8, 40, 3, 5 ; 6615). *S. m. 5.* cl. X. Teodorescu Ştefan (6580, 2, 3, 5, 7, 99, 601, 9, 15, 6, 46, 9, 57, 70—7, 83, 91—3, 6). *S. m. 6* cl . VII. Avramescu Mircea (E : 2229, 32, 3, 42, 3, 6, 7, 8, 50, 4, 7, 8), Găvenea Georgeta (E : 2222, 4, 7, 32, 5, 43, 54, 7), Răduţă Viorel(E : 2220, 33, 43, 7, 57, 68, 9, 80). Cl. IX. Tudor Doina (6580, 3—5, 8, 99, 601, 09, 15, 6, 73, 93). Cl. X. Cucoş Luminiţa (6582, 7, 97, 9, 601, 15, 22, 44, 70, 5—7), Popescu Lucia (6582, 99, 601, 15, 44, 70, 5—7, 87, 720, 2), Rizea Emilia (6580—2, 97, 9, 601, 15, 39, 44, 70, 3, 4, 6, 7, 720). Cl. XI. Tudoran Constantin (6666, 7, 70—7,

83, 703, 7). Absolvent Minculescu Gheorghe (6583, 5, 8, 9, 91, 5, 9, 603, 33, 9, 42, 6, 59, 66, 7, 70, 8, 80—3, 5, 8, 710, 11, 3, 5, 6, 20, 2, 35, 48).

PLOIESTORI (Ploiești). *Șc. 8 ani* cl. VII. Stancu T. Ion (E : 2224, 7, 31, 3, 4, 6, 42, 4).

POIANA LACULUI (Argeș). *Sc. 8 ani* cl. VIII. Teiușan Marin (E : 2220, 4, 6, 32, 48, 54, 8, 61, 3).

POTCOAVA SIREȘTI (Argeș). *Șc. G. 8 ani* cl. VIII. Bălănescu Marin (E : 2220, 4, 7, 9, 32, 3, 6, 40, 3, 5—8, 63). S. m. cl. XI. Stancu Ion (6586, 609, 15, 6, 31, 46, 70, 1, 3, 5—7, 93).

PREDEAL. *S. m.* cl. XI. Ioniță Maria (6581, 97, 605, 7, 9, 11, 15, 8, 24, 5, 31, 4, 46, 59).

PRISĂCANI (Iași). *Sc. 8 ani* nr. 1 cl. VI. Miron Elena (E : 2220, 3—7, 32, 5, 8, 9, 44, 6, 7). Cl. VII. Goldon Elena (E : 2220—7, 31—5), Stanciu Eugenia (E : 2220—7, 31, 4).

PUCIOASA (Ploiești). cl. XI. Untaru Virgil (6582, 7, 605, 9, 34, 41, 4, 8, 70, 1, 3—7).

RĂCARI (București). Cl. X. Călinescu Liviu (6601, 9, 15, 6, 53, 70—4, 6, 7, 82, 3, 5, 93), Ene Gheorghe (6584, 607, 16, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 93, 5, 720, 2), Pușcașu Gheorghe (6584, 601, 7, 9, 16, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 93, 5)

RĂDĂUȚI. *S. m 2* cl. XI. *Weinstein Jack* (6803—28, 30—2, 6, 9, 43, 4, 6, 630—5, 7, 41, 4, 8, 53, 5, 7, 9, 61—3).

RADOȘI (Oltenia). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Rădulea Angela (E : 2248, 9, 50, 2—4, 7, 8, 63).

RECAȘ (Banat). cl. X. Sîrbovan Emil (6665, 70, 3—7, 80, 7, 92, 720, 2).

RÎMNICUL VÎLCEA. *Ș. m. 2* cl. X. Crudu Valentin (6670—7, 80, 2, 711, 6, 20, 2, 4, 6), Rîmniceanu Emilian (6670, 1, 3—7, 80, 2, 716, 20, 2, 4, 6). Cl. XI. Dina Marin (6580, 2, 3, 7, 97, 605, 7, 9, 11, 3, 5, 31). *Ș. m. 3 N. Bălcescu* cl. X. Popescu N. Constantin (6666—8, 70—8, 80, 90, 2, 3, 7, 8). Cl. XI. Constantinescu Nicolae (6582—5, 604, 3, 70, 3, 6, 7, 80, 2). Absolvent Porumbiu Alexandrina (6583—5, 628, 66, 70—7).

ROMAN. Cl. X. *Căpățînă Valeriu* (6567, 87, 8, 99, 618, 30, 4, 39, 41, 4, 6, 61, 3, 5—8, 70—7, 9—81, 83, 4, 92, 3, 5—8, 707, 11, 2, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 48).

ROȘIORII DE VEDE. *s. m. 1* Nedelea Ion (6637, 55, 8, 9, 67, 9—77, 80, 5, 99). *S. m. 2* cl. XI. Blotz Adrian (6580, 1, 7, 99, 601, 9, 15, 30, 2, 4, 48, 53, 9, 66, 7, 70—8, 706, 9).

RUPEA (Brașov). Cl. VIII. Marinovici Iuliana (E : 2226, 31, 2, 3, 5, 8, 42, 3, 7), Boldea Nicolae (6583, 609, 15, 39, 70, 1, 3—7, 98).

SĂCUENI (Crișana). Cl. IX. Silaghi Meluzina (6581, 6, 97, 605, 9, 34, 70, 8, 80).

SALCAI (București) cl. VIII. Neșu Ion (E : 2198, 202, 3, 11, 6, 8, 20, 6, 32), Răduca Liliana (E : 2198, 201, 3, 15, 6, 8, 20, 32).

SARMAȘ. cl. X. Cubleșan Ion (6586, 99, 609, 15, 41, 6, 9, 70, 3—7, 80, 95), Moldovan Vasile (6583, 6, 99, 608, 15, 6, 30, 41, 8, 70—7, 95, 7).

SATU MARE. *s. m. 1.* Bokov Carol (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 2, 5, 711, 2, 20, 2, 4). Cl. X. Nicoară Aurel (6665, 70, 1, 3—6, 80, 1, 5, 722). S. m. 2 cl. X. Nemeș Gavril (6582, 3, 5, 6, 8, 96, 9, 601, 9, 15, 46).

SEBIȘ. S. m. cl. VIII. Fărcaș Lazăr (E : 2220, 9, 30, 2, 3, 54, 8, 61, 3). Cl. IX. Boțis Terentie (E : 2228, 36, 7, 61, 3 ; 6601, 9, 15, 63, 70, 6, 7), Jiurca Stefan (E : 2228, 36, 7, 61, 3, 83, 6, 601, 9, 70, 6, 7).

SIBIU. sc. 8 ani nr. 1 cl. VII. Zaharia Nicolae (E : 2233—5, 8, 9, 40, 2—5, 7). *Sc. 8 ani nr. 4* cl. VII. Laschescu Dorin (E : 2220, 3—7, 31, 2). *Sc. 8 ani nr. 7* cl. VII. Marinuș, Marin (E : 2248, 50, 2, 8, 63, 5, 6, 8). *Sc. 8 ani nr. 8 cl.* VIII. Soroi Ilie (E : 2231—3, 40 2, 4, 7). *S. m. 1* cl. IX. Babeș Carmen (E : 2231, 6, 9, 45, 63 ; 6583, 6, 615, 39, 70, 3, 6, 80, 2), Buzoianu Mureș (E : 2228, 36, 7, 45, 61 ; 6599, 601, 9, 15, 58, 63, 70, 3), Pompilian Alexandru (E : 2236, 7, 45 ; 6599, 657, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 3), Roșu D. (E : 2231, 36, 45, 63 ; 6586, 615, 39, 70, 3, 6, 80, 2, 3). S. m. 2 cl. IX. Bodnari Petre (E : 2236, 63, 85, 601, 9, 15, 41, 70, 4, 6, 7, 720), Bucur Doina (E : 2236, 61, 3, 601, 9, 15, 41, 70, 720), Codrea Maria (E : 2236, 63 ; 6580, 3, 609, 41, 70, 1, e3, 4, 6, 7), Costea Ștefan (E : 2236, 41, 57, 61, 3, 70 ; 6601, 9, 15, 76, 82, 720), Moisescu Sanda (E : 2236, 63 ; 6580, 3, 609, 41, 70, 3, 4, 6, 7), Oprean Ion (F : 2236 ; 6601, 9, 15, 41, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2), Popovici Angela (E : 2236, 61, 3, 5, 83 ; 6601, 9, 41, 62, 70, 6, 720), Sîrbu Carmen (E : 2236, 63 ; 6583, 601, 9, 15, 70, 4, 6, 7, 720, 2). Cl. X. Bulea Alexandru (6632, 41, 6, 70—2, 5, 6, 8, 80, 1, 97, 707), Trălicui Lucia (6554, 84, 6, 601, 9, 31, 4, 67, 74, 7, 8, 711), Luca Ilie (6583, 601, 9, 15, 31, 2, 5, 67, 70—3, 5, 6, 80), Opreanu Constantin (6601, 9, 15, 31, 2, 5, 41, 6, 67, 70, 1, 3—6, 80, 1, 96), Rău Letiția (6609, 15, 32, 41, 6, 70, 1, 3, 5, 6, 81, 96), *Trif Nicolae* (6581, 2, 7, 96, 7, 603, 5, 6, 7, 9, 14, 6, 8, 9, 21, 3, 30—2, 4, 5, 41, 2, 6, 8, 61—3, 5—7, 70, 1, 3—7, 80, 5, 93 707), Zamfirescu Doru (6586, 609, 15, 31, 2, 3, 5, 46, 67, 70, 1, 3, 5, 6, 80). Cl. XI. Durac Adrian (6587, 659, 66, 70, 1, 3, 6, 7, 8, 80, 1, 5, 707), Fulea Ilie (6580—3, 7, 601, 5, 9, 15, 31, 2, 5, 46, 56, 9), Gal Alexandru (6582, 7, 634, 44, 66, 70, 1, 4—8), Nicoară Ioan (6581, 7,

601, 5, 9, 31, 2, 4, 44, 6, 57, 9, 66, 70—2, 5), Săbăi Mircea (6582, 87, 631, 4, 44, 59, 66, 7, 70—8, 81, 5). *S. m. 3.* Cl. IX. Blăjan Petru (6580, 3, 609, 18, 46, 9, 70, 3, 6, 80 , 5), Bratu Ecaterina (E : 2241, 5, 60 ; 658 , 3, 609, 46, 9, 70, 3, 6, 80), Chitic Elena (E : 2261, 3, 609, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 720, 2), Mădan Valentin (E : 2241, 5 ; 6580, 3, 6, 609, 18, 73, 4, 6, 80). Nicula Vasile (E : 2237, 61, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 720, 2, 35), Popovici Dumitru (E : 2241, 5, 6, 60, 1, 3 ; 6580, 3, 6, 609, 70, 3, 6, 80, 5), Olaru Ieronim (E : 2228, 36, 7, 45 ; 6599, 601, 9, 15, 8, 46, 70), Radu Emilia (E : 2241 ; 6580, 3, 609, 49, 70, 3, 6, 7, 80), Roman Dan (E : 2228, 36, 7, 45, 61, 3, 601, 9, 15, 8, 46), Tărăboi Dana (E : 2228, 9, 60, 1, 3 ; 6586, 601, 15, 46, 9, 80, 5). Cl. X. Modran Liviu (6657, 66—8, 70—7, 81, 3, 5, 95, 7), *Magda Radu* (6582—6, 8, 99, 601, 5, 7, 9, 15, 30—2, 4, 6, 44, 6, 9, 57, 65, 7, 70—7, 9—83, 86, 95, 7, 8), Manițiu Ioan (6583, 5, 6, 601, 5, 9, 15, 70, 3, 6, 7, 85), Mihai Mircea (6583, 601, 5, 9, 15, 43, 70, 3, 6, 7, 80, 1, 5), Răducu Ion (6583, 5, 601, 5, 9, 15, 70, 3, 6, 7, 80, 5), Zăgan Dumitru (6628, 41, 61, 6, 7, 70, 7, 9—81, 3, 5, 9, 91—5, 700, 2, 3, 6, 7, 13, 5, 6, 20—2, 35, 6, 44, 5, 8). Cl. XI. Arsenie Aurel (6580—3, 5—7, 97, 601, 5, 9, 15), Călin Venera (6580—4, 8, 97, 601, 5, 7, 9, 48), Lăutărescu Dumitru (6581, 3, 5, 6, 97, 601, 15, 37, 44, 8, 70, 3, 6), *Marinuș Radu* (6581, 9—96, 9, 606, 7, 9, 11, 4, 7, 20—2, 4—6, 30, 1, 4, 6, 53, 60, 2, 3, 70—8, 93), Popescu Adriana (6584, 5, 630, 1, 4, 7, 9, 43, 4, 63, 4, 6, 7, 9—78, 80, 2, 700), *Dăncilă Ioan* (6514, 23, 8, 30, 1, 5, 7, 8, 40, 2—4, 7, 8, 50—2, 60, 4, 5, 8, 70, 3, 4, 8, 83, 8, 606, 10, 24, 5, 8, 31, 4, 9, 40—4, 6, 53, 6, 7, 60—3, 94, 603), 11—3, 22, 7, 35, 47, 8, 51, 4, 8, 68, 79, 82, 4, 6, 7, 90, 1, 4, 9, 701, 10, 1, 3—7, 20—9, 21—7, 9—42, 4—6, 8, 9, P), *Geleriu Dan* (6581, 9—93, 5, 6, 610, 25, 30, 1, 4, 7, 44, 6, 8, 53, 5, 7, 9, 62, 3, 5—7, 70—8, 85, 7, 93, 5, 700, 6, 7, 9, P).

SIGHIȘOARA. *S. m. 1* cl. X. Anonim (6670—4, 6, 8, 81, 710, 5, 20, 2, 4).

SIMERIA. Cl. IX. Igna Ion (E : 2236, 45, 61, 3 ; 6583, 601, 9, 15, 8, 46, 70, 3, 6, 7), Wichmann Christian (E : 2228, 36, 45, 51, 3 ; 6583, 609, 49, 70, 3, 4, 6, 7).

SINEȘTI Ar eș). *Sc. 8 ani* cl. VIII. Rădoi Ion (E : 2218. 20, 4, 7, 9, 32, 8, 40, 3—8, 52, 8, 63).

SÎNMARTIN (Crișana). cl. XI. Leuca Moise (6581—6, 609, 15, 31, 71, 3, 4, 6).

SINNICOLAUL MARE. cl. XI. Raica Gheorghe (6581, 2, 6, 601, 9, 28, 66, 70—7).

SINTANA (Crișana). Cl. IX. Roman Floare (E : 2236, 45, 60, 1—4, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2).

SIRET (Suceava). Cl. IX. Tinuc Vasile (E : 2258, 61—3, 74, 5 ; 6670, 4, 6, 80, 1, 720, 2). Cl. XI. Alexa Dumitru (6582—5, 7, 8, 96, 9, 601, 9, 15, 70, 3, 6).

SLATINA (Argeș). Cl. X. Buicescu Radu (6670—4, 6, 7, 710—2, 5, 6, 720, 2, 4, 6, 35).

SORTILE (Ploiești). Sc. 8 ani cl. VIII. Buzețeanu Ion (E : 2248, 50, 7—63, 74, 8, 9).

SUCEAVA. *S. m. 1* cl. IX. Cazan Sergiu (E : 2261, 3 ; 6583, 4, 601, 9, 15, 57, 70, 3, 6, 7). S. m. 2 cl. IX. Constantinescu Nicu (6586, 97, 609, 41, 6, 53, 70, 3, 6, 83), Lupășteanu Lucian (E : 2236, 42, 63, 84, 6, 646, 70, 3, 6, 80, 1, 3).

ȘTEFĂNEȘTI (Argeș). Cl. VI. Popescu Cristian (E : 2223, 5, 7, 9, 31, 3, 5, 40, 2, 3, 5, 7), Patriche Dorinel (E : 2220, 7, 33, 5, 40—3, 7). Cl. VII. *Picol Gheorghe* (E : 2210, 1, 3, 5—26, 31—6, 8—40, 2—7 ; 6596, 609). Cl. VIII. Postelnicu Petre (E : 2222, 8, 32, 4, 6, 43, 5, 56, 7, 61, 3, 70, 5), Răducu Aurel (E : 2220, 7, 31, 3, 5, 6, 42, 3, 7).

SIMLEUL SILVANIEI. Cl. X. Atodiroaie Mihai (6571, 84, 601, 9, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 5, 720).

TARIVERDE (Dobrogea). *Sc. 8 ani* cl. VII. Stere Mitică (E : 2233, 5, 6, 8, 47, 8, 54, 63, 5, 6, 8, 9, 76, 80 ; 6670, 6, 720, 2).

TECUCI. *S. m. 1.* cl. X. Ioan Florin (6670, 1, 3—7, 82, 711, 5, 6, 20, 2).

TIMIȘOARA. *Șc. 8 ani nr. 3* cl. VIII. Crișan Ovidiu (E : 2228, 34, 6, 50, 61, 3, 609, 70, 3, 6). *Ș. m. 1* cl. VIII. Teleagă Maria (E : 2230, 3—8, 41—7). *S. m.* 2 cl. VII. Castan Sergiu (E : 2220, 1, 5, 32, 3, 42, 8, 50). Cl. XI. *Popovici Cornel* (6503, 5, 7, 16, 8, 25—7, 32, 4, 5, 42, 9, 51, 5—9, 61, 3, 5—7, 72—4, 6, 7, 9, 82—5, 7, 601, 3, 9, 66, 7, 9, 70, 1, 4—7, 85, 706, P). S. m. 10 cl. XI. Samoilă Mircea (6580—8, 97—9, 601—9, 11, 3, 5, 6, 8, 22, 4, 5).

TÎRGOVIȘTE. *Sc. 8 ani nr. 2* cl. VII. Chivăran Laura (E : 2223, 7, 32, 4, 8, 42, 5, 8, 52, 7). *S. m. 1* cl . VII. Popa Cornel (E : 2233, 8, 40, 2, 3, 7, 8, 52, 3, 70, 7, 8). *S. m. 2* cl. VIII. Năduh M. Ion (E : 2234, 40—3, 6, 50, 7). Cl. X. Enache Gheorghe (6656, 66, 7, 70—86, 92, 5, 7, 8, 707, 10, 1, 4—6, 20, 2, 4, 6, 8, 31, 3, 5, 6, 48). Cl. XI. Tudor Andrei (6580, 2, 5, 6, 601, 15, 37, 48, 69—77, 80, 2). S. m. 3. *Niculescu Constantin* (6503, 6—8, 13, 25, 7, 49, 50, 66, 80, 2—4, 90, 2, 7, 601, 5, 9, 10, 14, 5, 8, 22, 31, 42, 4, 6, 8, 51, 7, 60, 2, 3).

TIRGU JIU. *Sc. 8 ani nr. 3* cl. VIII. Dănăi G. Pepile (E : 2220, 7, 33, 6, 40, 3, 63, 6, 70). *Ș. m. 1* cl. VIII. Coară Maria (E : 2235, 6, 42, 7, 8, 63, 5, 8, 66 ; 6615, 70). Cl. IX. Bardan Ion (6583, 601, 9, 15, 65, 70, 2, 4, 6, 7, 720, 2), Budianu Dumitru (E : 2228, 31, 4, 61 ; 6583—5, 601, 70, 4, 6, 7), Gelepu Marcel (E : 2236, 7, 41, 5, 9, 61, 3, 70, 3, 4, 6,

7, 85) Ghica Gheorghe (E : 2261, 3, 4 ; 6583, 5, 601, 9, 70, 3, 4, 80, 4), Ilie Evantia (E : 2236, 45, 63, 83, 4, 6, 601, 9, 70, 6, 7, 80, 5), Sîrbu Ion (E : 2236, 63, 4 ; 6001, 9, 15, 70, 6, 7, 720, 2). Cl. X. Berculescu Dan (6601, 35, 70—4, 5, 6, 8, 85, 700, 2), Baros N. Ion (6631, 44, 66, 70, 3—8, 85, 700), Buşe Florian (6582, 7, 605, 34, 44, 71—4, 5, 8, 81, 700), Curcanu George (6630, 1, 3—5, 9, 41, 4, 5, 8, 51, 3, 60, 6, 7, 70, 2—8, 80, 5, 7, 90, 1, 3, 5, 700, 2, 20, 2, 6, 35, 8), Duncea Florin (6583, 4, 615, 35, 70, 1, 3—7, 720), Duncea M. (6615, 70—4, 76, 8, 720, 2, 35), Ghiţulescu Adriana (6586, 601, 15, 34, 5, 66, 70—3, 6, 7), Haranaciu Vasile (6634, 5, 70, 1, 3, 4, 6—8, 700, 20, 2, 35), Negomireanu Vasile (6631, 44, 66, 70, 2—8, 85, 700), Pestroiu Daniel (6588, 607, 16, 8, 9, 31, 4, 5, 9, 41, 4, 6, 53, 7, 63, 6, 7, 70—8, 80, 3—6, 92—9 , 700), Pîrvulescu Sevastiţa (6601, 15, 34, 5, 9, 70—4, 6—8), Stăncu-lescu Mihai (6601, 9, 15, 34, 5, 63, 6, 7, 85, 70—8). Cl. XI. *Bîrsan Nicolae* (6581, 4, 8, 96, 607, 16, 9, 21, 3, 31—4, 7, 9, 44, 6, 8, 53, 9, 62, 4—7, 70—8, 80—2, 4, 5, 91, 3, 5, 7, 8, 700, 7, 9). S. m. 2 cl. IX. Canorea Maria (E : 2236 ; 6558, 605, 22, 46, 61, 3—5, 80, 3, 4), Ciocăzanu Ioana (E : 2229, 63 ; 6558, 99, 615, 46, 70, 6, 80, 1, 5), Costescu Ionel (E : 2231, 61, 3, 4 ; 6580, 3, 97, 605, 9, 53, 9, 65, 70, 80, 5), Dragomir Marsilia (E : 2231, 6, 63 ; 6558, 9, 615, 46, 70, 6, 80, 1, 5), Fagu Maria (E : 2219, 31, 6, 42, 63, 4 ; 6646, 58, 61, 5, 87), Găman Ioana (E : 2236, 61—4 ; 6558, 609, 22, 46, 54, 80, 1).

TÎRGU LĂPUŞ. *S. m.* cl. VIII. Cupşor Mariana (E : 2220, 2, 7, 32, 6, 40, 3, 54, 63). Cl. IV. Santa Viorel (6580, 3, 4, 6, 601, 9, 15, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 2). Cl. X. Nechiţa Ileana (6583, 4, 601, 9, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1), Pătruţ Virgil (6583, 4, 6, 601, 9, 15, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1).

TÎRGU MUREŞ. *S. m. 1* cl. VI. Sonnenfeld Gabriel (E : 2233, 40, 3, 6, 8, 58, 68, 77). Cl. VIII. Simovici Igor (E : 2220, 3, 4, 6, 8, 32, 6, 40, 3). *S. m. 4* cl. X. Doboş Alexandru 6580, 2, 4—7, 96, 9, 609, 18, 30, 4, 44). *S. m. 5* cl. VIII. Doina Ichim (E : 2248, 50, 7, 8, 9, 63, 8, 78), Enache Radu (E : 2250, 3, 4, 7, 8, 61, 2).

TÎRGU NEAMŢ. Cl. IX. Aspasie Ion (6583—6, 96, 7, 601, 9, 15, 39, 46, 7, 53, 70, 3, 4, 6, 7, 85, 95, 7, 8).

TÎRNOVA (Crişana). Sc. 8 ani cl. VIII. Grada Elena (E : 2222, 31—4, 6, 43, 5, 6, 63).

TITU GARĂ. Cl. X. Bărbulescu Alexandru (6582, 3, 5, 6, 605, 7, 15, 32, 70, 80, 1, 7,

TORMAC (Banat). Cl. VI. Ban Gheorghe (E : 2213, 26, 33, 8, 40, 2, 3, 7), Duică Alexandru (E : 2246, 8, 50—2, 4, 7, 8), Gaal Iuliana (E : 2212, 8, 33, 6, 42, 3, 6, 8, 50—2, 7, 8), Jenea Petru (E : 2213, 26, 33, 8, 40, 2, 3, 7, 50—2, 4, 7, 8). Cl. VII. Nagy Iuliana (E : 2213, 26, 33, 8, 40, 2, 3, 6—8, 50—2, 4, 7, 8), Szücs Iuliana (E : 2213, 26, 33, 8, 40, 2, 3, 7).

TRUŞEŞTI (Suceava). *S. m.* cl. VII. Sandu Eugenia (E : 2233, 40, 3, 6, 8—50, 3, 8). Cl. IX. Hoidrag Didina (6583, 601, 9, 15, 70, 3, 4, 6, 77, 80, 3, 5), Roşu Mircea (E : 2228, 9, 31 ; 6583, 601, 9, 15, 70, 3, 4, 6, 7, 85). Cl. X. *Carpiuc Dumitru* (6580, 2—8, 95—7, 9, 601, 5—7, 9, 10, 15, 6, 8, 21, 30—4, 9, 41, 2, 4, 6, 8, 9, 53, 60, 1, 3, 5, 7, 70, 3—7, 80, 93), Schiopu, (6581, 6, 99, 607, 18, 39, 44, 8, 63, 77, 5, 80), Simion Constantin (6582, 3, 6, 7, 601, 6, 7, 9, 15, 7, 22, 70, 3—6), Vătămanu Dumitru (6554, 5, 7, 8, 61, 3, 7, 79, 87, 97, 605, 7, 10, 5, 41, 6, 70—6). Cl. XI. *Turculeţ Demonstene* (6628, 33, 7, 8, 40, 1, 8, 55, 7, 9, 66—86, 9, 92—3, 5—8, 700, 2, 3, 6—16, 20—9, 31—3, 5—8, 41, 4—8).

TURNU SEVERIN. *Sc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Bădescu Iulian (E : 2233, 40, 2, 3, 5, 7, 8, 50, 2, 8), Vinu Aurelian (E : 2220, 32, 5, 8, 40, 2, 3, 8, 58). Sc. 8 ani nr. 10 cl. VIII. Jianu Gheorghiţa (E : 2248, 50, 4, 8, 63, 5, 8, 720, 2). *S.m. 1* cl. V. Popescu Mihaela (E : 2224, 6, 32, 5, 7, 40, 3, 8—51). Cl. VI. Creţan Ion (E : 2220, 4, 32, 5, 47, 8, 51, 4), Oupu Florin (E : 2217, 20, 4, 32, 40, 3, 8, 53), Mijache Viorel (E : 2220, 32, 3, 5, 43, 8, 52), Nica Georgeta (E : 2220, 7, 32, 5, 8, 40, 3, 8, 50, 4), Papari Sultana (E : 2220, 4, 32, 5, 8, 47, 8, 54), Romanescu Florin (E : 2220, 7, 32, 40, 3, 8, 52, 4). Cl. IX. Gărgălie Silvestru (6580, 3—6, 99, 601, 9, 15, 53, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 95, 715, 6, 20, 2, 35), Popescu Silviu (E : 2236, 63 ; 6583, 6, 601, 9, 15, 70, 4, 6, 7, 83). Cl. X. Ionescu Mihai (6580, 2, 3, 5, 6, 609, 15, 70, 1, 3, 5—7, 80, 3, 5, 92, 8). *S. m. 2* cl. VI. Biban Irina (E : 2220, 32, 5, 8, 40, 2, 3, 5—7), Bojincă Mihail (E : 2220, 4, 32, 40, 3, 7, 8, 53). Cl. VII. Bănică Elena (E : 2224, 6, 32, 3, 8, 40, 2, 3, 7), Borcilă Mariana (E : 2224, 6, 32, 3, 8, 40, 2, 3, 7), Pîndici Doina (E : 2224, 6, 32, 3, 8, 40, 2, 3, 7). Cl. IX. Stoica Alexandri (E : 2236, 35 ; 6601, 3, 9, 15, 39, 70, 3, 4, 6, 7, 82), Zimţa Viorel (E : 2231, 6, 7, 45, 60—3, 88 ; 6580, 3, 6, 601, 9, 15, 70, 3, 6, 82). Cl. XI. Drăgan Gheorghe (6585, 6, 601, 70—3, 5, 6). *S. m. 3* cl. VIII. Dumitrescu Dan (E : 2235, 42, 7, 8, 58, 61, 3), Popescu Angela (E : 2248, 50, 2—5, 7—9, 61). *S. m. 4* cl. IX. Cioclov Viorel (E : 2231, 6, 63, 80, 601, 9, 15, 70, 3, 4, 6, 7, 82, 3, 715, 20, 2, 6, 35).

VATRA DORNEI. cl. XI. Bălan Estera (6580, 1, 3, 6, 7, 601, 9, 15, 41).

VALENII DE MUNTE (Ploieşti). Cl. VIII. Voiculescu Emil (E : 2220, 33, 4, 6, 8, 40, 3).

VĂLENI (Maramureş). Cl. VIII. Tuns Gavril (E : 2232, 5, 6, 40, 3, 7, 8, 50, 4, 63).

VADUL CRIȘULUI. S. m. cl. VIII. Vereș Ioan (E : 2228, 36, 61, 3 ; 6586, 609, 15, 71, 4, 6, 7, 80).

VÎNJULEȚ (Oltenia). Cl. VIII. Stefănescu S. Ion (E : 2235, 6, 42, 7, 8, 54, 63 ; 6670, 3, 6).

VIȘEUL DE SUS. Cl. IX. Grad D. Maria (E : 2236, 7, 45, 61, 3, 77, 8, 80 ; 6670, 8. 80 ; 4 P).

VASIEȘTI (Bacău). Cl. VIII. Tudoroaie Filica (E : 2233, 5, 6, 9, 40, 2, 3, 56, 63 ; P).

VOIVOZI (Crișana). Cl. VIII. Vesa Gavril (E : 2220, 6, 32—40, 2, 3, 6, 7).

★

Pînă la 1 mai 1965 s-au mai primit soluții bune la probleme propuse în ultimele 3 numere apărute ale G.M.-B, de la * :

ABRUD. *S. m.* cl. IX. Danciu Ionel (E : 2263, 78, 80 ; 6670, 6, 80, 1, 720, 2, 4, 42), Danciu Nicolae (E : 2261, 3, 720, 2, 4, 42, 77 ; 6670, 6, 80, 1), Hohl Maria (E : 2260—4 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 5). Cl. X. Băbuț Gheorghe (6670, 1, 4—7 ,81 3, 710, 5, 20, 2), Blonduț Ion (6670—2, 4, 6, 80, 2, 3, 95, 715, 20, 2, 4), Circău Gh. (6670, 1, 4—6, 81, 95, 710, 5, 2ă0, 2, 4). Prida Toma (6670—6, 80, 1, 3, 95, 715, 20, 2, 4). Cl. XI. Birbuț Aurel (6670, 1, 5—7, 80, 1, 3, 95, 715, 20, 2, 4).

ADJUD. *Șc. 8 ani* cl. VIII. Apostol Constantin (E : 2248, 50—7, 9 ; 6681). *S. m.* cl. VI. Pavel Mariana (E : 2248, 50—4, 65, 6, 8, 70, 1, 3, 5). Cl. XI. *Istrate Gheorghe* (6666—72, 4—7, 80, 1, 707, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 32, 5, 48, 5—17, 61—3, P.).

AIUD. *Ș. m. 1* cl. VI. Maftei F. Doina (E : 2248—50, 65, 8, 78, 86, 91). *Ș. m. 2* cl. X. Joe Ecaterina (6670, 1, 3—7, 85, 720, 2, 3, 57).

ALBA IULIA. *Ș. m. H.C.C.* cl. XI. Miclea Cornel (E : 2260, 1, 3, 4, 77, 8—80 ; 6670, 3, 6, 80, 3, 5, 716, 20, 2), Oargă Gheorghe (E : 2260—4. 77—80).

ALEXANDRIA. *Ș. m. A. I. Cuza.* Cl. X. Dobre Vasilica (6670, 1, 5, 6, 83, 710, 1, 5, 20, 2, 51, 5, 6, 64), Zlate Vasilica (6670, 1, 5, 6, 83, 710, 1, 5, 2, 51, 5, 6, 64).

ANINA. *Ș. m.* cl. XI. Almăjanu Sandu (6670, 2, 6, 7, 710, 2, 5, 20, 2, 52, 61, 2), Nicola Pavel (6670, 1, 3, 6, 7, 710, 3, 5, 6, 20, 2, 57, 62, 3), Popescu Dumitru 6670, 1, 4—7, 715, 20, 2, 35, 57, 63), Pusmik Iacob (6670, 4—7, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35, 63).

ARAD. *Ș. m. 2* cl. V. Podea Delia (E : 2248, 58, 65, 7, 8, 78, 80, 724). Cl. VIII. Boșcaiu Voicu (E : 2248—62 ; 6670, 6).

Ș. m. 3. Cl. X Munteanu Ștefan (6671, 2, 4, 5, 7, 80, 9, 710, 1, 5). Cl. XI. Zala Maria (6666, 70, 1, 3, 706, 9, 10, 3, 5, 20, 2, 51, 5).

ABRUD. Cl. IX. Furman Clara (E : 2260—4 ; 6670, 4, 6, 7, 80—3, 5).

ARDUD SAT (Maramureș). *Șc. 8 ani* cl. VII. Bratosin Dumitru E : 2233, 4, 42, 4, 55. 7—9).

AVRIG. *Ș. m. Gh. Lazăr* cl. IX. Vintilă Maria (E : 2263 ; 6670, 4, 6, 7, 85, 715, 6. 20, 2, 35). Cl. X. Zamfirescu Danila (6659, 62, 6, 71, 84, 6, 7, 601, 9, 15, 35, 53).

BACĂU. *Ș. m. 1* cl. VII. Cartaș Radu (E : 2248—50, 2, 7, 8, 65, 6, 8, 74, 82, 3). Cl. VIII. Knoll Raul (E : 2248, 50, 3, 4, 7, 8, 61, 3, 5, 6). Cl. IX. Pocărăscu Gerogeta (E : 2261, 3, 4, 78—83, 720, 2, 6). *Ș. m. 4* cl. X. Davidson Hermina (6670, 1, 4, 6, 80, 710, 1, 5, 20, 2, 35, 52, 7, 61, 7).

BACIU (Cluj). Cl. X. Incze Ele-(6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 710, 5, 6, 20, 2).

BAIA MARE. Cl. VIII. Sălăgeanu Doina (E : 2261—4, 77—80). *Ș. m. 1* cl. IX. Bender Clara (E : 2261, 3, 77 ; 6670, 4, 6, 7, 82, 720, 2, 4, 6), Filez Irina (E : 2261, 3, 7, 8 ; 6670, 6, 7, 81, 720, 2, 4, 6), Moldovan L. Mirela (E : 2277 ; 6680—5, 720, 2—4, 9), Sziksakay Tibor (E : 2261, 3, 77, 8 ; 6670, 4, 6, 7, 720, 2, 4, 6). *Ș. m. sera'ă* cl. X. Pop Andrei (6670—4, 6, 710, 5, 20, 2, 57). *Ș. m. 3* cl. VIII. Condor D. Liana (E : 2254, 9, 64—70, 3. 5—80), Palaghiță Nicolae (E : 2248, 61, 3, 5, 8, 78, 80 ; 6720, 2). Cl. IX. Apșan Dan (6675, 8, 9, 82, 3, 6, 9, 95, 6, 707, 21, 3—5, 31, 3), Gherasim Teofil (E : 2263, 8, 77, 9, 80 ; 6670—2, ,4 6, 7, 80), Grosfeld Mihai (E : 2260—4, 77—80 ; 6670, 1, 4, 6, 80, 1, 4, 97, 8, 712, 6, 20, 2—5, 50, 2, 7, 8, 60, 1). Cl. X. Radu Mircea (6678, 80, 2, 96—8, 720, 2, 36, 51, 3, 5, 7).

BALȘ. Oltenia *Șc. 8 ani nr. 4* cl. VII. Vîlceloiu Mircea (E : 2248, 50, 2, 8, 68, 76, 80, 7).

BĂBENI (Argeș). Cl. IX. Constantinescu Gheorghe (E : 2263, 79, 80 ; 6675, 80, 2, 3, 5, 716, 20, 2, 3).

BĂLĂCIȚA (Oltenia). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Buzatu Constantin (E : 2248, 50 4, 63, 5,, 8—70, 4, 7, 80).

BĂICOI. *Ș. m.* cl. X. Cismaru Dumitru (6670, 1, 5—7, 80, 710, 1, 5, 20, 2, 32, 5).

---

*) Rezolvitorii scriși cu *litere cursive* sînt evidențiați ca rezolvitori de probleme, *P* înseamnă probleme propuse, *N* note, *A* articole primite.

BECLEAN (Cluj). Cl. IX. Rusu Flaviu (E : 2277, 8, 80 ; 6670, 1, 4, 6, 80, 1, 98, 716, 20, 2, 4).

BEIUŞ. Cl. IX. Toma Ion (E : 2261, 3, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 81, 95, 716, 20, 2). Cl. X. Lazăr Nicolae (6668, 70, 1, 3—7, 92, 711, 20, 2).

BERTEA (Ploieşti). *Şc. 8 ani* cl. VII. Bucur V. Georgeta (E : 2233, 5, 8, 42, 3, 5, 7, 8, 50, 2, 4, 7, 8, 68, 90), Duţu Vl. Florica (E : 2233, 8, 42, 3, 7, 8, 50, 2, 4, 8).

BICAZ. Cl. X. Manolache Simona (6666, 7, 70, 6, 7, 80, 97, 8, 710, 5, 6, 20, 2, 4).

BISTRIŢA. *Ş. m. 1* cl. IX. Chiş Nicolae (E : 2261, 3, 77, 8, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 720, 2, 35). Cl. X. Fucă Sergiu (6666—8, 73, 8, 81—3, 91, 3, 5, 8), Liucaci Rodica (6666, 7, 82, 6, 95, 710—2, 6, 21, 3, 36), Mihăilaş Liana (6682, 95, 7, 8, 710—2, 5, 20—4, 6, 35, 6). Cl. IX. Buta I. Grigore (6666, 7, 85, 7, 92, 7, 700, 3, 11, 5, 20, 2, 54).

BÎRCA (Oltenia), *Ş. m.* cl. VIII. Popa I. Ştefan (E : 2248, 50—4, 6, 7), Proca Ştefan (E : 2248, 50, 7—9, 61, 3, 5, 7, 8, 74, 7—80, 2, 3, 90, 1 ; 6670, 6, 720, 2). Cl. XI. Peonaru Nicolae (6669—72, 4—6, 80—3, 91, 5, 8, 706, 7, 10, 1, 3—6, 22, 4, 45, 51, 2, 4, 5, 7, 63).

BÎRLAD *Ş. m. 1* cl. VIII. Agafiţei Silvia (E : 2248, 50, 8, 9, 61, 3, 5, 8, 70, 7). *Ş. m 3* cl. VII. Soare Antoaneta (E : 2248, 57, 9, 63, 5, 8, 70, 8, 80 ; 6720). *Ş. m. 3* cl. VIII. Bădulescu Mira (E : 2248, 50, 7, 61, 3, 5, 8, 70, 6—9), 720), Cornescu Magdalena (E : 2248, 56, 7, 63, 5, 6, 8, 70, 1, ,4 8, 80, 91), Dichter Mihaela (E : 2248, 51, 6, 7, 62, 3, 5, 6, 8, 70, 8, 80), Zaharia Eliza (E : 2248—50, 7, 8, 61, 3, 5, 8, 70, 8, 720, 2). Cl. IX. Cînepă Victor (E : 2248, 50, 2, 60, 4, 78—80, 9, 90 ; 6681, 2, 4, 712, 5, 20, 4, 9, 50, 8, 64), Iacomi Mihai (E : 2260, 1, 3, 4, 78, 80 ; 6670, 4, 6, 7, 80—2, 4, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 9, 35), Puni Dorin (E : 2261, 3, 79, 89, 90 ; 6670, 3, 6, 85, 715, 20, 2), Ticău Ion (E : 2261, 3, 78, 9, 89 ; 6670, 7, 80, 715, 20, 2, 4, 35, 76, 87).

BOLINTINUL DIN VALE. Cl. X. Tachescu Ionel (6667, 9—71, 4, 80, 2, 3, 710, 5, 6, 20, 35).

BOROSNEU MARE (Braşov), *Şc. 8 ani* cl. VII. Bodo Arpad (E : 2248, 50, 2, 3, 6, 7, 60,3), Szabo Irma (E : 2248, 50, 2—4, 6—60, 3).

BOTOŞANI, *Şc. 8 ani nr. 6* cl. VIII. Toma I. Carmen (E : 2250, 4, 9, 61, 5, 7, 8, 70, 5—8). *Ş. m. 1* cl. X. Dale Constantin (6670, 1, 4, 6, 7, 80—2, 98, 710, 5, 20, 2, 4, 9, 38, 42), Lazarovici Hary (6674, 5, 80, 3, 726, 35, 51, 5—7, 9, 63, 4), *Wexler Dan* (6670—2, 4 8,—80, 1, 3, 95, 7, 8, 710—2, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 35—7, 41, 40, 1, 3, 5—7, 60, 1, 3, 4, 8). *Şc. muzică şi arte plastice* cl. VIII. *Wagner Richard* (E : 3348—59, 61—3, 5, 6, 8—74, 7, 8, 80—3, 9, 1 ; 6670, 6, 716, 20, 2, 42).

BRAD (Hunedoara). *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VI. Peteu Angela (E : 2248, 50, 2, 3, 65, 70, 82) *Ş. m. 2* cl. VIII. Cordonescu Gabriel (E : 2248—51, 4, 7, 8, 61, 3, 5, 6, 8, 9, 77).

BRĂNEŞTI (Bucureşti). Cl. IX. Oprea Vasile (E : 2261, 3, 4, 79, 80 ; 6670, 1, 4, 6, 7, 80, 715, 6, 20, 6, 35). Cl. X. Minea Vasile (6670, 1, 4—7, 89, 710, 5, 6, 20, 2, 36, 7, 51, 2, 5—7, 62—4), Şeitan Marian (6670, 1, 5, 6, 710, 5, 20, 2, 35, 7, 63, 4), Ştefănescu Călin (6670—2, 4—8, 80, 1, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 51, 2, 7, 63, 4). Cl. XI. Dinescu G. Elena (6666—72, 4—7, 80, 5, 92, 5, 7, 8, 706, 7, 9).

BRAŞOV. *Şc. 8 ani nr. 6* cl. V. Zsido Eva (E : 2235, 8, 04, 3, 8—51). *Ş. m. 4* cl. VI. Diţescu Dan (E : 2242, 8, 05—2, 5, 8, 65, 73, 5, 8, 80). Cl. VII. Başag Georgeta (E : 2248, 50, 2, 4, 68, 76, 8, 80), Başag Livia (E : 2284, 50, 2, 4, 68, 76, 8, 80). Cl. VIII. David Eugenia (E : 2248, 50, 2—4, 63, 5, 8, 80). Cl. X. Cotora Gheorghe (6666, 70, 1, 4, 6, 80, 1, 92, 5, 7, 8), Pitiş Gheorghe (6666, 7, 70, 1, 4—6, 80, 1, 9, 93, 5, 710, 1, 5, 6, 20—2, 4, 35, 6, 51, 2, 5, 7, 9, 61, 3, 7, 73, 82, 90). *Ş. m. Unirea* cl. XI. Zsido Agnes (E : 2236, 7, 9, 45, 6, 9, 53, 60—4 ; 6639, 81).

BRĂILA. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Chiripirliu Gheorghe (E : 2248, 50, 6—8, 61, 2, 8, 70, 6, 9, 80, 2, 3). *Şc. 8 ani nr. 12* cl. VI. Petraru Roxana (E : 2252—4, 69—72, 82, 92). *Şc. 8 ani nr. 15* cl. VII. Tudorache Elena (E : 2248, 52, 8, 65, 8, 70, 5, 6, 80). *Şc. 8 ani* nr. 22 cl. VII. Dragomir Gheorghe (E : 2265, 66, 8—71, 4, 6). *Ş. m. 1* cl. IX. Micu Niculina (E : 2263, 4, 79, 80 ; 6670, 4, 6, 7, 85, 720, 2, 35). Cl. XI. Popa Mândiţa (6670—7, 85, 715, 20, 2, 35), Soare Aurel (6670, 6, 710, 1, 3—6, 20, 2, 35, 6), Tudorache Radu (6669—72, 4—7, 80, 1, 711—3, 5, 6, 20, 2, 4, 32, 5, 54). *Ş. m. 2 cl.* IX. Todirică Alexandru (E : 2261-3, 78—81, 5 ; 6720, 2—4, 6, 35). Cl. X. Manea Aurel (6670, 4, 5, 80, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 32, 5). Cl. XI. *Frangu Octavian* (6666, 7, 9—72, 4—85, 92, 5, 7, 703, 6, 9, 15, 20, 2, 35, 51, 4—7, 61—4). *Ş. m. 3* cl. IX. Deli Micea (E : 2260, 3 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 9, 80, 5, 720, 2, 4, 6). Cl. IX. Nicolescu Gabriel (E : 2261, 4, 77, 80 ; 6674, 7, 80—3, 720, 2), Simulescu Valeria (E : 2263, 80 ; 6670, 4, 6, 9, 80, 5, 720—2, 4). Cl. X. Adam Andaluza (6666, 70, 1, 4, 6, 80, 6, 710, 5, 20, 2, 35), Neguţ Elena (6670, 1, 4, 6, 80, 710, 5, 20—2, 4). Cl. IX. Pricop Viorel (6670, 1, 4—7, 80, 5, 710, 3, 5, 20, 2).

BREAZA. *Şc. 8 ani* cl. VI. Ivan Vasile (E : 2248, 50, 2—4, 65, 8—70), Pădure Constantin (E :2248—50, 4, 65, 8, 73, 80, 6). Cl. VII. Opriş Şerban (E : 2248, 50, 1, 4,

6, 7, 65, 8, 9, 80). *Ş. m.* cl. IX. Aldescu Constantin (E : 2263, 80, 9, 90 ; 6670, 4, 6, 7, 82, 720, 2, 4, 64), *Cîrtoaje Vasile* (E : 2260—4, 77—80 ; 6670—2, 4—85, 92, 4, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 20—8, 33, 6, 48), Tăleanu Constantin (E : 2260, 3, 77—80 ; 6630, 74, 6, 7, 82, 716, 20, 2, 3, 4). Cl. X. Dumitru Vasile (6670—2, 4—7, 95, 710, 5, 20, 2, 4, 55, 7, 60, 3, 82). *Liceul Militar Dimitrie Cantemir* cl. XI. Busuioc Mihai (6670—2, 4—8, 715, 54—6, 62, 3, 76), Chivu Stelian (6670, 3, 5—7, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 6, 33, 51, 4, 62, 3), *Filimon Nicolae* (6666, 8, 9, 93, 6, 92, 5—8, 700, 3, 7, 9—11, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 33, 5, 6, 45, 8, 50—3, 5, 7, 8, 63, 82, 91), *Toma Ion* (6666, 7, 9—78, 80, 2, 3, 5, 703, 9, 10, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 48, 50—5, 7, 9, 61—3).

BUCUREŞTI. *Studentă* Bărbulescu Nona (6669—71, 4—6, 80, 2, 703, 10, 3—5, 20, 2, 52, 9, 61). *Absolvenţi* : Marica Adrian (6670—2, 4—6, 8, 710—2, 5, 20, 2, 51, 3—5, 7, 62—4, 82, 8), Matei Maria (6710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 9, 35, 48, 51, 2, 6, 7, 9, 63, 4). *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VI. Bomboe Cristian (E : 2248, 52, 65, 8, 70, 3, 4, 80). *Şc. 8 ani nr. 23* cl. VIII. Georgescu Maria (E : 2248—52, 4—8, 61—4), Preoteasa Aur. Eugen (E : 2248, 50, 2—4, 7, 8, 61, 3, 4). *Şc. 8 ani nr. 32* cl. VI. Celente Dan (E : 2248-54, 8, 9). *Şc. 8 ani nr. 46* cl. VIII. Marinescu D. Alexandra (E : 2248, 56, 8, 63, 5, 6, 70, 5). *Şc. 8 ani nr. 71* cl. VIII. Sergiescu Vlad (E : 2248—70, 4—6, 80 ; 6670, 6, 716, 20, 2, 4). *Şc. 8 ani nr. 75* cl. VII. Dumitru Adrian (E : 2248, 50, 3, 7, 68, 77, 80, 2, 3). *Şc. 8 ani nr. 103* cl. VII. Marinescu Viorel (E : 2265, 8, 7,0, 4—8). *Şc. 8 ani nr. 118* cl. VIII. Roman Adrian (E : 2248, 50, 2—4, 6—8, 61, 3—6, 8, 70, 2, 3, 6, 8, 9, 86 ; 6670, 716, 20). *Şc. 8 ani nr. 122* cl. VII. Nistor Irina (E : 2248, 50, 3—5, 7—9). Cl. VIII. *Georgescu Dan* (E : 2248, 50, 7, 9, 65, 6, 8, 70, 1, 3, 4, 6—8 ; 6720). *Şc. 8 ani nr. 128* cl. VII. Ciontea Mariana (E : 2248, 50—2, 4, 7, 8, 68), Gruia Vladimir (E : 2248—50, 2, 4, 5, 7, 8). Cl. VIII. Şerban Corina (E : 2248, 50, 2—5, 7—9, 61, 3). *Şc. 8 ani nr. 146* cl. VIII Atanasiu Traian (E : 2235, 9, 42, 7, 50, 4, 8, 63). *Şc. 8 ani nr. 166* cl. VI. Cernescu Gabriela Marina (E : 2248, 9, 52—4, 65, 7, 8, 70, 1, 80). *Şc. 8 ani nr. 169* cl. V. Romaşcanu Dan (E : 2248, 50—3, 65, 7, 8). Cl. VI. Hoisescu Nic. (E : 2248—51, 3, 4, 9, 65, 8, 70). Cl. VII. Mascalu Doru (E : 2248-53, 5, 9, 65, 8, 70—2, 5, 8), Vijelie Luminiţa (E : 2248—57, 9—61, 3 ; 6670, 1, 6, 81). Şc. 8 ani nr. 173 cl. V. Andrievici N. Bogdan (E : 2248, 54, 9, 65, 8, 870, 5, 8). *Ş. m. 1* N. Bălcescu cl. VIII. Teişanu Cornel (E : 2236, 7, 60, 1, 3, 78 ; 6670, 6, 80, 720, 2). Cl. IX. Brăileanu Ana (E : 2236, 7, 63 ; 6653, 7, 60, 1, 3, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 3), Udrea Mnea (E : 2277—80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 729, 35). Cl. X. Cazarman Benone (6670, 1, 3—5, 710, 1, 5, 30—2, 36, 48), Dumitru Dan (6667—9, 71, 5, 8, 98, 707, 10, 4—6, 26), Jiletcovici Iulian (6644, 56, 710, 1, 5, 48, 51, 5, 6, 9, 63, 4). Cl. XI, *Andrei Romulus* (6641, 4, 8, 57, 6,2 6, 7, 70—8, 80, 5, 95, 8, 710, 2, 3, 5, 6, 8, 20—4, 6, 33, 5, 7, 8, 45, 8, 51—7, 9, 61 —4, 78, 80, 7, 8, 91). *Ş. m. 2* cl. X. Enescu Mihai (6670, 1, 4—6, 710, 5, 20, 2, 3, 6, 35), Leoveanu N. Mihaela (6670, 4, 6, 80, 710, 5, 6, 20—2, 35). *Ş. m. 3* cl. XI. Russe Gheorghe (6667, 70—2, 4, 5, 706, 10, 1, 3, 5, 20, 51, 5, 7, 63, 4). *Ş. m. 5* cl. VIII. Basch Maxim (E : 2248, 50, 1, 7, 63, 70, 5, 8), *Kaufman M. Liviu* (E : 2284—59, 62—6, 8—72, 4, 7—81, 8, 90, 2 ; 6670, 6, 720, 4). Cl. IX. Pleşoianu A. Maria (E : 2260—4, 78—80 ; 6680—5, 721—4, 6). Cl. X. *Mariotti Răzvan* (6666, 7, 70—8, 80, 1, 4, 92, 3, 5, 7, 8, 710, 2, 5, 6, 20—2, 4, 6, 35—7, 50, 1, 3, 5, 7, 9, 61, 3, 4). Cl. XI. Kirmaier Eduard (6678, 82, 3, 95, 7, 8, 710, 2, 3, 5, 20, 2—4, 6, 35, 6, 52). *Ş. m. 6* cl. VII. Weiner Irina (E : 2248, 50, 2, 3, 5—9). *Ş. m. 7* cl. VIII. Popa Radu (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 63, 5, 6, 8, 72, 80). Cl. IX. Docea Lucian (E : 2261, 3, 4, 77—80 ; 6670, 1, 4, 6, 80, 2, 720, 2). Cl. X. Raba Gabriela (6670—2, 5, 6, 8, 710, 1, 5, 51, 5, 7, 63).703, 6, 10, 1, 5, 6, 22, 33, 5, 6, 45, 8, 51, 4—6, 61—4, 76). *Ş. m. 22* cl. IX. *Cristoloveanu Sorin* (E : 2250, 1, 3, 4, 77, 8, 80, 9, 90 ; 6670, 1, 4, 6, 80, 2, 716, 20, 2, 4, 35, 52, 7—9, 64, 78, 83, 7, 91). Cl. X. *Stoian M. Liviu* (6667, 70—2, 4—8, 92, 6—8, 701, 7, 10, 5, 16, 20—2, 4, 31, 5, 6, 50, 3, 5—7, 60, 3—5, 82, 4, 6). *Ş. m. 23* cl. X. Băluţă Tudor (6674, 82, 95, 7, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 8, 48). Cl. XI. Ioainţescu Constantin (6669, 70, 1, 4—8, 80, 710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 52, 4, 5, 7, 62, 3). *Ş. m. 25* cl. IX. Bota Cătălina (E : 2278, 80 ; 6671, 3, 80, 5, 723—5, 38, 83, 7), Odobescu Grigore (E : 2277—80, 6682, 716, 20, 2, 4, 6, 8, 50). *Ş. m. 26 Al. I. Cuza* cl. IX. Stoica Valentin (E : 2277—80 ; 6710, 5, 6, 20—4, 8, 33, 5, 6). *Ş. m. 27* cl. VII. Arton R. Eugen (E : 2255—9, 70, 3—5). *Ş. m. 28* cl. VII. Arsene Vladimir (E : 2265, 8, 70, 7, 80, 2, 3, 91), Bril Vlad (E : 2248, 50—3, 5, 8, 9, 63, 5, 6, 8—70, 4, 6—8, 80 ; 6816). Cl. VIII. *Moldoveanu Mihaela* (E : 2251—3, 5, 6, 9, 60, 4—6, 8—71, 4, 6—83, 6, 8—91 ; 6670, 1, 76, 81, 720, 2, 4, 9, 42, 83, P.). Cl. IX. Hîntescu Tania (E : 2237, 61, 3, 78, 9 ; 6670, 6, 7, 716, 20, 2, 4). Cl. X. Bercu Mihai (6670, 1, 4, 6, 80, 710, 1, 5, 02, 2, 50, 2, 5, 7, 63, 4), Hohan Ion (6670, 1, 4—6, 710, 5, 6, 20, 2, 50, 5, 61, 3, 4). *Ş. m. 32* cl. X. Athanasiu Irina (6666, 72, 8, 96, 710, 5, 20—2, 4, 6, 35), Profeta Horia (6666, 77, 96, 710, 5, 6, 20—2, 4, 5, 35, 6). *Ş. m. 33* cl. VI. Negoescu Gabriela (E : 2250, 1, 3, 4, 65, 6, 8, 70), *Ş. m. 34* l. X. Gabrovski Adrian (6670, 1, 4—6, 8, 80, 92, 3, 8, 715, 20, 2, 4, 35, 6, 55, 7, 9, 61, 3, 4), Neacşu Gheorghe (6666, 7, 71—7, 80, 3, 716, 20, 2).

Ş. m. 37 cl. IX. Kalesz Eugenia (E : 2260, 4, 77 ; 6673, 81, 3, 4, 715, 6, 26, 8, 64). *Ş. m. 39* cl. VIII. Pantelimon Frentina (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 63, 5, 6, 8, 70, 6, 7, 80, 3). Cl. IX. Ruse Elena (E : 2263, 4, 78, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720, 2, 4). *Ş. m. 40* cl. V. Constantin Cornel (E : 2254, 7, 8, 61, 3, 82, 6, 9). *Ş. m. 8* cl. VI. Antonescu Monica (E : 2248, 50, 2, 3, 9, 60, 5, 6, 8). Cl. VIII. Cinteză Mircea (E : 2248—80 ; 6720, 2, 4). Cl. IX. Kollo Iosif (E : 2261, 3, 79, 90 ; 6670, 4, 7, 80, 710, 20, 2, 64). *Ş. m. 10* cl. VII. Ioan Sanda (E : 2248, 50—5, 8, 65). Cl. X. Cleja Sanda (6666, 70—2, 4—6, 80, 710, 1, 5, 6, 20—2, 6, 35, 6). *Ş. m. 11* cl. IX. Cristea Simona (E : 2260, 1, 4 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 720), Pascaru Aurel (E : 2260—4, 78 ; 6679, 81—4, 98). Cl. X. *Teodorescu Valentin* (6666—8, 70—2, 4—6, 8, 80, 1, 4, 6, 92, 3, 5, 7, 8, 710—2, 4—6, 20—5, 32, 5—8, 42, 6, 8, 651, 5—7). *Ş. m. 12* cl. IX. Bărcănescu Şerban (E : 2261, 3 ; 6670, 1, 4, 6, 7, 80, 2, 716, 20, 2—4), *Cartianu Dan* (6710—2, 5, 25, 35, 6, 60—2, 5—61, 3—5, 91, 5—9, 801—3, 16 ; E : 2278, 84, 5, 9, 90, 303, 5, 6). Cl. X. Drăgoi Nic. (6668, 9, 72, 4, 5, 82, 91, 2, 5, 710, 5, 20, 2, 35). *Ş. m. 13* cl. IX. *Petrescu Andrei* (E : 2260—4, 77, 8, 80, 5, 9, 90, 305, 6 ; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 9—81, 4,5, 715, 6, 20—50, 4, 7, 8, 60, 4, 5, 86, 8, 91, 5, 8, 9, 802, 9, 11, 3, 5, P.). Cl. X. Capră Livia (6670, 1, 5—7, 80, 95, 710, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 51, 7, 63), Dima Corneliu (6670, 720, 1, 801—3, 8, 11, 7, 35), Nicolaide Irina (6750, 4, 5, 20, 2, 35, 51, 2, 5—9, 61, 3, 4), Turturică Ştefania (6675, 96, 721, 4, 6, 52, 5, 7, 9, 99), Udran Mihaela (6750—3, 5—8, 61, 3, 4, 77). *Ş. m. 17* cl. X. Botez Dan (6666, 7, 77—82, 6, 92, 3, 5—8, 700, 3, 20, 2), Otete-, leşanu Şerban (6666, 7, 80, 2, 3, 5, 91, 3, 5, 6, 710, 1, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 35, 6, 8, 50—2, 5—7 [illegible], 3, 4). Cl. XI. Almer David (6668, 9, 82, 92, 5, 7, 8, 703, 5, 10—3, 5, 20, 2, 6, 31, 3, 5). *Ş m. 18* cl. Musceleanu Ion (E : 2260—4, 7, 8, 80 ; 6710, 5, 8, 3 , 46, 57, 64). *Ş. m. 20* cl. X. Anghelescu Camelia (6670—6, 710, 5, 36, 52, 5, 6), Copil Magdalena (66667, 70—2, 4—6, 710, 5, 20, 2, 52, 5, 7, 63), Curelea Ion (6671, 2, 4—6, 710, 5, 20, 4, 35, 57), Farca Alexandrina (6667, 70—7, 715, 20, 2, 5, 63), Gellner Radu (6671, 2, 74—6, 710, 5, 20, 2, 4, 35, 57), Jugănaru Dan (6672, 3, 5, 95, 710, 5, 20, 2, 6, 30, 6, 53, 7), Nicolae M. Nina (6666, 72, 710, 1, 5, 6, 20, 6, 50, 1, 5—7, 63). Cl. XI. Neagu Dumitru (6667, 9—76, 8, 85, 93, 5, 6,

BUŞTENI. *Şc. 8 ani* nr. 1 cl. VIII. Stanciu Teodor (E : 2257—9, 63, 8, 73, 8, 80). *Ş. m.* cl. XI. Nicolaescu Ion (6666, 70, 1, 4—7, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35, 54, 5, 7, 62, 3).

BUZĂU. *Şc. 8 ani* nr. 1 cl. VIII. Leu I. Raimonda (E : 2248, 52, 7, 8, 63, 5, 6, 8, 80, 90, 1), Mocanu Livia (E : 2248, 63—9, 71, 80), Popescu Magdalena (E : 2258, 63, 5, 6, 8, 9, 71, 6, 8, 9, 80), Teodor Marinela (E : 2248, 52, 7, 8, 63, 5, 8, 9, 71, 80), Teodorescu Ştefan (E : 2233, 6, 8, 40, 2, 3, 7, 65, 74, 80). *Ş. m. 1* cl. VII. Iancu Valeriu (E : 2248, 9, 52, 65, 8—70, 80). Cl. X. Manea Nicolae (6666, 7, 71, 2, 8, 80—2, 92, 3, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 20, 2), Marin N. Ion (6670—2, 4—7, 80, 710, 5, 20, 2, 6, 35, 6, 52, 5, 7, 63, 4), *Purice Emil* (6666, 7, 70—2, 4—7, 80, 1, 4, 5, 92, 3, 5, 6, 8, 707, 10, 1, 4—6, 20—4, 6, 32, 3, 5, 6, 50—2, 5, 7, 9, 63, 4, 76, 82, 8), *Vasilescu Nicolae* (6666, 7, 70—2, 4—6, 80, 4, 5, 92, 3, 6, 710, 1, 5, 6, 20—6, 9, 33, 5, 6, 8, 50—2, 5, 7, 61, 3, 76, 82, 8). Cl. XI. Negruţ Gheorghe (6670, 1, 4—6, 8, 706, 11, 3, 5, 20, 2, 6), Rădulescu Ovidiu (6667, 70—2, 4—8, 80, 5, 709—11, 3, 5, 20, 2, 4, 35, 56, 51, 7, 63, 4, 88). *Ş. m. 2* cl. VII. Constantinescu Florin (E : 2248, 9, 52, 4, 7, 8, 65, 6, 8, 9). Cl. X. Ionescu Simona (6666, 7, 70—2, 4—6, 8, 80, 3, 703, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2), *Ş. m. 6* cl. VIII. Manea Dumitru (E : 2255—7, 9, 60, 5, 8—70, 2, 4, 5, 7, 8 ; 6670, 6).

CACOVA (Zmeurat-Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Răzoiu Mihail (E : 2198—203, 6—8, 10, 1, 5—8).

CALAFAT. *Ş. m.* cl. IX. Mititelu Aneta (E : 2247, 57, 61, 3, 80, 5, 90 ; 6670, 6, 715, 20, 2), Ruiu Adrian (E : 2261, 3, 77, 9, 80 ; 6670, 3, 6, 7, 716, 20, 2, 91).

CALVINI. *Şc. 8 ani* cl. VIII. Boncu Elna (E : 2248, 50, 4, 8, 63, 5, 8, 9).

CARACAL. *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VIII. Enache Gheorghiţă (E : 2259, 61—3, 78—80, 2). *Ş. m. 1* cl. X. Boarna Ion (6680—3, 92, 5, 7, 8, 720, 2—4, 35, 6, 81—3, 6, 8, 91). Cl. IX. Vasile Corneliu (6670, 1, 3—7, 80, 715, 6, 20, 2, 4). *Ş. m. 2* cl. IX. Ionescu M. Liana (E : 2261, 3, 5, 90 ; 6670, 2, 3, 6, 7, 720, 2, 66), Mitruţ Melania (E : 2261, 3, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 716, 20, 2, 91), Pătru Mircea (E : 2261, 3, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 716, 20, 2, 91).

CARANSEBEŞ. *Ş. m. 2* cl. IX. Bartoff Fred (E : 226o, 1, 3, 77, 8 80 ; 6670, 4, 6, 7, 80—2, 7, 12, 6, 20—2, 4, 6, 9), Petru Fiadina (E : 2236, 60, 3, 70, 4, 6, 80—2, 5, 720, 2, 4, 35). Cl. X. Brebu Ion (6631, 71, 2, 4, 5, 7, 80—2, 2, 4, 35).

CALAN. *Ş. m* cl. VI. Bal Corneliu (E : 2248, 50, 2, 65, 8, 870, 4, 8, 80), Cl. X. Agheniţei Chirică (6670, 1, 4—7, 80, 1, 3—5), Cubinet Ion (6670—2, 4—8, 80, 93, 8, 710, 1, 5, 20—2, 4, 35). Cl. XI. Stanciu Ion (6667, 9—72, 4—6, 80, 4, 95, 703).

CĂLĂRAŞI. *Ş. m.* cl. VIII. Ştefănescu Radu (E : 2248, 50, 2, 6, 61—3, 5, 6, 8, 70, 1, 4, 80, 1). Cl. IX. Formache Constantin (E : 2262, 4, 7, 8, 90 ; 6671, 7, 80—2, 5, 95, 722,

4, 57, 86), Vişan Justinian (E : 2260, 1, 3, 77, 8, 80, 9; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 720), 2, 4, 6).

CĂLDĂRARU (Argeş. *Şc. 8 ani* cl. V. Tănăsescu Marcel (E : 2248—50, 4, 65, 6, 8).

CĂLIMĂNEŞTI (Argeş). *Ş. m.* cl. IX. Zamfirache Elena (E : 2280; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 3, 720, 2, 64), Cl. X. Tămăceanu Alex. (6670—7, 95, 710—2, 5, 35, 55—7, 64, 82).

CĂPRENI (Oltenia). *Şc. 8 ani* cl. VII. Gelu D. Gh. (E : 2248, 50, 2—4, 7, 8, 65, 6, 8, 70).

CEHUL SILVANIEI (Maramureş). Cl. X. Culcean Vasile (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 715, 6, 20, 2, 4), Mureşan Ion (6670—6, 80, 92, 715, 6, 20, 2).

CERNA. *Ş. m.* cl. VIII. Ducica Florica (E : 2248, 50, 2, 7, 8, 61, 5, 8, 89). Cl. X. Noşca Nicolae (6670—2, 4—6, 80, 720, 2, 51, 5, 7, 9, 63).

CHIŞINEU CRIŞ. Cl. X. Mara Petru (6667, 70—7, 80, 5, 93, 710, 5, 20, 2, 4, 48).

CÎMPENI (Cluj). *Ş. m.* cl. VIII. Mucea Ion (E : 2260, 1, 3, 77—80, 90; 6720, 2).

CÎMPIA TURZII. *Ş. m.* cl. VIII. Cîmpean Gheorghe (E : 2248, 50, 2—5, 65, 8—70, 3, 6, 7, 80). Cl. IX. Toader Iosif (E : 2261, 3, 77—9; 6670, 1, 6, 7, 81, 715, 6, 22, 4). Cl. X. Codrescu Radu (6670—7, 80, 715, 20, 2), Lupescu Corna (66666, 7, 70—2, 4—8, 710, 1, 5, 20).

CÎMPINA. *Ş. m. 1* cl. VII. Romaşcanu Rodica (E : 2248, 50, 5, 8, 9, 65, 6, 73, 8), Trandafir Corneliu (6667, 70, 1, 6, 7, 80, 95, 711, 5, 6, 20—2). Cl. IX. Ungureanu I. (E : 2290; 6674, 7, 715, 6, 20, 2, 4, 6, 50, 8, 64, 76), Văcăroiu Ioana (E : 2277, 85, 9, 90; 6710, 26, 50, 2, 8, 9, 61, 4, 88). Cl. X. *Boşilcă M. G.* (6670, 1, 4—6, 8—82, 4, 5, 7—91, 5, 8, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 35, 8, 48, 51, 3, 5, 7, 63, 4, 82, 5, 9), Popescu Florin (6666, 70—2, 4—7, 85, 710, 5, 6, 20—5, 35). Cl. XI. Buciu Alexandru (6698, 703, 14—6, 20, 2, 9, 35).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Liceul militar* cl. X. Ciofoaia Vasile (6678, 80—2, 5, 93, 5, 6, 8, 710, 1, 5, 6, 20—4, 6, 733, 5, 6, 8, 48), Florea Ion (6670, 1, 4, 6, 7, 80—2, 92, 5, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 35, 6, 9), *Mototolea Fănică* (6666, 7, 70—2, 4—8, 80, 2, 3, 92, 5, 6, 707, 10—2, 4—6, 20, 2, 6, 35, 7—9, 51, 2, 5—8, 63, 4, 80, 2, 8, 91). Cl. XI. *Muscan Marius* (6666, 7, 9—78, 80—6, 9—93, 5—700, 3, 6—13, 5, 6, 20, 2—6, 31—3, 5—9, 41, 5, 8, 51, 5, 7—9, 62, 3, 7, 76, 82, 8).

CÎMPULUNG MUSCEL. *Şc. 8 ani* nr. 5 cl. VIII. Creţulescu Romeo (E : 2248, 50, 61, 3, 5, 81—3). *Ş. m.* cl. IX. Huhubeţiu Sorin (6670, 1, 3, 6, 7, 715, 6, 20, 2, 5, 50, 7, 60).

CLUJ. *Ş. m. 1 N. Bălcescu* cl. VII. Feneşan Adriana (E : 2248, 52, 4—7, 65, 8), Miclescu Lucia (E : 2248, 50, 4, 65, 8, 70, 8, 82, 7, 92). Cl. VIII. Man Augustin (E : 2269, 76, 8, 80, 1, 6, 91; 6724), Matcaboji Horia (E : 2248, 50, 2—5, 7, 63; 5670, 3, 6), Nicola Adrian (E : 2248, 54, 8, 63—5, 8, 70, 80), Rusu Radu (E : 2233, 5, 6, 40, 2, 3, 6, 7), Teuşan Ovidiu (E : 2239, 46, 61, 5, 8; 6670, 6, 720), Tudoran Tudor (E : 2253, 5, 7, 9, 61, 4; 6670, 6), Verestay Arpad (E : 2248, 50, 2, 4, 5, 7, 8, 63, 5, 8, 71). Cl. IX. Lazăr Aurel (E : 2260; 6671, 80—2, 92, 4, 5, 7, 8, 700, 20, 2), Bodea Gligor (6666, 70, 2—6, 80, 3, 5, 710, 1, 3, 5, 20k 2, 35, 55—8, 63, 4), Oroş Lucian (6670, 1, 4, 6, 80, 1, 3, 710, 5, 6, 20—2, 4, 35, 50, 7, 91, 4; E : 2261—4, 77—80, 5, 9, 90), Stoian Daniela (E : 2261, 3, 4; 6671, 4, 6, 7, 87, 1, 92, 5). Cl. X. Farkaş Petru (6666, 7, 70—2, 4—6, 8, 80, 1, 3, 5, 6, 92—8, 707, 10, 1 ,5, 20—2 33, 6, 41, 8), Goldstein Tiberiu (6670—2, 4—7, 710, 20, 2, 35, 8, 57), Paranosuk Alexandru (6666, 70—2, 4—7, 93, 710, 1, 15, 20, 2, 6), Trif Damian (6584—6, 6660—8, 80—7, 80, 1, 3,95, 7, 8, 711, 5, 20, 2, 4, 55), Vulisici Vasile (6666, 75, 8, 93, 8707, 10, 5, 26, 36, 50, 1, 5, 7, 63, 4). *Ş. m. Emil Racoviţă* cl. VIII. Bălosu Virgil (E : 2248, 52, 4, 7, 63, 5, 8, 71, 4, 80, 91, 2), Bocianu A. (E : 2248—59, 61, 3—5, 8, 71, 80). *Ş. m. George Coşbuc* cl. VII. Mihălceanu Dan (E : 2248, 51, 4, 7, 65, 8, 71, 6, 8, 80). *Ş. m. George Barițiu* cl. IX. Podoleanu Radu (E : 2260, 1, 3, 4; 6680, 2, 5, 720, 2, 4, 6, 9). *Ş. m. 7* cl. IX. Dobriter Bela (E : 2260, 77, 8, 80, 90; 6680, 715, 6, 20, 2, 4, 85, 91). *Ş. m. 10* cl. X. Peev Igor (6670, 1, 3, 6, 7, 710, 5, 6, 20, 2, 35, 5, 7, 64), Dănicel Dan (6667, 9, 71, 2, 4, 5, 7, 80, 96, 703, 10, 5). *Ş. m. 12* cl. VII. Mihalte Delia (E : 2233, 42, 3, 6—8, 50, 65, 8, 70). *Ş. m. 15* cl. VII. Iancău Marian (E : 2652-9).

COGEALIC (Dobrogea), *Ş. m.* cl. VIII. Negulescu Adriana (E : 2220, 5, 6, 8, 31, 2, 6, 40, 3, 63).

COLILIA (Slobozia). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Iosifescu Georgeta (E : 2248, 9, 52—4, 8, 60, 1, 3), Nicolae Ana (E : 2248—50, 3—4, 7—9, 61, 3), Simion Constantin (E : 2248—54, 7—61, 3), Stanciu Victoria (E : 2248, 52—4, 7, 8, 60, 1, 3).

COMARNIC (Ploieşti) *Ş. m.* cl. IX. Aldasova Augustin (E : 2261, 3, 79; 6670, 4, 6, 7, 80—2, 716, 20—2, 4).

CONSTANŢA. *Şc. 8 ani nr. 15* cl. VIII. Persoi Radu (E : 2251, 3, 4, 7, 8, 60, 5, 70, 3, 7, 80). cl. X. Dinu Dumitru (6670—2, 4—6, 84, 95, 7, 8, 710, 5, 6, 20, 2, 5, 35).

CORABIA. Cl. IX. Voinea Marcel (E : 2260, 1, 3, 4, 77, 8, 80; 6681, 2, 7, 97, 8, 742, 8). Cl. X. Alexandru Dan (6670, 5, 6, 710, 1, 5, 2, 30, 6, 63, 9). Cl. XI. Drăguţ Florea (6671, 2, 96—8, 700, 7, 10, 5, 22, 4, 6, 9, 35, 8, 45, 61, 5, 7, 62—4, 8, 82, 3).

CORNU (Oltenia). Cl. IX. Dolea Fănică (E : 2261—3, 77, 80 ; 6670, 4, 6, 7, 85, 720, 2).

COTATCU (Ploieşti). *Şc. 8 ani* cl. VII. Iorga Emil (E : 2225, 32, 3, 43, 7, 8, 54, 8, 9), Rotaru Costel (E : 2235, 42, 7, 8, 54, 7—9, 68, 70). Cl. VIII. Răduţă Fănică (E : 2232, 3, 43, 6, 8, 52, 8, 63).

CRAIOVA. *Şc. 8 ani nr. 2* cl. VII. Dăescu Cornel (E : 2248, 50, 4, 7, 61, 3, 5, 8, 70, 90). *Ş. m. 1* cl. VII. Pirligras Doru (E : 2248, 50, 2, 3, 8, 70, 3, 6, 7, 80). Cl. IX. Dansu Viorel (E : 2263, 79 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 720, 2, 6, 35, 64), Slabu Dan Viorel (E : 2260, 1, 77, 8, 80 ; 6677, 9, 82, 716, 20—2, 4, 6, 9, 35), *Turcu Ilie* (E : 2260—4, 7—80 ; 6666, 7, 70—7, 9—81, 3, 93, 5, 7, 8, 700, 6, 10, 5, 6, 20—5, 7,—8, 35, 6). Cl. X. Tutunea Ion (6670, 1, 6, 7, 80, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 33, 5, 55, 7, 63, 4). *Ş. m. 2* cl. IX. *Andrei Aurel* (E : 2260—4, 78—80, 9, 90 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 1, 3—5, 7, 700, 10, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 50, 8, 60, 4, 65, 8), Crăciunescu Ion (E : 2261, 3, 4, 77, 9, 80 ; 6670, 3, 4, 6, 80, 716, 20, 2), Duicu Alexandra (E : 2260—4, 78, 9 ; 6610, 6, 20, 2, 35, 6), *Preda Marcel* (E : 2233, 5, 7, 9, 30, 2—5, 60—4, 77, 8, 80 ; 6631, 4, 9, 53, 70, ,4 6, 7, 80—3, 5, 716, 20, 2, 4, 35, 42), Turturică Elena (E : 2263, 77, 8 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 5, 716, 20, 2, 4, 50, 8). Cl. X. Georgescu Dan (6666, 80, 3, 4, 92, 57, 710, 1, 4—6, 20, 2—4, 6, 31, 5, 48), Greere Mariana (6670—6, 8, 80, 92, 5, 715, 20, 2), *Petrescu A. Ion* (6666—9, 71—86, 92, 3, 5—8, 707, 10, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 36), Popescu Gheorghe (6644, 70—2, 4—6, 80, 5, 710, 5, 20, 2, 35), Sîrbu Dănuţ (6671, 5, 6, 711, 5, 6, 20, 2, 50, 1, 3, 6, 7, 61, 3). Cl. IX. *Bărboiu Nicolae* (6666, 8, 70—2, 4—6, 8—80, 2, 4, 92, 3, 5, 7, 700, 3, 6, 7, 10, 1, 3, 5, 6, 20—6, 35, 6, 41, 8, 50, 1, 4—9, 61—4, 6, 7, 8), Hotăranu Ion (6666, 7, 9—72, 4—6, 80, 4, 5, 92, 3, 703), *Popescu Mihai* (6666—71, 4—80, 2, 4, 92, 3, 5, 8, 700, 3, 6—8, 10, 1, 3, 5, 6, 20—2, 4, 5, 35, 6, 44, 8, 50, 1, 3—9, 61—4, 91). *Ş. m. 3* cl. XI. Ghiţueala Dan (6698, 70, 7, 9, 12, 4, 6—8, 26, 35, 45), *Panduru Ion* (6666, 72—5, 8, 92, 5—8, 700, 3, 6, 7, 9—12, 5, 6, 8, 20, 2, 4, 35, 6, 45, 8, 51, 4—7, 562—4, 8, 76, 80, 6, 7). *Ş. m. 4* cl. XI. Mitran Marieta (6670—2, 5, 6, 703, 10, 3, 5, 20, 2, 54). *Ş. m. 5* cl. X. Mareş Florin (6672, 5, 95, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 6, 9, 35).

CURTICI (Banat). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Butariu Sena (E : 2248, 51, 8, 61, 3, 8, 79, 80).

DĂRĂBANI (Suceava). *Ş. m.* cl. VIII. Aionesei Mihai (E : 2248, 50—7, 61, 3, 5, 8, 70, 4, 7 ; 6724, 5, 76).

DĂENI (Hîrşova). *Şc. 8 ani* cl. VII. Enciu Aurel (E : 2248, 50, 1, 4, 5, 65, 8, 870, 8).

DEJ. *Ş. m.* cl. VII. Morariu Marcel (E : 227, 50, 2—4, 6—8). Cl. X. Suciu Cornel (6670, 1, 4—7, 80, 710, 5, 20, 2, 35, 55, 7).

DETA (Banat). *Ş. m.* cl. VI. Milici Vladimir (E : 2248, 9, 50, 2, 4, 78, 80, 91).

DOMAN (Banat). *Şc. 8 ni nr. 40* cl. VIII. Calma Veronica (E : 2248, 50, 3, 4, 7, 9, 61, 3).

DOROHOI. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Flămînzeanu Dumitru (E : 2259, 62, 3, 70, 3, 6, 8, 720). *Ş. m. 2* cl. VIII. Jalubă Petre (E : 2265—8, 71, 6, 8, 80, 1).

DRĂGANU (Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VII. Diaconescu Natalia (E : 2248, 57, 8, 65, 8, 76, 80, 92).

DRĂGĂNEŞTI OLT. *Ş. m.* cl. IX. *Enache Victor* (E : 2260, 1, 3, 4, 77—80, 9, 90 ; 6670, 1, 4, 6, 7, 9—81, 3, 6, 710, 5, 6, 20—2, 4—6, 8, 31, 3, 5, 50, 7, 64, 76, 91, P.). Cl. X. Cotigă Ion (6666, 7, 70—8, 80, 1, 3, 5, 92, 3, 5, 710, 1, 5, 6, 20—2, 4, 6, 31, 3, 5, 6, 8, 44, 8, 51, 5—7, 63, 4), Crăciun Gheorghe (6666, 7, 70—83, 5, 6, 92, 3, 5, 7, 8, 707, 10, 1, 5, 6, 20—2, 4, 6, 7, 31, 3, 5, 6, 8, 42, 8), Popa M. Ion (6641, 6, 62, 70, 2, 3, 5, 93,711, 20—2, 4, 33, 5).

DRĂGĂŞANI. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Oltu Mihai (E : 2248, 50, 2—9, 61—3, 5—9, 71—6, 8, 80, 1, 3, 5, 6, 8, 90, 1 ; 6720, 2). *Ş. m.* cl. IX. Tiţu Gheorghe (E : 2260, 1, 3, 4, 77—80 ; 6670—2, 4, 6, 7, 80, 1, 4—6, 92, 3, 5, 7, 8, 710, 5, 6, 20—5, 9, 35, 6, 44, 57, 8, 63—5, 91). Cl. X. Bălaşa Georgeta (6670, 1, 3, 6, 710, 5, 20, 2, 32, 6, 55, 63), *Stelea Constantin* (6670—2, 4—8, 80, 1, 3—6, 92, 3, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 6, 20—6, 9, 35, 6, 50—2, 5—8, 63, 4, P.).

DUMBRĂVENI (Braşov), *Ş. m.* cl. IX. Widman Wilhelm (E : 2260—3, 77—80 ; 6670, 4, 6, 80, 2, 3, 7, 14, 6, 20—4, 9).

DUMITREŞTI (Ploieşti). *Ş. m.* Anton Gheorghe (E : 2257 ; 6670, 4, 6, 7, 80, 3, 92, 710, 5, 6, 20—2, 7).

FĂGĂRAŞ. *Ş. m. 1* cl. X. Ortocol Gheorghe (6631, 3, 48, 9, 67, 72, 8, 80, 1, 9, 93, 5, 7, 8, 710, 1, 4—6, 20—2, 4, 6, 31, 3, 5—7, 60, 1, 3, 4).

FETEŞTI GARĂ. *Ş. m.* cl. IX. Negreanu Tache (E : 2260—4, 77, 8 ,80 ; 6670, 4, 6, 80, 1, 3, 5, 98, 716, 20, 2—5, , 35). Cl. XI. Văcălău Ion (6670—2, 4—7, 80—2, 5, 93, 703, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 45).

FIENI. *Ş. m.* cl. VIII. Popescu Florin (E : 2220—3, 9, 31, 5, 6, 8, 40, 2, 5—7, 50—4, 6—61, 3, 5, 8, 70, 3, 4, 6, 8—83, 8, 92 ; 6670, 6), Savu Ion (E : 2233—6, 24, 3, 8, 50, 4, 8, 63). Cl. IX. Popescu Pavel (6504, 7, 10, 2, 5, 9, 22, 31, 6, 46, 56, 8, 61, 79).

FILIAŞI (Oltenia). *Ş. m.* cl. IX. Băluţă Constantin (E : 2260—4, 77—80; 6680, 1, 4, 5, 710, 2, 5, 6, 20—6, 35), Dbrin Adrian (6670, 1, 5—6, 80, 1, 98, 711, 5, 20, 2, 4, 9, 35), Pasăre Emil (E : 2261, 3; 6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 720, 2),

FIZES (Banat). *Şc. prof.* an. II. Cioloca Adam (E : 2255—62, 73, , 6—8, 80; 6670, 3, 6, 720, 2, 4).

FOCŞANI. *Ş. m. 1* cl. X. Gagea Mircea (6670, 4, 6, 7, 80, 3, 97, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 48).

GALAŢI. *Şc. 8 ani nr. 17* cl. VII. Huzuru Genoveva (E : 2248—58). *Şc. 8 ani nr. 21* cl. VIII. Constantinescu Costică (E : 2248, 63, 8, 76, 80; 6670, 6, 720, 2). *Şc. 8 ani nr. 28* cl. VII. Budu Nicolae (E : 2248, 50, 2, 5, 8, 9, 68, 78). Cl. VIII. Şerbu Paulica (E : 2248, 50, 2, 4, 5, 8, 9, 63, 5, 6, 8). *Ş. m. 3* cl. IX. Timofte Sterică (E : 2260, 78—80; 6673, 720, 2, 35, 57, 64, 76, 82). *Ş. m. 4* cl. VII. Buruiană Eugenia (E : 2248, 50—2, 5, 8, 65, 6, 8). Cl. IX. Simu Nicolae (E : 2261, 3, 78—80, 7, 90; 6670, 6, 716, 20, 2), Tilici Octavian (E : 2262, 3, 78, 90; 6670, 1, 4, 6, 7, 720, 2, 57, 88), Tiribega Marcel (E : 2260, 4, 77—80; 6671, 4, 81, 98, 716, 20—2, 4). *Ş. m. 5* cl. VIII. Girisik Marta (E : 2234, 5, 8, 40, 2, 3, 5, 6, 8—50, 2, 4, 7, 61, 3, 76, 81). Cl. IX. Marinescu Veronica (E : 2237, 61, 78—80; 6673, 4, 7, 720, 2, 4, 6).

GĂIEŞTI. *Ş. m.* cl. VII. Sava Teofil (E : 2248, 50, 2, 8, 65, 8, 70, 4, 80). Cl. X. Ilie Constantin (6670, 1, 4—6, 80, 3, 5, 715, 6, 20, 2, 57), Prodan Ion (6644, 70—6, 96, 7, 700, 10, 1, 5, 6, 20—2, 4, 31, 5, 6, 57, 8), Prundeanu Valentin (6683, 700, 10, 5, 24, 31, 41, 50, 5, 7, 8, 60).

GĂTAIA (Banat). Cl. IX. Florescu Horia (E : 2236, 61, 3, 78—80; 6670, 4, 6, 7, 716, 20, 2, 35), Antalag Sabin (6670, 1, 5, 97, 710, 1, 5, 6, 22, 31, 5, 9).

GIURGIU. *Ş. m. 1* cl. IX. Giscă Iulia (E : 2263, 79, 80, 90; 6670, 4—7, 2, 4, 35). Cl. X. Rada Mircea (6631, 2, 42, 8, 57, 9, 63, 7—72, 4—8, 80, 2, 92, 3, 5, 7, 703, 7—9, 15, 6, 20, 2, 36, 41, 51, 4). *Ş. m. 2* cl. IX. Marinescu Nicolae (E : 2261—4, 78, 80, 9; 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 715, 6, 20—2, 4, 35, 50, 7, 64, 91, 4).

GOLEŞTI (Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Soare Marin (E : 2263, 5, 8, 80; 6670, 1, 6, 720, 2).

HALEŞ. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Dogaru Vasilia (E : 2248, 50, 8, 65, 8, 78, 80, 2, 3).

HAŢEG. Cl. X. Martin Virgil (6670—2, 4—8, 80—5, 92, 5—8).

HÎRLĂU. *Ş. m.* cl. VIII. Ciubotaru Dan (E : 2248, 50, 2—4, 7, 8, 63, 5, 6, 8). Cl. IX. Solomon Ady (6670, 1, 4, 6, 7, 82, 712, 16, 20, 2, 50, 7, 8, 64, 83).

HOREZU. Cl. IX. Comănescu Lazăr (E : 2261, 3, 4, 78, 80; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 3, 716, 20, 2, 4), Munteanu Ion (E : 2261, 3, 4; 6670, 4, 6, 7, 80, 3, 716, 20, 2, 4), Munteanu Maria (E : 2261, 3, 4; 6670, 4, 6, 7, 80, 3, 716, 20, 2, 4), Popescu Nicolae (E : 2261, 3, o, 80; 6670, 3, 4, 6, 80, 720, 2, 4). Cl. X. Cojocaru Constantin (6670, 1, 4—7, 80—3, 92, 5, 7, 8), Gretan Ion (6666—8, 70—8, 80, 1, 5, 7, 9,2 ,5 7, 8, 710, 1, 5, 6, 20—4, 9, 35, 6, 8).

HUEDIN. Cl. X. Voiculescu Emil (6678, 97, 710, 1, 5, 42, 55, 7, 9, 61, 3, 4).

HUNEDOARA. *Ş. m. 1* cl. VIII. Fazakaş Ladislau (E : 2248, 52, 3, 9, 61, 3, 5, 8, 70, 8, 80), Mărgineanu Octavian (E : 2248, 50, 2, 63, 74, 8; 6720, 70, 6). Cl. IX. Brănescu Zitta (E : 2263; 6670, 1, 80, 3, 5, 710, 5, 6, 20, 35, 57, 73), *Ciotescu Ion* (6670—2, 4—8, 80, 3, 95, 710, 2, 5, 6, 20, 2, ,435, 5, 7, 62—4, 82; E : 2260—4, 77—80, 9, 90), Opriş Doru (E : 2262, 4, 77—80; 6671, 2, 5, 8, 83, 95, 710—2, 5, 6, 20, 2, 4, 35). Cl. XI. Lupu R. Alexandra (6669, 72, 4, 83, 710—3, 5, 6, 201, 2, 35, 45), Marcu Ana (6670—7, 83, 710, 3, 5, 20), Toma Gaspar (6670, 2, 4—7, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35).

HUŞI. *Ş. m.* Cuza Vodă cl. IX. Bursuc Gheorghe (6670, 2—7, 80, 712, 20, 2, 5), Năstase Gheorghe (E : 2263, 4, 80; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 720, 2, 4).

IAŞI. *Ş.c 8 ani nr. 7* cl. V. Petrăchioie Eugen (E : 2248, 50, 1, 3, 4, 9, 65, 6, 8, 70). C. VI. Avramescu Carmen (E : 2265—70, 7, 8, 80), Hagianu Doru (E : 2248, 50—4, 65, 7—70), Rizil Iancu (E : 2252--4, 65, 7—72). Cl. VII. Barbu Adrian (E : 2248—51, 5, 8, 9, 70, 4, 86), Drăgan Gheorghe (E : 2249, 59, 65, 8, 70, 3, 6, 7, 80, 2, 6). Cl. VIII. Caufman Claudia (E : 2233, 5—8, 40, 2, 3, 5—8, 50, 2—61, 3, 70, 6; 6665, 8, 71, 7, 8, 80), Vexler Elias (E : 2221, 5, 33—5, 8, 40, 3, 5, 7, 8, 61, 3). *Şc. 8 ani nr. 12* cl. VI. Bădrăgan Irina (E : 2248, 50, 65, 6, 8, 70, 6, 8, 80), Casetti Maiana (E : 2252, 5, 7, 8, 68, 76, 80, 2, 91), Ionescu Carmen (E : 2258, 9, 68, 70, 8, 82, 3, 6, 92), Poroşnicu Gabriela (E : 2235, 48, 50, 2, 4, 8, 65, 78, 80), Stancu Viorel (E : 2239, 43, 53, 4, 7, 8, 65, 8, 70, 4, 6, 80), Topor Vasile (E : 2233, 5, 6, 8—40, 2, 6—8, 52, 61). *Ş. m. 1* cl. VII. Nedeianu Adrian (E : 2248, 50, 1, 5, 65, 8, 71, 4). Mirzanca Magda (E : 2235, 42, 4, 5, 9, 50, 8, 68, 70), Pancu Costel (E : 2248, 52, 8, 65, 8—70, 80), Purice Constantin (E : 2248—50, 2, 4, 5, 7—9, 65, 6, 8, 71, 5, 7—80). *Ş. m. 2* cl. VIII. Knabe Valeria (E : 2248, 61, 3, 5, 8, 74, 8). *Ş m. 3* cl. VI. Burlacu Călin (E : 2235, 8, 24, 6—8, 50, 68), Cleju Ion (E : 2248, 9, 52—5, 7, 8, 65, 8). Cl. VIII. Avram Ioan (E : 2256—63). Cl. IX. Boboc Tudor (6660, 77, 85, 95, 715, 20, 2, 4, 5, 33, 5), Gherghescu Mihai (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 22, 4, 35), Iacob Florin (6639, 53, 60, 3, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80,

1, 70,0 12, 4, 6, 20—2, 4, 33, 5). Perşoiu Sorin (6646, 70, 3, 6, 7, 80, 7120, 1, 2, 6), Alupului Neculei (6667, 70—7, 80, 1, 4, 5, 92, 5, 7, 710, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 33, 5, 6), Chiriac Gheorghe (6670, 1, 3, 5—7, 710, 5, 20, 2, 4, 55, 7, 61, 3, 91), Goraş Liviu (6670—7, 80—2, 4, 5, 95, 7, 8, 715, 6, 20—5), Şerban Stan (6639, 70, 3, 6, 80, 2, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35). Cl. XI. Anghelescu Ioana (6670, 8, 80, 3, 5, 711, 3, 5, 20, 2, 6, 51, 5—7, 9, 61, 3). *Ş. m. 4* cl. VIII. Anghelescu Romulus (E : 2248—50, 4, 61, 3, 5, 6, 8, 78, 80, 720, 2). Cl. IX. Şerban Elena (6639, o0, 3, 6, 80, 2, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 5), Sbirnea Dan (6670, 4, 6, 80, 2, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35). *Ş. m. 7* cl. VIII. Pelin Alexandru (E : 2233, 5, 6, 8, 9, 42, 5—8, 50, 1, 5, 8; 6649, 70, 6, 720, 4), Curteanu Nicolae (E : 2235—9, 42, 5—555, 7—61, 3, 5—71, 4, 6, 720, 4, 6, 7, 80, 720, 2). Cl. IX. Breaur Neculai (6639, 41, 63, 70, 6, 80, 1, 3, 4, 9, 92, 700), Baraboi Adrian (6631, 2, 44, 56, 72, 85, 92, 711, 5, 6, 20—2). *Ş. m. 8* cl. VII. Leil Erica (E : 2233, 8, 40, 3, 7, 60, 5, 8). Cl. X. Creţu Ovidiu (6670—7, 80, 1, 3—5, 91, 7, 8, 710, 1, 5, 16, 20, 2, 4, 9, 32, 5, 42, 51, 2, 5, 7, 560, 1, 3, 4), Hanganu Iulian (6670, 1, 3—5, 7, 80, 710, 5, 20, 4). *Şc. m. muzică* cl. VII. Fiteruianu Adrian (E : 2233, 8, 42, 8, 65, 8, 70, 8).

INEU (Crişana), Cl. IX. Alexa Nicolae (6648, 53, 70, 3, 4, 6, 7, 80—5. Cl. X. Pop Marius (6627, 30—2, 9, 41, 2, 6—8, 63, 5, 70, 1, 4—7, 80, 1).

LONEA (Hunedoara). Sc. 8 ani cl. V. Linca Ion (E : 2248—50, 4, 68, 70, 3, 6, 82).

LUGOJ. *Şc. 8 ani* nr. 2 cl. VIII. Sinitenu Sidonia (E : 2250, 3, 8, 9, 63 ; 6670, 720, 2). *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VII. Cristea Rodica (E : 2248—50, 5, 7, 9). *Şc. 8 ani nr. 7* cl. VIII. Putinelu Tiberiu (E : 2234, 6, 40, 3, 56, 7, 61, 3 ; 6670, 3, 6). *Ş. m. 1* cl. VIII. Sorinca Claudiu (EI : 2234, 6, 40, 3, 56, 7, 61, 3 ; 6670, 3, 6). *Ş. m. 2* cl. IX. Apostolescu Ioan (6639, 46, 57, 6, 7, 720, 2), Neu Tiberiu (6670, 3, 4, 7, 81, 720, 4, 6, 9), Orbulov Pentru (6670, 5, 6, 8, 81, 2, 5, 95, 7, 710, 2, 5, 6, 20, 2, ,4 6, 35, 59, 64, 88, 91).

MĂRĂŞEŞTI. *Şc. 8 ani* cl. VIII. Bălan Aurlia (E : 2248, 61, 3, 5, 8, 76, 9, 80, 9). Cl. IX. Cazacu Mihail (6636, 41, 6, 9, 57, 70, 3, 6, 7, 80, 98).

MEDGIDIA. *Ş. m. 1* cl. VIII. Buldui Petruş (E : 2233—6, 40, 2, 3, 8, 61, 3, 5, 74), Dumitrescu Anca (E : 2233, 5, 6, 04, 1, 3, 5, 7, 8, 50, 4, 7, 61, 3, 5—8), Sanda Aurel (E : 2233, 8, 50, 7, 8, 61, 3, 5, 6, 8, 80).

MEDIAŞ. *Şc. 8 ani nr. 4* cl. VIII. Georgescu Elena (E : 2235, 43, 7, 8, 50, 7, 61, 3, 70, 6). *Ş. m. 1* cl. XI. *Mărgineanu Dan* (6670—7, 80, 706, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 5, 8, 9, 35, 6, 50, 2, 4, 5, 7, 8, 62—4, 8, 76, 82, 8). *Ş. m. 2* cl. VIII. Schlosser Dieter (E : 2250, 9, 68, 75, 7, 8, 85, 7). Cl. IX Brădişteanu Smarand (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 710, 2, 5, 20, 2, 4, 9, 35). Cl. X. Savu Ştefan (6666, 7, 70—7, 95, 6, 710, 5, 36).

MIZIL. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Bogdan Paul (E : 2265, 6, 8—71, 6, 8, 80).

MOCIRA (Maramureş), *Şc. 8 ani* cl. VIII. Mociran Angela (E : 2236, 45, 61, 3, 5, 77, 8, 80).

MOLDOVA NOUĂ (Banat). Cl. X. Iancovici Elena (6666, 77, 9, 85, 712, 6, 20, 1, 2, 35, 6, 42).

MORENI (Ploieşti). *Ş. m.* cl. IX. Leu Constantin (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2—5, 716, 20, 2, 4, 6). Cl. XI. Stiopu Cătălin (66666, 9—77, 80, 2).

MOZĂCENI DEAL (Argeş) .*Ş. m.* cl. IX. Stăncuţu Gheorghe (E : 2236, 7, 45 ; 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 2).

NADRAG (Banat). *Ş. m.* cl. IX. Cumescu Victor (6670, 1, 3, 6, 85, 716, 20, 2, 4, 35, 57, 83), Bobescu Gheorghe (6667—9, 710, 1, 3, 5, 35, 6, 54, 51, 2, 4, 7, 63, 8, 88, 91).

NĂDĂUD. *Ş m. George Coşbuc* cl. IX. Vălean Emil (6646, 53, 7, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 4). Cl. XI. Moraru Ion (6666, 9, 74, 80, 5, 96, 8, 703, 10, 1, 3—6, 20—2, 4, 35, 41, 5, 50, 2, 5—9, 62, 3, 4, 80, 2, 7, 8, 91).

NEGREŞTI (Oltenia). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Cherciu Constantin (E : 2232, 3, 5, 6, 9, 40, 2, 3, 7).

NEGREŞTI (Bacău). Cl. VIII. Apetrei Letiţia (E : 2233, 40, 2, 3, 8, 54, 62).

NEGRU VODĂ (Dobrogea). *Ş. m.* cl. X. Corinei Virgil (6630, 42, 6, 8, 57, 61, 3, 6, 7, 71—7, 80, 1, 3, 5, 97, 8, 8, 710, 1, 6, 20, 2, 4, 35, 8).

ODORHEI. Cl. XI. Kiss Péter (6670—7, 80, 710, 1, 5, 20, 2).

OHABA (Hunedoara). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Bucur Iosif (E : 2248, 50, 7, 8, 61, 3, 4).

ORADEA. *Ş. m. 1* cl. X. Bara Gheorghe (6666, 70, 1, 3—7, 93, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 6, 51, 7, 63, 4), *Hîncu Marius* (6631, , 4, 9, 46, 9, 53, 61, 2, 4, 6, 7, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 5, 92, 3, 5, 7, 8, 716, 20, 2, 4, 6, 31, 5, 6, 48). Cl. XI. *Memetea Ovidiu* (6551, 4, 5, 7—9, 61, 3, 5, 7, 70, 1, 4, 9—89, 93, 7, 9, 601, 5—7, 9, 15, 31, 2, 4, 9, 42, 6, 53, 5, 8—60, 3), *Negruţiu Vasile* (6666—78, 80—3, 5, 7, 9, 92, 3, 5, 7, 8, 703, 6, 7, 9—13, 5, 6, 20, 2, 4, 31, 2, 5, 6, 8, P.). *Ş. m. 2* cl. X. Bologa Florin (6627, 30, 1, 4, 6, 49, 57, 62, 72, 4, 5, 7, 80), Farkaş Francisc (6670—2, 5—7, 80, 1, 5, 710, 5, 6, 20, 2). *Ş. m. 4* cl. X. But Tiberiu (6636, 9, 49, 72, , 5, 7, 80, 1, 3, 720, 2). Cl. XI. Hamza Lucian (6631, 4, 9, 60, 70, 3, 5, 7, 8—81, 5, 709, 15, 20, 2, 45).

ORAŞ GHEORGHE GHEORGHIU DEJ. Ş. m. 2 cl. X. Ganea Gabriel (6670, 3—7, 80, 3, 5, 710, 1, 5, 20, 2, 35).

ORAVIŢA (Banat). *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII. Jona Rodica (E : 2248, 63, 8, 70, 6, 7, 80, 3, 91).

ORŞOVA. *Ş. m.* cl. VI. Cristescu Răzban (E : 2248, 50, 4, 65, 6, 8, 9, 87). Cl. X. Craicu Dan (6670—6, 710, 1, 5, 20, 2), Creţoiu Mircea (6630—4, 6, 70, 1, 3, 6, 80, 710, 5, 6, 20, 2, ,4 35).

OŢELUL ROŞU. *Ş. m.* cl. VII. Tăroată Anghel (E : 2246, 55, 9, 65, 8, 74, 8, 80).

PANCIU. *Ş. m.* cl. VII. Luca Georgeta (E : 2265—8, 74, 6, 82, 3, 7, 92). Cl. XI. Minea Gheorghe (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 716, 20, 3, 9, 83, 91).

PALOTA (Oradea) *Şc. 8 ani* cl. VIII. Oswald Nicolae (E : 2248—50, 7—9, 61, 3, 78).

PĂTÎRLAGELE (Ploieşti). Cl. IX. Toma Veronel (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 95, 710, 5, 6, 20—4, 6, 9). Vîlcu Ion (6648, 70, 4, 6, 7, 80, 4, 716, 20, 72). Cl. X. Boncu Luigi (6631, 4, 41, 4, 9, 80, 1, 4, 5, 92, 5, 7, 8, 715, 22, 4), Bîrjoveanu Constantin (6675, 98, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 31—3, 5), Toma Florin (6670—8, 80, 1, 3, 4, 19, 2, 5, 7, 8)

PĂUNEŞTI (Bacău). *Şc. 8 ani* cl. VI. Anghel Aneta (E : 2235, 8, 9, 42, 6, 8, 9, 55, 9), Conduraru Maria (E : 2227, 32, 3, 5, 8, 9, 42, 3, 5—9, 59, 68), Neagu Viorida (E : 2223, 31, 3, 5, 8, 9, 42, 7, 8, 52, 4, 5, 9, 65, 8, 80), Nica Lucia (E : 2231, 5, 8, 9, 42, 6, 7, 52, 4, 5, 8, 9, 65, 77, 8), Novac Maria (E : 2231, 5, 8, 9, 42, 6, 8, 50, 2, 4, 8, 9, 65, 8, 75, 6, 80), Sandu Mariana (E : 2223, 31, 3, 5, 8, 9, 42, 3, 7—9, 52, 5, 9, 65, 8, 75, 7, 8, 80). Cl. VIII. Bacalu Lucia (E : 2221, 5, 33, 6, 8, 4, 2, 3, 5, 8, 50, 4, 50, 4, 5, 7—9, 63, 5, 8, 78), Banciu Virginia (E : 2236, 55, 9, 65, 8, 70, 5, 7, 8, 80), Bogdan Mariţa (E : 2235, 55, 9, 66, 8, 9, 75, 80), Berbece Maria (E : 2223, 31, 3, 5, 40, 2, 3, 5, 8, 50, 5, 8, 9, 65 8, 80), Gîdea Otilia (E : 2224, 31, 6, 9, 40, 5—8, 54, 5, 7, 9, 63, 5, 8, 70, 5, 7, 8), Ignat Ileana (E : 2224, 7, 33, 5, 40, 2, 5—8, 50, 2, 5, 63, 5, 70), Neagu Elena (E : 2224, 31, 6, 9, 40, 1, 5—8, 50, 4, 5, 8, 9, 63e, 8, 9, 78), Popa Ionel (E : 2221, 3, 31, 3, 5, 6, 8, 24, 5, 6, 8, 50, 2, 5, 8, 9, 65, 78), Sandu Victoriţa (E : 2224, 31, 6, 8, 40, 52, 4, 5, 8, 65, 8, 79, 5, 8, 80), Vişan Ştefan (E : 2223, 31, 3, 6, 42, 8, 50, 4, 5, 8, 6, 65, 8, 70, 5, 8, 80).

PECICA (Banat), *Ş. m.* cl. X. Karniş Maria (6670, 1, 3, 4, 81, 3, 5, 97, 8, 715, 20, 2, 4, 9, 35).

PEŞTEANA (Oltenia). Cl. IX. Negrilă Ion (6649, 73, 9, 82, 5, 716, 20, 1, 4, 6, 31, 6), Truşcă Matei (5670, 1, 3, 4, 6, 7, 9—81, 5, 710, 5, 6, 20, 2, 8, 57).

PETROŞENI. *Şc. 8 ani* cl. VII. Cenar Ioan (E : 2250, 1, 4, 8, 9, 65, 8, 71, 3, 4, 7), Maior Maria (E : 2234, 48, 50, 4, 65, 8, 71, 3, 5, 7). Cl. VIII. Cnatacuzino Smaranda (E : 2248, 51, 7, 8, 61, 3, 5, 8, 70, 4 ; 6670, 6, 720, 2), Căţuţoiu Mariana (E : 2242, 3, 63, 8, 77, 6676, 720, 2), Cioară Silvia (E : 2250, 3, 9, 61, 5, 6 ; 6670, 4, 720, 2), Dascălu Gheorghe (E : 2248, 50, 4, 9, 63, 5, 6, 8, 9, 78, 80 ; 6670, 6, 720, 2), Istrate Beatrice (E : 2221, 43, 8, 54, 8, 63, 8, 76, 7 ; 6681, 722), Lazăr Lucia (E : 2233, 42, 3, 7, 8, 50, 4, 8 ; 6663, 8, 77, 81, 720, 2), Mureşan Ana (E : 2248, 58, 63, 8, 70, 6 ; 6720, 2), Paraschiv Ion (E : 2248, 50 4, 8, 9, 63, 5—71, 8 ; 6670, 6, 720, 2), Raicu Liliana (E : 2248, 51, 4, 7, 63, 9, 80), Ronai, Adrian (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 5, 8, 52, 63, 5, 6, 8—70 ; 6720, 2), Rusan Violeta (E : 2248, 53, 4, 8, 61, 5, 6, 8, 70, 80, 6, 720, 2). *Ş. m.* cl. IX. *Stan Mihai* (6670, 1, 3, 4, 6—8, 80, 1, 3—5, 9, 92, 710, 1, 5, 6, 20—7, 35, 8, 42, 50, 2, 7, 8, 60, 1, 4, 5, 73, 91, 4, P.), Cl. X. Rug Alin (6670—7, 711, 20, 2, 35).

PIANUL DE SUS (Hunedoara). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Nanu Ioan (E : 2258, 65, 8, 74, 80 ; 6620, 2), Voinea Ioana (E : 2248, 50, 2, 8, 61, 3, 5, 8 ; 6670, 6, 720, 2).

PIATRA NEAMŢ. *Ş. m. 1* cl. VII. Pop Livia (E : 2248, 51, 4—7). Cl. X. Lazarovici Antonie (6653, 70, 1, 3, 6, 82, 710, 5, 20, 4—7).

PIATRA OLT. *Şc. 8 ani* cl. VII. (E : 2233, 8, 40, 2, 3, 8, 50, 4, 9, 74, 8).

PÎNCOTA (Banat). *Ş. m. 1* cl. VII. Bătrînu Elena (E : 2248, 50, 4, 7, 74, 7, 8, 87). Cl. X. Butulescu Dumitru (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 98, 710, 5, 6, 20—2).

PITEŞTI. *Şc. 9 ani nr. 3* cl. VII. Smîndoiu Ion (E : 2233, 5, 8, 42, 3, 7, 58, 66, 70). *Şc. 8 ani nr. 8* cl. VIII. Georgescu Mihail (E : 2233—6, 8, 30, 3, 5, 7), Stoenescu Gheorghe (E : 2233—8, 43, 7). *Ş. m. 1* cl. IX. Branişte Marcellus (6670, 3, 6, 7, 80, 2, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 35), Dumitrache Ion (6636, 9, 46, 9, 57, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 4, 5, 95, 7, 8, 710, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 35), Sandu Gheorghe (6676, 7, 85, 712, 5, 20, 6, 35), Stan Florin (6670, 3, 6, 7, 82, 716, 20, 1, 2, ,e4 6, 28), Stoica Vasile (6710, 2, 5, 6, 20—2, 4—6, 8, 35). Cl. X. Giuglan Daniel (6670—7, 80, 3, 715, 20, 2, 6), Grozea Elena (6670, 1, 3—7, 9, 80, 92, 716, 5, 6, 20, 2, 4), Popa Marin (6670, 1, 3, 6, 7, 83, 5, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35), Popescu Florea (6670, 1, 3, 4, 7, 9—81, 5, 715, 20, 2, 4, 42). Cl. XI. Maftei Victoria (6670—7, 711, 3, 5, 6, 20, 2, 6), *Ş. m. 2* cl. X. Branişte Dumitru (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 82, 3, 710—3, 5, 20, 33, 5, 50, 5—9, 61, 3, 4, 70, 82, 8, 90, 3), Pisculungeanu Dionisie (6620, 30, 65, 7, 71, 3, 4, 6, 7, 9, 82, 4, 97, 8), Preda Vasile (6670—7, 82, 3, 710, 5, 20, 2, 4, 31, 3, 5). *Ş. G 3.*

Nistorescu Constantin (6631, 2, 4, 9, 47, 8, 63, 4, 6, 70—82, 5, 6, 92, 5, 7, 710—2, 4—6, 20—7, 35, 6, 8).

PLOIEȘTI. *Șc. 8 ani nr. 1* cl. V. Sprinceană Mihaela (E : 2235, 8, 47, 8, 50, 65, 7, 8, 70). Cl. VIII. Brauner Mircea (E : 2233, 5, 6, 8—40, 2—4, 6, 7). *Șc. 8 ani nr. 12* cl. CVI. Dinu Ileana (E : 2238, 40, 2, 4, 7, 8, 50, 4), Tiprigan Carmen (E : 2240, 2, 7, 8, 52, 65, 8, 80). *Șc. 8 ani nr. 21* cl. VII. Turțudău Florin (E : 2248, 57, 8, 65, 8, 70, 4, 80). Cl. VIII. Andrei Dorina (E : 2259, 65, 8—70, 8 ; 6720, 2), Circioagă Teodora (E : 2259, 61, 5, 8—70, 4, 7, 8, 80 ; 6720, 2), Stoica Geogreta (E : 2265, 8—70, 80 ; 6720, 2). *Șc. 8 ani nr. 38* cl. VIII. Ene Ion (E : 2250, 8, 63, 5, 70, 5, 7, 8). *Ș. m. 1* cl. VI. Solomon Ernest (E : 2233, 5, 8, 54, 68, 78). Cl. VII. Cucurezeanu Mihaela (E : 2234, 40, 2, 3, 52, 6—9), Iliescu Sorin (E : 2233, 40, 2, 3, 8, 9, 50, , 47, 8), Ion Mihail (E : 2238, 40, 7—50, 65, 6), Grigorescu Nicolae (E : 2233, 40, 1, 3, 6, 8, 52, 4, 7, 8), Mazilu Radu (E : 2233—5, 8—40, 2, 3, 7), Rotaru Mihaela (E : 2233—5, 8, 40, 2, 6, 7). Cl. VIII. Alexandrescu M. (E : 2248, 52, 4, 7, 61, 5, 8,9, 73, 80), Birsescu Cristian (E : 2233, 5, 6, 8—40, 3, 4, 6—8), Boaldă Nicolae (E : 2257—9, 61, 3, 6, 8, 77 ; 6720, 2), Dobrescu Laurenițu (E : 2252, 3, 65, 8—70, 7, 8), Grünberg Jonas (E : 2233—6, 42, 4—8, 50, 2, 6), Ionescu Marietta (E : 2248, 54, 8, 65, 7, 80, 7, 8), Iordache Sorin (E : 2236, 40, 3, 6, 7, 9, 50, 2, 4, 6, 9, 61), Nicolescu Mariana (6670, 1, 3, 6, 7, 80—2, 720, 2, 4, 6), Nuțescu Adrian (E : 2350, 5, 7, 65, 8, 74, 5, 80), Popescu Mariana (E : 2246—8, 54, 6, 8, 63, 5—8), Preda Oltea (E : 2233, 4, 40, 52—4, 65, 8, 78). Cl. IX. Dragomirescu Cezar (6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 712, 6, 20, 2), Dumitru Ion (6670, 1, 6, 7, 80, 1, 3, 715, 16, 20, 2 , Ionescu Lucian (6646, 8, 9, 53, 63, 5, 70, 1, 3, 6, 7), Ionescu Maria (6670, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 715, 6, 20, 2), Neguț Gheorghe (6639, 46, 9, 53, 65, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 9—8,3 5, 710, 2, 5, 6, 720—4, 6, 33, 5), Nicolescu Amelia (6670, 1, 3, 6, 7, 80—2, 720, 2, 4, 6) Petrescu Florian (6646, 8, 53, 63, 5, 70, 1, 6, 7, 80, 720, 2), Predeleanu Dan (6646, 8, 9, 53, 63, 5, 70, 1, 3, 56, 7,), Prelipceanu Minodora (6670, 1, 3, 6, 7, 9—83, 710, 5, 6, 20—2, 4, 9, 35), Stan Nicolae (6646, 70—4, 6, 7, 80, 1, 720, 2), Stoian Liviu (662, 70—6, 8, 81, 5, 95, 710, 5, 20, 2, 35, 6, 61, 5—7, 63). Cl. X. Andrei Constantin (6667, 70, 1, 3—7, 710, 1, 5, 6, 20, 2), Andronescu Dan (6644, 70—7, 95, 720, 2, 4, 31), Bădulescu Doru (6666, 7, 80—8, 80, 1, 3, 5, 91), Bărbulescu Teodora (6620, 34, 71, 3, 5—7, 80, 1, 4, 5, 96), Brandabur Liviu (6669, 72, 4—6, 95, 715, 20, 2, 51, 5, 7), Ciobanu Constantin (6667, 70—8, 80—5, 96, 7, 707), Constantinescu Marian (66441, 70—8, 95, 6, 8, 710, 5, 20, 2, 4, 35, 6), Cosma Tudor (6670, 3—7, 85, 710, 1, 5, 20, 2), *Dinu Marian* (6666, 7, 70, 8, 80, 1, 4, 9, 90, 2, 3, 5—7, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4—6, 8, 9, 31, 3, 5, 41), Găiseanu Cornelia (6632, 4, 43, 4, 6, 70—7, 80—2, 4, 716, 20, 1, 4, 35), Georgescu Liliana (6657, 70—2, 4—6, 81, 95, 711, 35), Greceanu Rodica (6672, 4, 5, 8, 95, 720, 2, 51, 5, 7, 63), Grigorescu Mariana (6670—3, 5—7, 80—2, 4, 716, 20, 1, 4, 35), Ionaș Tudor (6667, 70—8, 80—2, 4, 5, 96, 7), Ionescu Gabriela (6670—3, 5—7, 80—3, 5), Minescu Florea (6670—8, 82, 5, 711, 20, 2, 6, 33, 5, 48, 63, 76, 88), Neder Gh. (7770, 2, 3, 5, 6, 8, 80, 2, 5, 710, 5, 20, 2, 35, 51, 7, 63), Nicolaescu Cristina (6666, 7, 70—8, 80, 3—5, 91, 5), Nicolescu Eugen (6670—7, 80—5, 720, 2, 35), Nicolescu Ion (6670, 1, 2, 8, 80, 5, 95, 7, 8, 735, 55), Niculescu Vasile (6670, 1, 3, 4—6, 8, 81, 5, 720, 2, 6, 33, 5, 48, 58, 9, 88), Oprea Cornel (6724, 6, 32—5, 47, 8, 50, 1, 5—9, 63, 4, 73, 88), Pîrvu Constantin (6670—8, 710, 5, 20, 2), Predescu Elena (6670—7, 80—5, 720, 2, 35), Rădulescu Natalia (6670—7, 80—3, 91, 5, 711, 6, 20, 4), Ristea Ion (6670—2, 5, 6, 8, 82, 5, 710, 1, 20, 2, 6, 33, 5, 48, 55, 63, 76, 88), Sanda Emilia (6670—6, 81, 2, 915, 5, 711, 20, 2, 4)j Silvestru Stela (6655, 70—6, 81, 2, 91, 722, 4, 35), Solovăstru Violeta (6670—3, 5, 6, 80—2, 95, 716, 20, 2, 4), Spătaru Constantin (6631, 5, 44, 5, 53, 65, 70, 1, 3, 6, 80, 5, 90, 1, 3, 5, 6), Tomescu Pavelina (6620, 31, o, 70—8, 80 -5, 96, 715, 63), Tudorache Marin (6634, 70—6, 8, 80—2, 4, 5, 96, 720, 2), Vișan Nicolae (6670—7, 81, 2, 5, 91, 5, 711, 20, 2, 4, 35), Vlădăreanu Anela (6666, 7, 70—8, 80, 3—5, 720, 2). Cl. XI. Bart Liliana (6666, 70—8, 80, 1, 3, 5, 96, 715, 63), loFrea Sorin (5667, 70—8, 80, 1, 3, 5, 700, 7), Ianculescu Lucian (6597, 601, 5, 34, 66, 7, 70—7, 83—5, 96, 7, 703, 6, 10, 1, 5, 22, 4, 36, 7, 45, 52, 63, 78), Nuțescu Rodica (6661, 70—5, 7, 8, 80, 3—5, 96, 7, 707, 10, 20, 2), Soare Cristel (6648, 59, 66, 7, 70—7, 80, 709—11, 5, 20). *Ș. m. 2* cl. VI. Lupulenco Livia (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 5—7), Marinoaie Georgel (E : 2248, 65, 8, 75, 6, 8, 86, 7), Pastia Alexandru (E : 2248, 50, 2, 4, 65, 6, 8, 80). Cl. VII. Bocelescu Daniel (E : 2248, 50, 7—9, 65, 8, 9, 76), Coropcea Luiza (E : 2248, 50, 8, 9, 65, 6, 8, 70, 6), Ioniță Iulian (E : 2248, 55, 8, 9, 66, 8, 70, 6, 8), Lipănescu Costin (E : 2250, 7—9, 65, 8, 74, 82), Neagu Elena (F : 2248, 50, 3, 4, 8, 9, 65, 6 70, 8), Nicolaescu Traian (E : 2233, 42, 3, 8, 50—3, 5, 8, 68, 70, 7), Nicolau Despina (E : 2248, 51, 3, 8, 68, 70, 6, 8), Petre Mihai (E : 2248, 51, 3, 8, 68, 76), Pîrvu Anca (E : 2248, 51, 3, 8, 65, 6, 8, 76), Popescu Dan (E : 2248, 52, 5, 65, 6, 8, 70, 6, 7), Stan Traian (E : 2233, 40, 8, 50, 4, 5, 68, 74), Stănescu Mihai (E : 2248, 50, 5, 7—9, 65, 70, 6), Stănescu Silvia (E : 2233, 40, 3, 7, 8) Tenuli Elena (E : 2248, 58, 65, 6, 8, 70, 6, 80). Cl. VIII. Antonescu Adria (E : 2248, 50, 2, 8, 63, 5, 8—70), Toma Liviu (F : 2238 ,50, 8, 64, 8, 76—8, 80, 720, 2). Cl. IX.

Cornea Raul (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 80, 1, 3—5, 95, 8, 712, 6, 20—7, 35, 83, 91), Orășanu Laurențiu (6666—71, 3—7, 9—83, 5, 9, 93, 5, 710—2, 5, 6, 20—6, 35, 6, 8, 47), Petrescu Nicolae (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 720, 2, 64), Popic Mișa (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 2, 35), Tăbăcaru Mariana (6646, 9, 79—83, 720, 6). Cl. X. *Andreescu Ioan* (6666, 7, 70—7, 80—2, 4, 5, 92, 3, 5—8, 710—2, 5, 6, 20, 2—4, 6, 35, 6, 51, 5—7), Babonea Paul (6670—3, 5, 8, 80, 5, 710, 5, 20, 2), Barbu Constantin (6673, 6, 8, 720, 2, 4, 6, 33, 5, 48, 51, 5—9, 63, 4, 73, 88), Dimboviceanu Marinela (6670, 1, 4—7, 81, 3, 5, 710, 5), *Stan Emil* (6627—9, 33, 5, 6, 8, 40, 3, 7, 51, 4, 5, 60, 6, 7, 8, 83, 46—9, 90—4, 6—8, 700, 6—9, 11, 2, 4, 6, 20—5, 30, 5—9, 47, 8), Tudor Matilda (6670, 3, 4, 6, 7, 81, 2, 715, 20, 2, 4, 5, 652, 5, 7). Cl. XI . *Radu Vasile* (6628, 36, 8, 45, 7, 65, 8, 71, 4, 7, 80, 7, 91, 4 ,6 9, 700, 2, 5, 8, 10—5, 8, 20—7 9, 30—8, 41, 3—9, 70, 2, 4, 5, 6, 9, 80, 2, 5, 6, 9, 91, 3). (*Ș. m.* 3 cl. VII. Sava Valentin (E : 2233, 4, 8, 50, 8). Cl. VIII. Pupăzan Maria (E : 2236, 48, 5, 4761, 4, 80), Pantille Dumitru (E : 2233, 6, 40, 3, 6—8, 54, 61, 3, 9, 79). *Ș. m. 4* cl. VII. Dumitrache Ion (E : 2248—55, 7—60, 2, 5, 6, 8, 80, 1, 3—8, 80), Grigore Rodica (E : 2233, 40, 2, 3,6—8, 50, 8). Cl. VIII. Enescu Adrian (E : 2233, 6, 40, 3, 5, 7), Vasilache Dan (E : 2234, 6, 7, 42, 6—8, 54, 63). Cl. X. Pascu Vasile (6671, 3—5, 7, 90, 715, 20, 2, 35, 6). *Ș. m. 5* cl. VIII. Dinu Nicolae (E : 2248, 63, 5, 77 ; 6670, 6, 720, 2). Cl. IX. Nicolae Florea (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—4, 95, 7, 8, 710, 4—6, 20—5, 8, 35), Voicilaș Corneliu (6610, 21, 31, 2, 9, 41—4, 5—6, 61—3, 6—8, 6—8, 70—8, 80—3, 86, 8, 92, 3, 5—8). *Ș. m. 6* cl. VI. Stoica Valentin (E : 2242, 6—52). Cl. VII. Anton Costel (E : 2233, 40, 3, 50, 8, 9, 65, 8, 78, 80), Antonescu Luiza (E : 2235, 40, 3, 5, 8, 50, 4, 8), Beffa Mihai (E : 2233, 40, 3, 5, 65, 8, 70, 4, 80), Bunbaum Constantin (E : 2233, 40, 3, 7, 8, 54, 7, 68), Dobre Doru (p : 2233, 40, 3, 7, 8, 50, 4, 7, 8, 65, 6, 8, 80), Gănescu Mihaela (E : 2233, 8, 40, 2, 3, 6, 7, 8, 60), Goicea Ana (E : 2233, 5, 40, 3, 5, 7, 8, 50, 8). Cl. VIII. Stan Constantin (E : 2248—50, 2, 4, 6—61, 3, 5, 8, 76, 80). Cl. X. Karaghior Radu (6632—4, 9, 44, 8, 57, 70, 3, 6, 80, 716, 35).

POCRUIA (Oltenia). Cl. VIII. Cocină Milica (E : 2234, 8, 50, 3, 8, 78, 80, 722, 5).

POGOANELE (Ploiești). Cl. XI. Milea Lucian) 6710—3, 5, 6, 20, 2, 3, 5, 6, 35, 6, 45, 8).

PREDEAL. *Ș. m.* cl. XI. Ioniță Maria (6628, 30, 2, 3, 6—8, 40, 4, 8, 51, 5—8, 60—2).

PRISĂOANI (Iași). Cl. VI. Buruiană Maria (E : 2233, 5, 8—40, 3, 6—8, 50—2), Niron Elena (E : 2233, 40, 2, 3, 8—55). Cl. VII. Goldan Elena (E : 2238—40, 2—4, 6—51). Cl. VIII. Pintea Maria (E : 2233—5, 8—40, 2—7).

PUCHENI. (Ploiești). *Ș. m.* cl. IX. Tudor Stoica (6639, 46, 9, 65, 71, 4, 7, 9, 85, 715, 21, 4, 35).

PUCIOASA. *Șc. 8 ani nr. 1* cl. V. Căprănuș Simona (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 5, 7—54, 8), Vasilescu Alina (E : 2249—53, 9, 61, 3, , 46, 9—71, 7, 8). *Ș. m.* cl. IX. Cimpoca Gheorghe (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 4, 5, 720, 2, 4, 6), Despa Ion (E : 2261, 3 ; 6670 3, 4, 6, 7, 70, 3, 720, 2, 6), Pavel Cristian (6670, 1, 3, 6, 7, 80, 2, 5, 720, 2, 56), Stoica Cecilia (6666, 70, 1, 3—7, 81, 95, 710, 5, 6, 20, 6, 35). Cl. X. *Mărculescu Corneliu* (6666, 7, 70—8, 80, 3, 5, 94, 5, 7, 9, 701, 3, 15, 6, 20—6, 30—3, 5—8, 40, 2, 8), *Vasilescu Nicolae* (6659, 79, 81, 6, 90, 2—4, 8, 700, 7, 10—3, 5, 6, 8, 20—33, 5—8, 40—2, 5, 6, 8). Cl. XI. *Nițescu Dan* (6580—8, 95, 9, 601, 9, 15, 28, 30—4, 7, 48, 9, 57, 9, 63, 70—7, 80, 4, 95, 710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 35).

RĂCARI (București). Cl. X. Boiangiu Traian (6582, 3, 601, 5, 6, 9, 15, 6, 39, 70—7, 82, 5, 93), Dincă Gheorghe (6631, 2, 9, 41—4, 6, 9, 63, 6, 60, 1, 3), Marcu Ioana (6631, 42, 4, 6, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 95, 720, 2), *Miulescu Cecilia* (6582—8, 601, 6, 7, 9, 13, 5, 6, 8, 21, 31, 2, 4, 42, 4, 6, 53, 6, 60, 3, 7, 70—8, 8, 1, 3, 5, 93, 5, 7, 8), Nincă Ion (6670—7, 80, 2, 6, 710, 1, 5, 6, 720, 2). Cl. XI. Beșeală Gabriela (6671—8, 82, 711, 5, 20, 5), Tica Niculina (6670, 1, 3—7, 82, 5, 713, 5, 20, 2, 35).

REȘIȚA. Cl. VII. Ignea Gelu (E : 2233, 5, 42, 8, 54, 7, 65, 8).

RÎMNICUL VÎLCEA. *Ș. m. 2* cl. X. Catargiu Virginia (6642, 4, 8, 70, 1, 3—7, 81, 5, 711, 20, 2, 4, 6, 35), Sireţchi Roman (6670—7, 81, 5, 711, 6, 20—2, 6, 35), Ștefan Domnica (6642, 8, 70, 1, 3—7, 80, 2, 5, 95, 716, 20), Voinescu Dumitru (6631, 44, 70, 1, 3—7, 80, 2, 5, 95, 716, 20, 2). *Ș. m.* Bălcescu cl. X. Paraschivescu Marius (6670, 1, 3, 5—7, 80, 710—2, 6, 22). Cl. XI. Popescu Lucian (6666, 7, 70—8, 80, 1, 703).

RÎMNICUL SĂRAT. *Ș. m. 1* cl. VI. Grigorescu Tiberiu (E : 2238, 40, 3, 6—8, 50, 77), Cl. IX. Teșilă Vasile (6670, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 720, 2, 4, 8).

ROMAN. *Șc. 8 ani nr. 7* cl. VI. Platon Emilia (E : 2235, 8, 40, 3, 6, 8—50). *Ș. m.* cl. X. *Bercovici Nelu* (6627, 30—2, 48, 62, 5—85, 92, 3, 5—8, 707, 9—12, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 33, 5, 6, 39), Pompil Valeriu (6641, 70—7, 80, 2, 736, 8). Cl. XI. Orenstein Romeo (6628, 38, 71, 3—5, 7, 709, 11, 3, 5, 20, 45).

ROȘIORII DE VEDE. Cl. X. Radu Gheorghe (6644, 70, 3, 5—7, 85, 710, 5, 20, 2, 35).

SĂCELE (Brașov). Cl. VIII. Bălan Stana (E : 2233, 5—40, 2, 3, 6, 7), Colac Maria (E : 2233, 5—40, 2—4, 6), Grosu Maria (E : 2233, 5—40, 2—4, 6, 7), Marin Maria (E : 2233,

5—40, 2—4, 6, 7), Ştefan Eliza (E : 2233, 5—40, 2, 3, 6, 7), Tufan Paraschiva (E : 2233, 5—40, 2—4, 6, 7).

SĂCUENI (Crişana). *Ş. m.* cl. XI. Zaha Gabriel (6666, 7, 70—8, 80, 710—3, 5, 20, 35, 45, 47).

SADOVA (Oltenia). Cl. VIII. Tudor Ilie (E : 22233, 6, 40, 3, 50, 7, 61, 3).

SALCIA (Bucurdşti), Anghel Nicoleta (E : 2238, 40, 2, 3, 6—8, 50, 2, 63, 5, 6, 8, 73).

SATU MARE. *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VIII Gozner Gabriella (E : 2233, 6, 40, 2, 3, 7, 8, 63). *Ş. m. 1* cl. IX. Sichet Margereta (6653, 73, 4, 7, 92, 716, 20, 2, 5, 6, 35). Cl. X. Grad Gheorghe (6631, 4, 9, 42—4, 6, 9, 56, 61—3), Ciarnău Nicolae (5653, 70—3, 6, 83, 5, 95, 715, 6, 20, 36).

SĂVENI .*Ş. m.* cl. VII. Cohn Haim (E : 2233, 8—40, 3, 6, 8, 9, 52).

SCĂPĂU (Oltenia). Cl. VIII. Duţu Gabriela (E : 2235, 6, 42, 7, 8, 54, 63, 70, 3, 6).

SIBIU. *Şc. 8 ani nr. 4* cl. VIII. Tudor Floriana (E : 2220, 4, 7, 32, 6, 40, 3, 7). *Şc. 8 ani nr. 8* cl. VII. Schuster Gerhard (E : 2248, 57, 65, 6, 8, 73, 7, 8). Cl. VIII. Drăgan Florin (E : 2235, 9, 42, 6—8, 52, 8, 63, 5, 76, 80). *Şc. 8 ani nr. 12* cl. VIII. Andronic Sanda (E : 2250, 7, 8, 61, 3, 5, 8, 80; 6670, 6, 720, 2), Popa Elena (E : 2233, 40, 3, 7, 8, 59, 68, 78). *Şc. 8 ani nr. 13* cl. VI. Lupean Ioan (E : 2265—72). *Şc. 8 ani nr. 15* cl. VIII. Laşiţă Dan (E : 2235, 6, 9, 42, 5—7, 63, 5, 7—9, 70, 80). *Şc. 8 ani nr. 17* cl. VII. Petrescu Gabriela (E : 2240, 2, 3, 7, 8, 56, 65, 9),*Ş. m. 1* cl. X. Cuşnir Dana (6639, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 715, 6, 20, 2, 4). Cl. XI. Pompilian Anca (6634, 44, 72—7, 80—3, 92, 711, 3, 5, 6, 20, 2, 35). *Ş. m. 2* cl. IX. Hodor Liviu (6641, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 715, 20, 2). Cl. X. Sîrbu Emilia (6632, 67, 70, 1, 3, 6, 7, 85, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 35). Cl. XI. Bujor Irina (6666, 70—8, 715, 20, 2), Bunea Mircea (6628, 31, 4, 46, 59, 70—7, 710, 5, 22), Circiumă Doina (6666, 6, 70—8, 720), Cristea Nicolae (6666, 7, 71—5, 7, 8, 80, 4, 94, 5), Darvas Viorica (6666, 7, 70—8, 720), Hammaer Emil (6631, 4, 7, 46, 8, 9, 70, 1, 3, 4, 6, 7), Szabo Ludovic (6628, 31, 4, 46, 50, 6, 7, 8, 85, 720, 2, 35). *Ş. m. 3* l.c IX. Făgăraşi Sandor (6646, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 720 2). Cl. XI. Boldea Liviu (6628, 31, 2, , 7, 40, 4, 55, 9, 66—78, 82, 5, 95, 703, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2), *Bucur Liliana* (6594, 626, 8—44, 6—9, 51, 3, 5—78, 80—98, 700, 1, 3, 4, 6—11, 6, 20—2, 4, 6, 7, 31, 3—6, 42, 4, 5, 7, 8), Popescu Adriana (6632, 41, 2, 8, 53, 7, 9, 62, 8, 83, 5, 93, 6, 8, 709, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 35, 45, 8), Raduly Janos (6628, 34, 41, 8, 59, 62, 3, 70, 1, 3, 5—7).

SIGHIŞOARA. *Ş. m. 2* cl. XI. Cozac Andrei (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 710, 1, 3, 5, 22, 35).

SIMERIA. *Ş. m.* cl. VI. Surean Vasile (E : 2240, 3, 8, 54, 65, 6, 70, 7). Cl. IX serală. Gîd Teodor (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 715, 20, 2, 35, 45, 6, 763, 77, 8, 80).

SINGERU (Ploieşti). Cl. VIII. Pişcoci Constantin (E : 2248, 50, 4, 8k 65, 9, 720, 2).

SÎNTANDREI (Crişana). *Şc. 8 ani* cl. V. Chirvasi Dumitru (E : 2223, 35, 8, 9, 42, 5, 8—50, 4), Torjoc Floare (E : 2223, 35, 9, 42, 3, 7, 54, 9), Vaida Ioan (E : 2223, 34, 5, 8—40, 2, 3, 5, 7—50). Cl. VII. Mureşan Constantin (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 67, 8, 78).

SINTEŞTI (Bucureşti). *Şc. 8 ani.* Radu Gh. Elena (E : 2242, 4, 8, 54, 6, 8, 68, 9).

SLATINA *Ş. m. 1* cl. X. Frunză Mircea (6646, 9, 70, 2, 3, 5, 6, 710, 5, 6, 20, 2, 33). Cl. XI. Bucur Nicolae (6628, 38, 59, 70, 1, 3, , 4, 5, 7, 710, 1, 3, 20, 2, 35). *Ş. m. 2* cl. XI. Nailin I. Marin (6628, 37, 9, 70, 3, 5—7, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35).

STĂNEŞTI (Bucureşti). Cl. VI. Arvat Pompiliu (E : 2248, 52—4, 65, 8, 70, 80).

STREJNIC (Ploieşti). *Şc. 8 ani nr. 38* cl. VIII. Anghelache Ion (E : 2250, 63, 5, 6, 70, 4, 7, 8).

SUCEAVA. *Ş. m. 2* cl. IX. Zavera Ion (6584, 99, 601, 31, ,4 57, 70, 1, 3—7, 80—5, 95, 8, 700, 10, 1, 6, 20, 4, 35, 6, 42).

ŞASE MARTIE SAT (Dobrogea). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Martin Constantin (E : 2248, 51—8, 63, 77, 8).

SOMCUŢA MARE (Maramureş). *Şc. 8 ani* cl. V. Crişan Horia (E : 2235, 8, 40, 3, 8, 9, 50, 1). Cl. VII. Papa Gheorghe (E : 2233, 4, 42, 55, 7—9).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş). *Şc. 8 ani nr. 17* cl. VI. Popa Laurenţiu (E : 2248, 50, 2, 8, 9, 65, 6, 8, 70, 4, 8, 80), Popescu Cristian (E : 2238, 44, 5, 8, 52, 8, 65, 6, 8, 80), Patriche Dorinel (E : 2248, 50, 2, 8, 9, 65, 8, 80). Cl. VII. *Picol Gheorghe* (E : 2248—66, 8—78, 80, 6670, 6, 720, 2, 4). Cl. VIII. Răducu Aurel (E : 2234, 8, 9, 46, 8, 50, 2, 4, 8, 63). Cl. X. Axinte Ioan (6639, 48, 70, 1, 3—7, 80, 715, 6, 20, 4, 6, 9, 35), *Baltă Mihai* (6630—2, 4, 9, 41, 4, 6, 9, 53, 7, 61, 3—5, 7, 70—8, 80—3, 5, 93, 5, 7, 8, 710, 1, 2, 5, 6, 20—7, 9, 31, 5, 6, 8).

TĂUT (Crişana). Cl. VIII. Todinca Teodor (E : 2238, 48, 50, 2, 4, 6—8, 61, 3).

TEACA (Cluj). Cl. VIII. Toderuţ Ovidiu (E : 2233, 5, 6, 8, 63, 5, 8, 80)l.

TECUCI. *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VIII. Olteanu Anişoara (E : 2233, 48, 58, 9, 61, 3, 8, 70, 4, 7, 8, 80). *Ş. m. 1* cl. X. Aghiniţei Marioara 6711, 6, 20, 2, 35, 70, 1, 3—8, 92), Goni

Florin (6670, ,1 3—7, 82, 92, 711, 6, 20, 2, 35), Lăcustă Ion (6670, 3—6, 82, 711,6, ,— 2, 35), Munteanu Marieta (6670, 3, 5—7, 92, 711, 6, 20, 2, 35, 8), Nazarie Elvira (6670, 1, 3—7, 92, 711, 16, 20, 2, 35), Suliman Gheorghe (6670, 1, 3—7, 92, 711, 6, 20, 2, 3, Teodor Maria (6670, 1, 3—6, 82, 711, 6, 20, 2, 35), Zelinski Gabriela (6670, 92, 711, 3, 5, 6, 20, 2, 35). Cl. XI. Fulger Mihail (6666—77).

TIMIȘOARA. *Șc. 8 ani nr. 4* cl. VI. Munteanu Georgeta (E : 2248, 53—5, 65, 8, 70, 6, 8, 80), Peter Carol (E : 2233, 4, 6, 8, 40, 2, 3, 5). *Ș. m. 1* cl. VI. Neguțiu Mircea (E, 2248—50, 2, 8, 9, 65, 7, 8, 70, 1, 7, 8). Cl. X. Mihailovici Titus (6670—7, 82, 3, 5, 711 5, 20, 2). *Ș. m. 2* cl. VII. Biroiașiu Carmen (E : 2240, 2, 3, 57, 65, 6, 74, 8), Demeter Holde gard (E : 2240, 2, 3, 8, 57, 8, 70, 7, 80), Koch Dorothea (E : 2233, 8, 40, 3, 8, 54, 65),51- Schuer Cristina (E : 2240, 2, 3, 8, 58, 70, 8). Cl. XI. *Deheleanu Dan* (6666, 7, 70—8, 80—2, 5, 92, 703, 7, 9, 10, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 45, 7, 651, 3, 5, 7—9, 62, 4, 80). *Ș. m. 3* cl. VIII. Constandiș Brîndușa (E : 2233, 48, 50, 7, 8, 68, 70, 8). *Ș. m .7* cl. VII. Ardeleanu Romeo (E : 2248—50, 2, 4, 5, 8, 9, 61). Cl. VIII. Faar Silvia (E : 2248, 9, 50, 2, 4, 5, 8, 61, 3). Cl. XI. Rothenstein Ana (667, 73—6, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35).

TITU GARĂ. *Ș. m.* cl. X. Bărbulescu Alex. Puiu (6627, 46, 61, 71, 3—6, 84, 6, 92 5, 7, 8, 711, 20, 2, 4, 31, 2, 5, 6).

TÎRGOVIȘTE. *Ș. m. 1* cl. XI. Atanasiu Adrian (6628, 8—41, 60, 3, 75—7, 80, 1, 3, 5, 95, 7, 8, 707, 09, 11, 3, 5, 20, 2). *Ș. m. 2* cl. X. *Vartan Florin* (6666—87, 92, 3, 5, 7, 8, 10, 1, 5, 6, 8, 20, 2, 4, 6, 31, 3, 5, 6, 41, 8, 50—3, 5—61, 3, 4, 7). *Ș. m. 3* cl. X. *Stanciu Virgil* (6631, 2, 4, 6, 9, 41, 2, 4, 6, 8, 57, 63, 5, 6, 70, 1, 3, 5, 6, 7, 80, 2, 3, 5, 9, 90—3, 5, 8, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 74, 8), Ștefănescu Călin (6670—7, 80, 95, 729, 35).

TÎRGU JIU. *Ș. m. 1* cl. IX. Ciocîrlie Valeriu (6639, 61, 70, 3, 4, 6, 7, 81, 2, 720, 2, 4). Cl. X. Baros N. Ion (6632, 57, 61, 5, 710, 1, 5, 6, 20—4, 56), *Curcanu George* (6632, 43, 53, 7, 61, 5, 710, 1, 55—7, 60, 3, 8, 9, 86, 92, 4, 703, 8, 10, 1, 3—7, 20, 2, 4, 6, 8, 32, 3, 5, 6, 8, 44—8). *Ș. m. 2* cl. IX. Diaconu Ilie (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 3, 4, 5, 95, 710, 5, 6, 20—2, 4, 6, 35, 7,). Cl. XI. Botea Titu (6666, 7, 70, 1, 3—7, 9, 80, 5, 9, 700, 2, 3, 611,— 3, 6, 20, 2, 6, 8, 31, 2, 5, 6, 41, 8).

TÎRGU LĂPUȘ (Maramureș). Cl. VIII. Bellu Dan (E : 2236, 40, 3, 8, 54, 7, 8, 63), Kaufmann Robert (E : 2258, 63, 5, 8, 70, 6, 720, 2). Cl. X. Bogza Grigore (6070, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 710, 15, 6, 20, 1, 2, 4, 35), Ionas Vasile (6666, 7, 70, 1, 3—7, 80, 1, 2, 93, 5, 7, 8), Latiș Ioan (6670, 1, 3—7, 80—2, 710, 1, 5, 20, 2), wlteanu Ioan (6670, 1, 4, 6, 7, 80, 1715, 20, 2, 6, 76), Tuns Ioan (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 710, 5, 6, 2—02, 4).

TÎRGU MUREȘ. *Ș. m.* cl. V. Schieb Peter (E : 2248—60, 65, 8, 83, 6). Cl. VIII. Simovici Igor (E : 2233—5, 8, 9, 42, 5—7). *Ș. m. 4.* cl. X. Doboș Alexandru (6666, 7, 70, 3—6, 711, 20, 2, 36).

TÎRGU NEAMȚ. *Ș. m.* cl. VII. Vasiliu Doina (E : 2233, 4, 3, 7, 8, 50, 68, 80).

TÎRNĂVENI. *Șc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Gruia Doinița (E : 2233, 40, 2, 3, 8, 57, 65, 77).

TORMAC (Banat). Cl. VI. Jenea Petru (E : 2256, 65, 8, 70, 1, 4, 8, 80), Nagy Iulianna (E : 2256, 65, 8, 70, 1, 3, 8, 80).

TRUSEȘTI. Cl. IX. Breșug Teodor (6670, 3, 4, 6, 7, 81—5, 716, 20—4), Corduneanu Dumitru (6553, 4, 6,1 3, 71, 83, 4, 601, 9, 15, 8, 21, 46, 9, 53, 7, 70, 1, 3, 7, 80—5, 95, 7, 701, 12, 720—6, 9, 31, 3—5, 7, 60, 1, 3, 4, 5, 7—80), Cozaru Constantin (6639, 46, 53, 70, 3, 4, 6, 7, 80, 712, 6, 20—3, 6, 35), Deliu Aurel (6670, 3, 6, 7, 80—5, 720—4, 35), Livădaru Emil (6670, 3, 4, 6, 7, 80ơ5, 712, 6, 20—6, 29, 33, 5), Luchian Gheorge (6670, 3, 4, 6, 7, 84, 5, 716, 20, 2, 9, 35), Roșu Mircea (6680—4, 712, 6, 20, 4, 6, 9, 30) cl. X. Aionesei Ion (6649, 62, 7, 78, 82, 4, 6, 9, 95, 702, 3, 10—2, 5, 6, 720—6, 8—42, 6, 8), Buneanu Emil (6670, 1, 3, 5—7, 82, 5, 710—2, 5, 6, 20, 4—6, 36), Simion Constantin (6634, 44, 8, 9, 63, 71, 7, 80—2, 5, 97, 7d0, 1, 5, 6, 20—2, 35), Șchiopu Constantin (6630, 41, 2, 53, 67, 72, 81—6, 95—7, 711, 5, 6, 20, 2), Teodorescu Stelian (6670, 1, 3, 5, 6, 85, 711, 5, 20, 2, 4, 6, 35, 51, 5, 7, 63, 76). Cl. XI. Achiței Ioan (6628, 30—4, 41, 2, 4, 6, 53, 9, 66, 7, 70—8, 80, 2—6, 95, 6, 702, 3, 6, 9—11, 3, 5, 6, 20—2, 6, 32, 3, 5—8, 41, 2, 5, 8), *Arcip Petre* (6628, 30, 3, 4, 7, 8, 40, 1, 8, 51, 5, 6, 9, 2, 6—78, 80—6, 9, 91—3, 5—8, 700, 2, 3, 6, 7, 9—16, 8720—2, 4—6, 9, 31, 5—8, 40—2, 5, 6, 8), *Cuzmanciuc Dumitru* (6628, 33, 40—3, 9, 57, 9, 65—7, 9, 78, 80, 6, 9, 91, 3 ,5 8, 700, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 3, 6, 20, 6, 9, 31, 8, 40, 2, 5, 6, 8), *Mîrza Mihai* (5537, 8, 40—3, 8, 651, 5, 7, 9, 61, 6—78, 80—6, 9, 90—3, 5—8, 700, 3, 6, 7, 9—16, 20—2, 4—6, 9, 31, 3, 5—8, 41, 2, 5, 6, 8), *Novac Constantin* (6628, 33, 4, 41, 3, 9, 55, 7, 9, 61, 5—78, 80—6, 9, 91—3, 5—7, 700, 2, 3, 6, 6, 7, 9, 710, 1, 3, 5, 6, 20—2, 4—6, 9, 31—3, 5—8, 40—2, 45, 6, 8).

TULCEA. *Ș. m. 2.* Simion Poliect (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 97, 8, 710, 5, 24, 5, 9, 42).

TURDA. cl. X. Gogu Valeriu (6670—8, 80, 2, 5, 96, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 61, 9, 35, 8, 51, 5, 7, 61, 3, 7, 8, 83, 6, 8, 91), Siom Liviu (6646, 8, 53, 70—7, 85, 715, 20, 2, 35). Cl. XI. *Pop Gheorghe* (6666—78, 80—3, 5, 92, 3, 5—8, 703, 6—9, 710, 7, 22—8, 35—8, 48, 9),

Șerban Petru (6666—78, 80, 1, 3, 5, 92, 3, 5—8, 703, 7, 10, 1, 3—7, 20, 2, 5, 6, 8, 35—8, 45, 8, 9).

TÎRGU MUREȘ. *Ș. m. 1* cl. VI. Stoina Maria (E : 2233, 5, 8, 40, 3, 6—9, 53, 4). Cl. XI. Drăguș Radu (6628, 9, 30, 2, 7, 8, 40, 3, 9, 66, 7, 9). *Ș. m. 6* cl. IX. Gheornia Ioana (6670, 67, 710, 6, 9, 20—2, 6, 35. Cl. X. Bogdan Mircea (6666, 7, 80—8, 80—2, 5, 93, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 33, 5, 6, 77, 8, 80—2, 5, 93, 5, 7, 8), CCiugulea Niylae (6653, 70—7, 80, 710, 5, 20), Russu Epaminonda (6667, 70—83, 5, 6, 93, 5, 7, 10, 1, 5, 6, 20, 4, 6, 9, 35, 42, 51, 5, 7, 61, 3, 4).

TURNU SEVERIN. *Șc. 8 ani nr. 10* cl. VIII. Georgescu Radu (E : 2233, 5, 6, 9, 40, 2, 4—7). *Ș m. 1* cl. IX. Popescu Constantin (6630, 1, 4, 9, 44, 6, 9, 53, 5, 70—7, 79—83, 95, 8, 710, 1, 4—6, 20—7, 33).

UȘUREI (Argeș). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Ciungu Nicolae (E : 2250, 2, 7—9, 65, 6, 8).

VĂCĂREȘTI. Cl. VIII. Florea Nicolae (E : 2236, 43, 5, 7, 50, 3, 5, 8, 70, 7, 80 ; 6670, 6, 720, 2).

VALEA LUI MIHAI. Cl. X. Ioan Vesa (6666, 7, 71—7, 93, 5, 7).

VĂLENI (Iași). Cl. VI. Călinescu Constantin (E : 2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 5—8, 50, 2—4, 7—9, 63, 5—8, 70, , 47, 8, 80 ; 6681, 720, 4, 42).

VĂLENII DE MUNTE. Cl. X. Tudosie Victor (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 720, 2, 34, 5, 42). Absolvent Zaharia Ion (6666, 70—7, 80, 2, 3, 5, 11, 5, 20, 2, 35, 51, 5—7, 63, 4, 82).

VASLUI. *Ș. m. 1* cl. VII. Safer Marta (E : 2235, 40, 3, 8, 54, 7, 65, 8, 80).

VATRA DORNEI. cl. X. Fodorea Mihail (6643, 9, 63, 70, 3—8, 80, 2, 715, 20, 38).

VICTORIA (Iași). *Șc. 8 ani* cl. VII. Erbiceanu Gheorghe (E : 2248, 51, , 6, 7, 68, 74 ; 6716).

VINGA (Banat). *Ș. m.* cl. VIII. Dupta Iosif (E : 2226, 36, 8, 40, 2, 3, 7, 53, 7, 9, 77, 80), Ghinga Emilian (E : 2233, 6, 40, 3, 59, 74, 7, 80).

VÎRTOAPELE DE SUS (București). Cl. VII. Nedelea Stancu (E : 2242, 8, 54, 68, — 63, 5, 8, 9).

VIȘEU (Maramureș). Cl. IX. Trifoi Vasile (6670, 3, 6, 7, 80, 716, 20, 2, 6, 35).

VIȘEUL DE SUS (Maramureș). *Șc. 8 ani nr. 1* Pentek Ecaterina (E : 2192, 202, 6, 15, 7, 8, 32).

VLAHI. *Șc. 8 ani* cl. VIII. Dumitru Stana (E : 2248—64).

VLĂSINEȘTI (Suceav)a. Cl. VII. (E : 2233, 40, 2, 3, 8, 65, 8, 74). Cl. VIII. Axinciuc Constantin (E : 2248, 50, 1, 4, 8, 65, 6, 8, 70, 7, 80), Axinciuc Marcel (E : 2248, 50, 1, 4, 63, 8, 70), Crețu Gheorghe (E : 2233, 43, 50, 68, 70, 7, 8, 80), Babiuc Ion (E : 2233, 43, 50, 68, 70, 7, 8, 80), Bliorți Maria (E : 2248, 50, 1, 4, 63, 8, 70, 80), Damian Iulian (E : 2248, 50, 8, 66, 8, 77, 80).

VOICEȘTI (Argeș). *Șc. 8 ani* cl. VII. Titu Ion (E : 2233, 5—8, 40,3 5, 7—50, 2, 7, 8, 61, 5—8, 76 ; 6670, 6, 720, 2).

ZALĂU. Cl. X. Andruşenco Silvia (6670—8, 80, 93), Mărgineanu Teodor (6670—6, 85, 93, 7t5, 35, 6), Turcaș Teodor (6666, 70, 1, 3, 4, 5, 7, 80, 95, 711, 20, 2, 4, 32, 56), Terheșiu Silviu (6670, 1, 3—7, 710, 3, 5, 20, 2, 6).

★

Pînă la 15 iunie s-au primit soluții bune la probleme propuse în ultimele trei numere. Evidențiații din această rubrică sînt trecuți cu litere cursive.

ABRUD. Cl. X. Coroiu Vasile (6670, 3, 5, 6, 82, 95, 711, 5, 20, 2, 4, 63, 4).

ADAMCLISI (Dobrogea). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Dumitru I. Stana (E : 2265, 56, 8, 70—2, 6—80 ; 6722, 4).

ADJUD (Bacău). *Șc. 8 ani* cl. VIII. Apostol Constantin (E : 2265—8, 70, 3, 8, 94—6).

AGNITA. *Ș. m.* cl. VII. Ceanga Mircea (E : 2265, 80, 70, 7, 8, 80, 8, 91).

AIUD. Cl. X. Srulla Dumitru (6710, 1, 4—6, 20—2, 31, 5, 6, 52, 5, 7—61, 3). Cl. XI. Molnar Iuliana (6715, 20, 2, 54—60, 2—4).

ALEXANDRIA. *Ș. m. Alex. Ion Cuza* cl. XI. Micu Mihai (6670, 1, 5, 6, 83, 710, 1, 5, 20, 2, 51, 4—6, 62—4).

ANINA. *Ș. m.* cl. VII. Toma Marius (E : 2265, 6, 8, 70, 3, 4, 6, 8, 80).

ARAD. *Șc. 8 ani* cl. VII. Stoienescu Grigore (E : 2255, 6, 8, 70, 80, 2, 3, 91). *Ș.m.1* cl. IX. Kuligovszki Iosif (E : 2260, 3, 80, 90 ; 6670, 1, 3, 6, 20, 2, 35, 57). *S.m.* 2 cl. VIII. Biticiu Mihaela (E : 2265, 8, 81, 2, 91, 3, 300 ; 6720, 2). C. IX, *Lucuța Petru* (E : 2260, 1, 3, 78 ; 6670—7, 80—4, 710—12, 5, 6, 20, 2—6, 9, 35, 05, 1, 3, 5, 7, 60 1, 3, 4, 8, 78, 82, 3, 6, 91). *Ș.m.* 4 cl. IX. Aciocîrlănoaiei Florea (E : 2277, 8, 80, 9, 90 ; 6710, 5, 20, 2, 35, 52, 7, 64).

AVRIG. Cl X. Ionescu Maria (6644, 66, 7, 70—7, 80, 95, 7), Zamfirescu Daniela (6670—7, 716, 20, 2, 35).

BACĂU. *Ş.m.1* cl. VIII. Knoll Raul (E : 2268—71, 4, 5, 80—3, 8, 91), Cl. X. Andrei Nicolae (6710, 2, 5, 6, 20, 2, 6, 35, 61, 5, 7, 63), Ciochină Silviu (6710, 1, 4—6, 20—2, 4, 6, 35, 6, 48, 05). *S.m. 2* cl. X. Adam Dumitru (6710, 1, 4, 5, 20, 2—4, 6, 36, 8, 40, 51, 8), Duculu Constantin (6715, 20, 2—4, 6, 35, 50, 1, 5, 7, 63), *Cosma Aurel* (6666, 7, 70—2, 4—8, 80—3, 5, 6, 9, 91—3, 5—8, 707, 10, 1, 5, 20—2, 6—8, 31, 5—8, 40, 1, 4).

BAIA MARE. *S.m.3* cl. IX. Apşan Dan (E : 2277, 84, 5, 9, 90; 6739, 45, 8, 50, 1, 2, 5—8, 63, 4, 8, 85). Cl. X. Vasilov Angela (6697, 732, 6, 41, 51, 3, 5—7, 9, 61, 3, 7, 82).

BALA (Tr. Severin). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Sibinescu Niculina (E : 2265, 6, 8, 80,91——4, 6, 301—3).

BANBANA (Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Duminică Elena (E : 2248, 63, 5, 70, 89, 90; 6670, 3, 6, 720, 2), Duminică Silvia (E : 2248, 63, 70, 82, 9, 90; 6670, 3, 6, 720, 2). Nicolae Constantin (E : 2255, 63, 8, 70, 89, 90; 6670, 3, 5, 715, 20, 2).

BĂICOI (Ploieşti). Cl. X. Roman I. Ion (6714, 25, 32, 51—3, 5—7, 9, 61, 3, 97, 99, 831, 35).

BĂRCĂNEŞTI (Argeş). *Şc. 8 ani* cl. VIII. Cioacă A. Ion (E : 2248—50, 2—5, 60, 3—, 8, 71, 6, 8—83, 91).

BEIUŞ (Oradea). *Ş.m.1* cl. X. Gavruţă Pascu (6670, 6, 90, 5, 710, 1, ,5 6, 20—2, 4—6, 20—2, 4—6, 31, 2, 5, 6, 50—2, 5—61, 4, 4, 83, 94, 7, 802, 3, 21, 4).

BISTRIŢA (Cluj) *Ş.m.1* cl. IX. Gagea Alexandru (E :2277, 90; 6710, 5, 6, 21, 3—5, 35, 50, 7). Cl. X. Lupşa Nicolae (6710—2, 5, 6, 20—2, 4, 35, 55, 7, 63). Mihăilaş Liana (6732, 41, 50—3, 5—7, 9, 61, 3, 85, 92). Cl. IX. Lucaci Rodica (56714, 24, 41, 50—2, 5—7, 9, 61, 3, 97).

BÎRCA (Oltenia). Cl. X. Mitu Ion (6715, 6, 20, 2—5, 9, 35, 6, 42, 55, 96).

BÎRLAD *Ş.m.1.* cl. IX. Manole Aurelian (E : 2263, 79, 80, 9; 6716, 2—02, 4, 6, 35, 58, 91), Simion C. Diana (E : 2279, 80, 305; 6716, 20—2, 58, 60, 95, 802, 11). Cl. X. *Badea Lori* (6711, 2, 4, 6, 20—4, 8, 9, e31, 2 4—8, 50 1, 5—8, 60, 3, 4, 7, 8, 78, 82, 7, 8, 90, 2). *Ş.m.2* cl. X. Pîslaru Victoria (6710, 5, 6, 22, 57, 96, 7, 9, 801, 2, 3, 8). *Ş.m.3* cl. VIII. Mocanu Carmen N. (E : 2257—9, 61, 3, 5, 8, 70, 8, 9; 6720, 2). Cl. IX. Vlad Angela (E : 2277, 9, 80, 5, 9, 90; 6715, 6, 20, 2, 35, 58, 88).

BOROAIA (Suceava). *Şc. 8 ani nr. 1* cl. VII. Petrescu Viorica (E : 2282, 92—6, 9, 301).

BOZOVICI (Banat). *Ş. m.* cl. VII. Ignea Anişoara (E : 2265, 6, 8, 76, 8, 82. 93—6, 9, 300—2), Piescu Călina (E : 2265, 6, 8, 70, 6, 8, 86, 7).

BRAŞOV. *Şc. 8 ani nr. 2* cl. VIII. Melenciuc Alexandru (E : 228. 2, 90, 3—6, 9, 300—2). Nr. 3 cl. VIII. Sluşan Ileana (E : 2265, 7, 9, 76, 7, 9—83, 93—6, 9). Nr. 12 cl. VI. Guţu Anca E : 2248, 50, 2, 3, 8—60, 5, 8, 70, 80). *S. m. 4* ccl. VII. Olteanu Sonia (E : 2265, 8, 82, 3, 91, 4—6, 9, 401,, 2). Cl. IX. Bontaş Vasi.le (E : 2278—80; 6670, 3, 4, 5, 6, 720—7). Cl. X. Bălăşoiu Ioana (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 51, 2, 5, 7, 61, 3), Colceriu Mihai (6710, 1, 5, 6, 20—2, 30, 36, 60—2, 5, 8, 60, 3, 4). Grigore Romulus (6711, 5, 6, 20, 2, 51, 2, 5, 7, 9, 63, 90, 7), Stavilă Ion (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 51, ,2, 5—7, 61, 3, 82, 8, 90, 1). Trandafir Cristofor (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 6, 51, 5, 7, 73).

BRĂILA. *Şc. 8 ani nr. 4* cl. VIII. Cărbunaru Mihai (E : 2265, 7—78, 80). *Ş. m. 1* cl. X. Micu Alex. (6710, 2, 5, 6, 20, 35, 51, 2, 5, 9, 61, 3, 4). *Ş. m. 3* cl. IX. Bucur Camelia (6673, 4, 7, 80, 5, 716, 20, 2, 4, 58; E : 2278, 80, 90), Mucuţă Tudor (E : 2278, 80, 9, 90; 6716, 20 2, 4, 35, 50, 64, 91), Ştefăneru Raul (E : 2277, 8, 89, 90, 2; 6685, 716, 20, 2, 35, 64, 88), Visarion Mihai (E : 2261, 3, 77, 80; 6670, 4, 6, 80, 5, 716, 20, 2). Cl. X. Antofie Georgeta (6670, 1, 3, 5, 86, 82, 5, 710, 5, 20, 2, 57, 61), Balaban Adriana (666, 70, 2, 4—7, 82, 5, 93, 710, 20, 2), Bărbulescu Victorina (6670—2, 5, 715, 20, 2, 51, 5, 7, 61, 3), Frăţilă Dobriţa (6671, 2, 5, 6, 710, 5, 20, 35, 51, 4, 62, 3), Leabu Ionel (6670, 1, 4—6, 85, 92, 711, 65, 20, 2, 35, 64). Cl. XI. Teslov Lenuţa (6670, 1, 3, 5, 6, 85, 710, 20, 2, 51, 4, 62).

BREAZA. *Şc. 8 ani nr. 2* cl. VI. Machedon Ion (E : 2281—3, 6—7, 91, 2). *Liceul militar* cl. X. Bucura Alex. (6710, 5, 6, 20—2, 35, 51, 2, 5, 6, 9, 63, 97), Cruceru Ion (6710, 5, 6, 20, 2—5, 7, 61, 64, 91), Gavril ă Gh. (6710, 5, 20, 2, 4, 5, 7, 61, 3, 4, 811, 5), Moşoiu Tr. (6710, 3, 5, 20, 2, 33, 5, 6, 54, 5, 7, 62—4), Voiculeţ Leonida (6713, 6, 33, 6, 51, 2, 5, 67, 9, 61m 3, 4, 91). Cl. XI. Brătescu Gh. (6710, 5, 6, 20, 2, 6, 51, 4, 5, 7, 61—3, 97, 9, 800, 39), Carabela Mircea (6710, 5, 20, 2, 51, 3, 5, 7, 63, 4, 82, 97, 9, 800, 31), Iancu Dumitru (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 36, 48, 51, 4—7, 9, 62—4, 6, 82, 99, 831, 9), Ion Magdalena (6710, 3, 5, 6, 20, 2, 51, 3, 4—8, 61—3, 82, 97, 800, 24, 31, 9), Mateescu Alex. (6710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 51, 4—7, 62, 3, 99, 802), Moise Leonida (6710, 3, 5, 6, 20, 2, 35, 51, 2, 4—8, 62, 3), Stăiculescu Nic. (6710, 2, 3, 5, 6, 20, 2, 35, 51, 2, 4—8, 61—4, 97, 8, 800), Teader Dănuţ (6710, 5, 20, 2, 51, 4—7, 9, 62—4, 82, 95, 7, 9, 800), Loader Marian (6710, 3—6, 20—4, 6, 35, 6, 8, 81, 5, 8, 50—2, 4—64, 76, 89, 91), Voinea Ion (6698, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 31, 3, 45, 8, 51, 4—8, 61—4, 76, 93, 7).

BUCUREŞTI. *Şc. 8 ani nr. 5* cl. VIII. Ruşinoiu Carmen (E : 2293—6, 9, 301, 2, 7, 13). *Ş. m.* 11 cl. VII. Necula A. G. (E : 2265, 6, 8—78, 80, 1, 93, 4, 6; 6724). *Ş. E. 28* cl. VIII. Predescu Cristian (E : 2265, 6, 8, 80—8, 91). *Ş. E.* 41 cl. VIII. *Staticescu Ion* (E : 2265, 6, 8—72, 4—8, 80—3, 91—6, 301, 2, 5; 6720, 2, 4, 76, 80, 7, 81). *Ş. E. 103* cl. VII. Marinescu Viorel (E : 2244, 4, 8—40, 2, 4, 5, 7). *Ş. E. 122* cl. VI. Brătescu Ştefana (E : 2265, 6, 8, 70, 1, 81—3, 6), Gheorghiu Mihaela (E : 2248, 52—4, 9, 65, 8, 9). *Ş. E. 128* cl. V. Şerban Corina (E : 2265, 8—71, 4, 8, 80). Cl. VIII. Oprică Rodica (E : 226î 6, 8—70, 4, 6, 89). Nr. 146 cl. VII. Bădescu Smaranda (E : 2266, 7, 73, 4, 81, 3, 6—8, 91; 6724, 50). *Ş g.* 166 cl. VII. Cernescu Gabriela Mariana (E : 2282, 3, 6, 91—6, 9, 301, 2), Crivăţ Maria (E : 2266, 8, 70, 4, 8, 81, 6, 8). *Ş E. 169.* Cl. VII. Vijelie Luminiţa (E : 2265, 8—80; 6715, 6, 20—2, 4—6, 36, 48). *Ş. m. 1* N. Bălcescu cl. IX. Adrian Sorin (E : 2280, 9, 90; 6720, 3, 4, 6, 7, 33, 52, 7, 9, 64), Zahn Radu (E : 2289, 90; 6671, 98, 710, 29, 33, 52, 7—9, 64, 86), Murgu Horia (E : 2260, 1, 3, 4, 79,; 6670, 4, 6, 80, 1, 716, 22), Popa Cornel (E : 2278—80, 90; 6684, 5, 715, 6, 20, 2, 3, 6, 64), Teişanu Cornel (E : 2264, 77, 9, 89, 90; 6674, 7, 715, 6, 24, 61, 91). Cl. X. Diaconescu Gabriel (6710, 1, ,5, 20, 2, 35, 51, 2, 5—7, 61, 3, 4), Răzvan Milena (6750, 2, 5—7, 61, 3, 96, 7, 9, 801—3, 16), Tepelea Vlad (6751, 4—8, 62, 3, 76, 817, 24, 38), Faur Adriana (6752, 5, 7, 62, 4, 95, 6, 8—800, 2, 11). *Ş m. 2* cl. X Nicolae Dan (6710, 5, 6, 21, 36, 50, 5—7, 9, 60, 3, 802). *Ş. m. 3* cl. X. Popescu I. Mihail (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 34, 5, 51, 5, 63). *Ş. m. 4* cl. IX. Petcu Mirel (E : 2263, 4, 80, 9, 90; 6670, 3, 6, 7, 80, 716, 20, 2, 64, 88). Cl. X. Anastasie Valentin (6720,—2, 5, 28, 31, 55—8, 63, 4). *Ş. m. 6* cl. VII. *Weiner Irina* (E : 2265, 7—70, 2—8, 80). *Ş. m. 7.* cl. VII. Redlinger Daria (E : 226, 6, 8, 70, 3—6) *Ş. m. 8* cl. VIII. Ionescu Cristina (E : 2248, 50, 4, 61, 3, 78, 81, 2, 90, 1). *Ş. m. 10* cl. VI. Gafiţa Gabriel (E : 2265, 8, 70, 4, 8, 80, 91, 4, , 67, 301). *Ş. m.* 11 cl. IX. Bădescu Constantin (E : 2277—80, 305; 6710—6, 20—6, 9, 31, 2, 5, 6, 50—64, 8), Pascaru Aurel (E : 2277, 9, 80; 6710, 2, 5, 6, 20, 2, 3, 6, 35). Cl. X. Diaconescu Ştefan (56710—2, 4, 5, 20, 2, 4, 5, 32, 6, 51, 2, 4, 63, 4, 97). Absolvent Ursulescu Octavian (6710, 1, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 35, 7, 44, 5, 8, 63, 6, 76, 89, 90, 3, 4). *Ş. m. 12* cl. X. Drăgoi Nicolae (6711, 4, 6, 24, 51, 2, 5, 6, 9, 63, 4, 96, 803). *Ş. m. 13* cl. X. Căpraru Valentin (6751, 5, 6, 9, 63, 96, 7, 801, 2, 29, 35, 47), Minoiu Tudor (6670—4, 76, 80, 720, 2, 36, 96, 801), Popescu Ialomiţa Cr. (6768, 96, 801, 3, 6, 47—9, 52, 62, 4, 6). *Ş. m. 15* cl. IX. Păun Mihaela (E : 2285, 89, 90, 305; 6768, 86, 8, 91, 4, 11, 813, 15, 88), *Ş. m. 17* cl. X. Boiangiu T. (6750—3, 5—61, 3, 4, 7, 8, 97, 9, 801, 17), Niţă Alex. (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 6, 51, 2, 5, 7, 63), Suciu Paul (6710—7, 20—2, 4—9, 31, 2, 5—8, 44, 8, 9). Cl. XI. Almer David (6714, 5, 8, 24, 8, 36, 7, 45—8, 51, 4—6, 76). *Ş. m. 19* cl. X. Ilie Romeo (6710, 5, 6, 20—2, 4, 32, 5, 8, 48, 50, 2, 5—61, 3, 4). *Nr. 20* cl. X. *Herling Mihail* (6710—2, 4—6, 20—3, 5—7, 32, 5, 6, 8, 41, 50—3, 5—61, 63—5, 8, 72, 82). Nr. 21 cl. VII. Enescu Ion (E : 2248—52, 5—7, 9, 65—8, 70, 2, 5—6, 8, 80, 3, 8; 6724) *Ş. m. 23* cl. X. Căpăţînă Aurel (6710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 55, 7, 63, 91, 7), Istvan Vasile (6710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 50, 2, 5—7, 9, 63, 4, 80 ,7), Zaharia Dragoş (6710, 1, 4—6, 20—2, 4, 5, 61, 3). Cl. XI. Anastasescu Gabriela (6713, 5, 6, 20, 2, 51, 2, 4—7, 61—4). *Ş. m. 25* cl. X. Dumitriu Silviu (6714, 23, 6, 50—2, 6, 59, 61, 4, 82, 91, 6, 802, 18, 24), Tăcină Horia (6716, 22, 8, 35, 51—3, 5,—9, 61, 3, 4, 88, 91, 6, 7, 9, 801—3, 24, 31). *Şm. m. 28* cl. VII.. Arsene Vladimir (E : 2273, 4 6, 8, 81, 8—300), Ceuca Dan (E : 2268, 73, 4, 80, 95, 6, 301, 2). Cl. X. Miahalache Adrian (6750—2, 5, 7, 9, 63, 4, 67, 97, 818,-4). *S. m. 33* cl. VI. Pătraşcu Gabriela (E : 2265, 5, 8, 86, 91—6, 301, 2). Cl. VIII, Grigoriu Primăvara (E : 2277—80, 5, 90; 6720, 2). Cl. X. Mitrescu I. Vasile (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 51, 5, 7, 63, 97, 99). *Ş. m. 36* cl. VI. Logofătu M. Anca E : 2265—71, 4, 8, 80, 1). *Ş. m. 39* cl. VII. Petrescu Dragoş (E : 2265, 7, 70, 94, 5, 80; 6786, 1),

BUZĂU. *Ş. m. 1* cl. IX. Ştefănescu Jeanne (E : 2279, 85; 6716, 21, 3, 6, 50, 2, 9, 60, 4, 91, 813). Cl. X. Manea Nicolae (6724, 6, 9, 31, 5, 6, 8, 41, 8, 50—2, 5—7, 9, 63, 4, 7, 82, 7, 8). Cl. XI. *Păltănea Cornel* (6667, 75—8, 80—2, 5, 703, 9, 10, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 31, 3, 5, 6, 8, 45, 8, 50—7, 9—64, 8, 76, 82, 8, 91). *Ş. m. 2* lc. X. Ioniţă Sabin (6726, 50—3, 5, 7—61, 3, 4, 6, 8, 82, 3, 7, 91, 7, 802, 3, 206, 30).

BUŞTENI (Ploieşti). *Ş. m.* cl. VII. Dinu Cristian (E : 2273—6, 80, 7, 8, 90—2).

CALAFAT. Cl. IX. Rotaru A. (E : 2277, 9, 80, 5, 90, 305; 6716, 20, 2, 50, 60, 87, 802), Ruiu Adrian (E : 2277, 9, 80, 305; 6715, 6, 20, 2, 50, 87, 91, 802).

CARACAL. Cl. X. Degetaru Ştefan (6716, 35, 6, 7, 52, 5—7, 9, 61, 3, 4, 82, 96, 7, 9), Negrilă Radu (6735, 6, 62, 5—7, 9, 61, 3, 4, 82, 96, 6, 9, 803).

CARANSEBEŞ. *Ş. m. 2* cl. X. Brebu Ion (6710, 1, 5, 6, 36, 8, 51, 5—7, 9, 63, 87), Magheti Ioan (6710—2, 5, 6, 23, 4, 38, 48, 50, 1, 5—7, 9, 60), Pries I. (6710, 1, 5, 24, 35, 6, 8, 51, 5, 7, 9, 64).

CARAULA (Calafat-Oltenia). *Şc. 8 ani* cl. VIIII. Iordache Florica (E : 2265, 72—4, 78—80, 2, 99, 301, 3, 5), Iordache Stela (E : 2265, 62—4, 78—80, 2, 99, 301, 3, 5).

CAREI (Maramureș). Cl. IX. Bathory Iuliu (E : 2277 — 80, 90; 6716, 20, 2, 4, 6, 9, 58, 64), Biro Gabriela (E : 2277—80, 90; 6716, 20, 2, 4, 6, 9, 58, 64), Grandt Aprad (E : 2277—80, 90; 6716, 20, 2, 4, 6, 9, 58, 64).

CALAN (Banat). Cl. X. Cubineț Ion (6714, 6, 2, 3, 5, 32, 6, 7, 42, 50—3, 5—61, 3, 4, 8, 67, 86, 7, 95—7, 802, 3, 11, 9, 24), Marinaș Mircea (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 52, 7, 9, 64, 82).

CĂLĂRAȘI. Cl. X. *Ștefănescu Ștefan* (6710, 1, 5, 6, 20—2, 4—7, 31—3, 5—7, 44, 8, 50—3, 5—61, 3—5, 70, 83, 6, 92).

CÎMPIA TURZII (Cluj). Cl. X. Bretoiu Alex. (6710, 5, 6, 20—2, 4, 5, 35, 6, 52, 5, 7, 63), Codrescu Radu (6710, 6, 21, 4, 5, 35, 50—2, 5—7, 63), Drăgan Ioan (6710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 52, 5, 7, 71, 3).

CÎMPINA. *Ș. m. 1* cl. IX. *Alexandriu Doru* (6710, 2, 5, 6, 20—6, 33, 5, 6, 40, 2, 50, 2, 3, 6—60, 3, 4, 8, 76, 82, 3, 6, 8, 9, 91, 4; E: 2277—80, 5, 9, 90), Andrei Gh. (E : 2278, 303; 6721, 4, 57, 60, 91, 4, 5, 7, 840, 62, 4, 79), Mănescu Adrian (E : 2277, 9, 80, 5, 9, 90; 6716, 20—5, 35, 50, 7, 4, 87). Cl. X. Boeru Marin (6710, 2, 5, 20, 2, 35, 51—3, 5, 9, 63 97, 803—7, 10, 7), Florea Elena (6710, 5, 6, 20, 2, 35, 51—3, 5—7, 63), Modoveanu Florica (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 51—3, 5, 6, 9, 61, 3), Toboc Petre (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 51—3, 5—7, 9, 63, 82). Nr. 2 cl. X Samoily Ghl. (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 35, 766, 7, 61, 3, 4, 97), *Vioreanu Marius* (6666, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 92, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 6, 20, 2—4, 6, 32, 5, 6, 51—3, 5—7, 9, 61, 3, 4, 78, 90).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC *Liceul militar* cl. X. Bodgan Ioan (E : 6710, 5, 20, 2, 4, 6, 35, 6, 51, 5, 7, 63, 4, 78, 83), Crișan Theodor (6710, 5, 20, 2—4, 35, 57, 61, 3, 78, 87), Florian Lucian (6711, 24, 36, 51, 5—7, 9, 61, 3, 4, 88, 97, 817), Gurban Ion (6711, 24, 36, 51, 2, 5—7, 9, 61, 3, 4, 88), Moștoflei Constantin (6680, 3, 4, 710, 5, 6, 20,, 2—4, 6, 35, 57, 61, 3, 78, 87), Nastasi Mihai (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 51, 5, 7, 9, 61, 3, 87, 8). Spătaru Florin (6710, 1, 5, 20, 2, 6, 35, 51, 2, 5, 7, 8, 61, 3), Ungureanu Dragoș (6711, 24, 36, 51, 2, 5—7, 9, 61, 3, 4, 88, 97, 9). Cl. XI. Collaric Al. (6710, 7, 5, 20, 2, 4, 6, 35, 6, 51, 4, 6, 62, 3, 76, 82, 7, 8, 94), Crăciun Al. (6751, 4—7, 9, 62—4, 76, 80, 7, 8), *Rudenco Cornel* (6710, ,3, 5, 20, 2, 6, 35, 6, 51, 5, 8, 50—2, 61—4, 82, 8, 95—99, 801—3, 11—4, 24, 35, 6).

CLUJ. *Șc. 8 ani nr. 7* cl. VI. Racoviță Georgeta (E : 2265, 8, 9, 70, 82, 3, 91, 2), Zglobiu Nicolae (E : 2265—73, 5, 81, 2, 6, 7). Ș. m. 1 Absolvent Janko Al. (6713, 5, 20, 2, 52, 4—7, 62—4), Nr. 4 cl. VIII. Derevenco Andrei (E : 2266, 8, 74, 9, 80, 1, 6; 6783). M. Eminescu cl. X. Gallin Radu (6710, 20, 2—4, 35, 6, 50, 2, 5, 7, 9, 60, 1, 3, 91). *Nr. 8 N. Bălcescu* cl. VII. Bercea Corina (E : 2248, 52, 7, 63, 5, 8, 70, 4—6, 8). Cl. VIII. Szasz Viola (E : 2265, 6, 8, 71, 4, 8, 81, 3, 91, 2, 4, 6, 301, 2; 6720, 2), Tudoran Tudor (E : 2265, 6, 8—70, 2—7, 8—80; 6720, 2, 4, 42). Cl. IX. Fărcășanu M. (E : 2278—80, 9, 90; 6716, 20, 2, 4, 6, 35, 64), Lazăr Aurel (E : 2277—80, 4, 5, 9, 90; 6710, 2, 5, 6, 21, 3—6, 33, 5, 54, 50, 7, 8, 60, 4, 5), Stoian Daniela (E : 2278—80; 6710, 5, 6, 20, 2, 6, 35, 58, 86). Cl. X. *Farcaș Petru* (6713, 4, 6, 23—5, 31, 4, 5, 7, 8, 44, 9—53, 5—61, 3—5, 8, 73, 5, 8, 82, 3, 6, 7, 92, 3), Mareș Maria (6710, 5, 51, 5—7, 9, 61, 3, 92, 91, 7, 9), Trif Damian (6710, 6, 21, 43, 5, 31, 2, 6, 8, 50—2, 69). Cl. XI. Perl Toma (6750—66, 76, 80, 2—4, 6—8, 91—3, 5—803, 7, 11, 3—5, 9, 21, 3, 9, 31, 6, 8, 9). Nr. 10 cl. XI. Dănicel Dan (6711, 3, 20, 2, 4, 48, 52, 4, 5, 62—4). Nr. 12 cl. VI. Rosenberg Jean (E : 2265, 6, 8—70, 2, 81, 2, 6, 92). Cl. X. Szabo Katalin (6710, 1, 5, 20, 2, 4, 35, 51, 5, 7, 63, 4). Nr. 15 cl. VII. Iancău Marian (E : 2258, 65, 6, 8, 70, 3—5).

COLILIA (București). Cl. VIII. Simion Constantin (E : 2265, 8, 70, 1, 3, 6, 8, 80), Stanciu Victoria (E : 2281, 2, 91, 3, 4, 6, 9, 301, 2).

CONSTANȚA. *Ș. m. 2* cl. VIII. Năstase George (E : 2248, 54, 65, 6, 8, 76, 80, 1, 3). Cl. IX. Eremia Dumitru (6631, 4, 44, 6, 53, 5, 9, 61, 3, 70—81, 3, 9). Cl. XI. *Răduinea Nicolae* (6682, 5, 92, 3, 6, 7, 700, 7,18, 20, 3, 5, 31, 2, 7, 8, 42, 50—64, 73, 82, 6, 80, 1, 4).

COMARNIC (Ploiești). Cl. IX. Aldasoro Augustin (E : 2277, 8, 80, 9, 90; 6725, 35, 50, 60, 4—6, 802), Gheuca Ion (E : 2277, 9, 80; 6721, 5, 9, 54, 9—61, 5, 86).

CORABIA. Voinea Marcel (6621, 3, 4, 9, 30, 3, 7, 50 , 61, 90, 1,3).

COVASINT (Arad). *Șc. 8 ani* cl. VII. Balaș Florica (E : 2265, 8, 70, 8, 80, 2, 3, 7), Faur Maria (E : 2275, 8, 70, 8, 80, 2, 3, 7, 91), Voștinar Dumitru (E : 2265, 8, 70, 8, 80, 2, 3, 7, 91).

CRAIOVA. *Ș. m. 1* cl. IX. *Pătra Cristian* (E : 2277—80, 9, 90, 305; 6710, 5, 6, 30—2, 4, 6, 9, 35, 6, 50, 2, 5, 6, 8—60, 2—4, 8, 78, 80, 6, 8, 91, 4, 5, 802, 12, 3). Cl. X. Dediu Luminița (6710, 5, 20, 2, 35, 51, 5—7, 63, 97, 8), Pascu Doina (6666, 70, 1, 3—8, 80, 2, 95, 710, 2, 5, 6, 20, 2—4, 7, 51, 2, 5). Ne. 2 cl. X. Bușe Gabriela (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 3, 6, 35, 66, 7, 63), Cojocaru Florian (6670—8, 80—2, 92), Diaconu Ștefan (6710, 1, 5, 6, 24, 32, 7, 50—3, 5—61, 3, 4, 82, 4, 95—7, 9, 701—3, 11, 7, 25, 21, 5), Predoi Petre (6670, 1, 3—7, 80, 710, 4, 22, 35, 6, 55). Cl. XI. *Babarada Ion* (6710, 1, 3—6 20—2, 4—6, 33, 5, 45, 8, 50—65, 76, 82, 8, 95—800, 2, 3, 29, 31). Nr. 3 cl. XI *Ghițuleasa Dan* (6751, 2, 4—65, 78, 76, 80, 2, 6, 8, 96—8, 800—3, 10 3 5, 6, 31, 6, 9, 47, 9, 79, 71, 6, 8, 96).

CUCA (Argeş). Absolvent *Matei I. Petre* (6666, 7, 70—9, 81, 2, 5, 96, 7, 706, 10, 1—6, 20—2 20—2, 4, 6, 8, 33, 5, 42, 51, 3, 5, 7, 63, 4).

CUGIR (Banat). *Şc. 8 ani* cl. VII. Haneş Maria (E : 2248, 64, 5, 8, 80, 8, 80, 90).

CURTICI (Arad). *Ş. m. 1* cl. VII. Vîrşendan Corneliu (E : 2265, 8, 80, 6, 94, 5, 301, 2).

DEJ (Cluj). *Ş. m. 1* cl. VIII. Balogh Vera (E : 2265—70, 88, 91). Cl. IX Barth Ferenc (E : 2277—80, 5, 9, 90 ; 6715, 6, 20, 2—4, 6, 35, 6).

DETA (Banat). *Ş. m.* cl. V. Ciurea Mioara (E : 2265—9, 75, 6, 82, 3, 91), Nicoli Tiberiu (E : 2271—3, 81, 3, 6, 8, 91).

DEVA. Cl. X. Ban Dumitru (6710, 1, 5, 6, 20, 32, 5, 6, 50—2, 5, 7, 9—61, 3, 4), Bunea Nicolae (6710—2, 4—6, 20, 4, 43, 5, 6), Ilie Ion (6710, 5, 20, 2, 35, 51, 2, 5—7, 60, 3, 4, 91), Sîrbu Gheorghe (6710, 4—6, 20, 2—4, 6, 32, 5, 6, 50—2, 5—7, 9—61, 3, 4), Şerb Titicuţa (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 42, 50—2, 5—7, 63, 4).

DOROHOI. *Ş. m. 2* cl. VIII Jalubă Petru (E : 2282, 3, 90, 3—6, 9, 302).

DRĂGĂNEŞTI—OLT. Cl.. X Enache Vasile (6710, 5, 6, 20—2, 6, 7, 31, 3, 5, 8, 44, 8, 51, 2, 5—7, 9, 63, 4).

DRĂGĂŞANI. Manda Doru (E : 2283, 94—6, 9, 301, 2,7).

DUMBRĂVENI (Oltenia). *Şc. 8 ani* cl. VI Vulpe Veronica (E : 2268, 70, 80, 3, 91, 4—6, 302). Cl. VII. Ciucur Ionia (E : 2265, 8, 70, 6, 7, 80, 2, 3, 81, 2, 9, 301). Cl. VIII. Tiţă Ioana (E : 2265, 8, 9, 71, 9, 80, 1, 9, 90 ; 6720, 2). C. I X. Boitaş Marius (6710, 1, 5, 6, 20, 4, 35, 50—2, 5, 7—9, 61, 3, 4).

FĂGĂRAŞ. *Ş. m. 1* cl. X. Otrocol Gh. (6696, 758, 9, 65, 87, 90, 1, 5—7, 801—3).

FĂGET (Banat). Absolvent Costea Dumitru (5639, 59, 66, 70—7, 80).

FIENI (Argeş). Cl. IX. Zarioiu Gh. (F : 2280, 9, 90 ; 6710, 5, 24, 35, 50, 2, 8, 60, 4, 91, 802).

FOCŞANI. Cl. V — Iacob Dan (E : 2265, 6, 8, 83, 6, 94—6).

FĂLTICENI. Gorovei Sorin (E : 2265, 6, 8, 70, 8, 80 ; 6711, 3).

GALAŢI. *Şc. 8 ani nr. 21* cl. VIII. Wechsler Adrian (E : 2281, 2, 9, 93—6, 9, 302, 5). *Ş. nr. 24* cl. VI. Costiniuc Florin (E : 2266, 7, 71, 2, 4—6, 93, 4, 6). *Ş. m. 1* cl. XI. *Andrei Viorel* (6684, 91, 714, 28, 50—65, 76, 80, 2, 3, 5, 8, 9, 92—803, 8, 12, 4, 5, 7, 8, 24, 7, 9, 31, 5, 8, 9). *Ş. m. 3* cl. XI. *Selinger Silviu* (6666, 7, 70—7. 80, 3, 93, 8, 707, 10—3, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 5, 45, 51, 2, 4—9, 62—4, 76, 86). *Ş. m. 4.* cl. IX. Buruiană Rodica (E : 2277, 9, 80, 9, 305 ; 6742, 35, 57, 8, 60, 88, 802), Tinbegea Maricel (F : 2285, 89, 90 ; 6725, 7, 8, 35, 50, 7,60, 83, 6, 8, 91). Nr. 5 cl. VIII. Girisik Marta (E : 2265, 6, 8, 9, 80 ; 6720, 2, 4). Nr. 6 cl. IX. Vasiliu Ilie (E : 2261, 77, 9, 90 ; 6671, 80, 716, 23, 4, 6, 57, 60, 91).

GHELAR (Hunedoara). Cl. IX. Radu Gh. G. (E : 2280, 5, 90, 1, 305, 6 ; 6720, 2, 35, 64, 8, 88, 98).

GHERGANI. *Şc. 8 ani* cl. VIII. Popescu Daniela (E : 2265—8, 70, 1, 4, 8, 80, 1).

GHERLA. Cl. IX. Baumgarten Alexandru (E : 2278—80, 305 ; 6716, 20—6, 68).

GHIZDARU (Giurgiu). *Şc. 8 ani* cl. VII. Sotrocan Constanţa (E : 2248, 50, 2—4, 6—9).

GIURGIU. *Şc. 8 ani nr. 7* cl. VII. Popescu Dragoş (E : 2265, 6, 8—72, 4, 5, 80—3, 8, 91, 2). S. m. 1 cl. IX. Mărăcineanu Eugen (6720—2, 4, 6, 35, 6, 50, 7, 8, 64). Cl. X. Manea Adrian (6710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 8, 5, 1 2, 5, 6, 9, 61, 3, 97). Cl. XI. Oprea Ştefan (6666, 80—8, 80, 5, 92, 6, 710, 1, 3, 5, 6, 20, 3, 35, 45, 50, 1, 5—7, 62—4).

GOLEŞTI (Argeş). Cl. VII. Oprescu Dumitru (E : 2265, 8, 9, 74—6, 8, 80).

HAŢEG. Cl. X Marton Virgil (6710—2, 4—6, 20, 2—7, 9, 32, 5, 6, 8, 42).

HOREZU. Cl. IX. Siret Vasile (E : 2278—80, 9, 90 ; 6750, 7, 60, 76, 8, 88, 91). Cl. X. Gretan Ion (6750—2 , 5—7, 9, 61, 3, 4, 70, 6, 82, 6—8, 91).

HUNEDOARA. Absolvent *Căpăţînă Ion* (6712, 5, 6, 22, 4, 6, 8, 36, 45, 7, 50—64, 9 73, 6, 8, 82, 6, 8, 95—7, 800—3, 8, 13—5, 27, 31, 5). Sabo Anton (6710—3, 5, 6, 20, 2, 8, 35, 45, 8, 51, 2, 4—7, 9, 61,—3). *Ş. m. 1* cl. VII. Jula Angela (E : 2265, 8, 78, 82, 6, 91, 3, 4, 6, 300—2). Cl. X. Suruceanu Al. (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 32, 5, 6, 8, 51, 5—7, 63), Voiculescu Emil (6751, 2, 6, 8, 60, 76, 82, 6, 8, 91, 9, 825).

HUŞI. Cl. X. Darie Viorel (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 32, 3, 51, 5—60, 63, 4).

IALEA MARE (Argeş). S. g. cl. VIII. Voinea Vasile (E : 2250, 8, 9, 61, 3, 8, 70, 7, 8, 720, 2, 4).

IANCA (Galaţi). Cl. X. Pătrinciu Vasile (6670, 1, 3, 5—7, 80, 1, 6, 715, 20, 4, 35, 61, 7, 63). Cl. XI. Tăbîrcă Virgil (6710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 6, 35, 45, 8, 54, 5, 62—4, 82).

IAŞI. *S. g. 7* cl. V. Bălan Carmen (E : 2248, 50, 1, 4, 9, 65—8, 82, 6), Bercovici Zelda (F : 2232, 48, 50, 4, 9, 65, 6, 8), Goldstein Margit (E : 2248, 50, 1, 4, 9, 65—8, 80, 7, 8), Leizer Lili (E : 2248, 50, 9, 65—8, 70, 8). Cl. VI. Acatrinei Ovidiu (E : 2286, 8,7, 91, 4, 8, 301, 7, 8, 11), Agavriloaie Leon (E : 2248, 50, 2, 8, 65, 8k 77, 8, 80, 91), Barbu Gelu (E : 2286, 7, 8, 91—5, 7, 300, 1), Bîzgă Adriana (E : 2253, 8, 65, 6, 8, 70, 5, 4, 7, 8), Călugărescu Lidia (E : 2248—50, 3, 65, 8, 70, 7, 8, 88, 95), Cerlica Doina (E : 2268, 83, 6—8, 93, 4, 307, 11, 5), Ciobanu Dorel

(E : 2267, 81, 78, 91, 4, 7, 307, 11), Dănilă Victor (E : 2286, 91, 4, 6, 8, 301, 7, 8, 11), Ghilescu Codrin (E : 2238, 7, 8, 50, 1, 7, 65, 8), Horer Silvia (F : 2248—54, 7, 8, 70, 4), Marcovici Eugenia (E : 2248, 65, 6, 9, 73, 80, 3, 6, 8, 91), Păduraru Gabriela (E : 2265, 6, 8, 82, 3, 92—6, 9), Tintaru Dan (E : 2250, 67, 70, 81, 6, 7, 91, 4, 7, 307, 11). Cl. VII. Acatrinei Ion (E : 2286, 7, o1, 4—6, 8, 301, 7, 8, 11), Alexa Tatiana (F : 2248, 53, 65—9, 83, 6, 7, 94, 6, 307, 11, 3—5). Cl. VIII. Avramescu Bebi (E : 2248, 52, 7, 8, 65, 8—70, 4, 8, 87), Bilanca Radu (E : 2254 7—9, 65, 8, 70, 3, 4, 8, 80, 2, 3, 91, 2), Bîrleanu Dorel (E :x 2293, 4, 6, 307, 11, 2, 4, 25, 6, 9, 33), Drăgan Gheorghe (E : 2224, 8, 9, 50—2, 4—8) , Drişcu Radu (E : 2238, 48, 50—9, 77), Droahnă Elena (E : 2225, 48, 9, 52, 5--9, 65, 8), Groapă Ioana (E : 2233, 40, 3, 50, 7—9, 66, 8, 75), Pătrăchioaie Dorin (E : 2248—58). *Absolvenţi* : Adomnicăi Minodora (E : 2265—71, 6, 8, 80—3, 88, 9, 91, 2, 720, 2, 4), Barbă Georgeta (E : 2265, 7, 9, 71, 81—3, 8, 9, 91, 2 ; 6724), Danicov Liliana (E : 2238, 46—50, 3, 4, 8, 9, 61—3, 5, 6, 8, 74, 8, 80—3, 93—6, 9), Gillea Marie-Jeanne (E : 2248, 52, 4, 9, 63, 5, 8, 74), Partenie Gica (E : 2252, 61, 8, 70, 8, 80, 2,3), Rotăreru Angela (E : 2266—8, 74, 80, 2, 3, 97), Vlad Aglaia (E : 22433, 6, 5, 8, 43, 7, 50, 4, 9, 65, 8, 74, 8, 80), Weiss Frilia (E : 2245, 8, 50, 4, 61, 3, 5, 8, 70, 7, 8, 9). *S.g.12* cl. VI. Economu Liana (E : 2248, 9, 56, 65, 6, 8, 9, 70, 80), Rucsăndrescu Silvian (E : 2265, 8, 70, 4, 80, 94, 5, 6, 30, 2), Zugravu Aurelia (E : 2248, 52, 4, 8, 78, 65, 80). Cl VII. Leonte Alina (E : 2252, 4, 7, 8, 66, 8, 70, 8, 80, 2, 3, 92, 4—6, 301, 2, 7, 8, 17), Pescaru Carmen (E : 2248—50, 2, 89, 67, 78, 92). *S. g. 13* cl. VI Chiţanu Doina (E : 2248, 54, 65, 6, 8, 70, 3, 6, 80, 2, 3). *Ş.g.*14 cl. VI Poroşnicu Gabriela (E : 2251, 3, 9, 66, 8—71, 3, 6, 81—3, 6—8, 91—9, 301, 2, 11), Rotariuc Maria (E : 2282, 3, 6, 94—6, 9, 301, 7, 11). Cl. VII. Stancu Viorel (E : 2269, 71, 5, 7, 8, 81, 7, 91, 2, 4—6, 300, 1). Cl. VIII. Topor Vasile (E : 2265, 8, 9, 72, 4—7, 80—3). *Ş.m. 1* cl. V Rimer Maria (E : 2248—50, 2—4, 65, 6, 78). DCl. VII. Budui Liviu (E : 2265, 8, 70, 7, 80, 2, 3, 90, 5, 9, 301, 2), Mistreanu Gabriela (E : 2268, 80, 2, 3, 94, 5, 307, 11, 6), Mîrzanca Magda (E : 2265—7, 77, 82, 3, 94, 5, 6), Purice Constantin (E : 2281—3, 6—8, 90—2). Cl. VIII. Istrate Nuşa (E : 2265—70, 8, 80), Leferovici Simion (E : 2248—50, 3—5, 8, 61, 3), Mîrzanca Magda-Mariana (E : 2286, 91—3, 301, 2, 7, 8, 11, 3). Cl. X. Cihiriac Iulian (6644, 6, 66—78, 80—3, 5, 90, 3—8, 701, 2, 10—2, 6, 5, 20—2, 4, 6), Stăniceanu Mihai (6666—8, 70—8, 80—3, 5, 6, 90, 3—8, 701, 2, 10, 1, 2, 4—6, 20—7) *Ş. m. 2* cl. VI. Iftimescu Radu (E : 2248, 9, 51, 4, 65, 7, 8, 70 , 81—3, 6, 92—6, 9, 307). Cl. VIII. Ocneanu Mihaela (E : 2265, 6, 8—70, 4, 7—80). Cl. X. *Postăvaru Elena* (6666, 70, 1, 3, 6, 85, 95, 7, 710, 6, 20, 2, 36). *Ş. m. 3* cl. V. Lupescu Silviu (E : 2265—8, 70, 7, 80, 3). Cl. VI. Burlacu Călin (E : 2249, 51, 3, 4, 65, 9, 70, 4, 80), Mîrţu Mihai (E : 2248, 50, 2—4, 65, 6, 8—70, 2), Pintilie Constantin (E : 2249, 51, 65, 76, 8, 72, 3, 8, 80). Cl. VII. Teodorescu Horia (E : 2286—8, 91, 4, 6, 301, 2). Cl. VIII. Enăşescu Ancuţa (E : 2249, 51—3, 5—7, 61, 4—80), Teodorescu Octavian (E : 2258—61, 4, 78, 80, 5, 90). Cl. IX. Achelăriţei Radu (6716, 20, 2, 4, 6, 33, 5, 50, 8, 64, 8, 76, 91, 8, 802, 13, 40—51, 62, 4, 6—70, 9, 81, 4, 8, 90), Bendescu Mihai (6768, 76, 80, 857—9, 62, 4, 7, 9, 81, 4), Bodron Fănică (6776, 88, 847—49, 62, 4, 7—9, 81, 4, 8), Georgescu Mihai (6757, 8, 64, 76, 82, 8, 91, 802, 47, 9, 50, 62, 4, 8, 79, 81), Grindei Iulian (6757, 64, 8, 86, 8, 98, 802, 12, 3, 5, 47—9, 62—7, 9, 72, 8—81, 3—5, 8, 927, 31, 8, 46, 9, 57), Iacob Florin (6750 , 2, 7—61, 4, 5, 8, 76, 82, 6, 8, 91, 5, 6, 802, 3, 11—4, 16), Ionescu Florentin (6764, 8, 82, 847, 9—51, 62, 4, 6 9,)0, 8, 9, 81, 3, 4), Juracovski Vasile (6765, 82, 802, 47—50, 62, 4—70, 81, 3, 8), Lupu Valentin (6764, 82, 847—50, 62, 4—6, 8—70, 9, 81, 3, 4, 9), Pascal Stelian (6847——9, 62, 4, 7, 9, 79, 81, 4, 8). Profira Sterian (6750, 7, 76, 95, 847—9, 62, 4, 7—70, 9, 81, 4, 8), Rusu Gheorghe (6715, 16, 20 , 2—5, 35, 58, 76, 802, 11), *Rusu Mihai* (6670, 3, 4, 6, 7, 80—5, 710, 5, 6, 20—6, 9, 33, 5, 50, 8, 64, 87, 8, 91, 9, 802, 11—3, 40, 1, 7—51, 5, 62—60, 8—81, 3, 4, 8), Tîrdea Ion (6764, 91, 82, 802, 407—50, 62, 4, 6—70, 9, 81, 4, 8, 9), Volovatic Ioan (6758, 68, 82, 3, 41, 7—51, 5, 62, 4—9, 79—81, 4, 7, 8). Cl. X. *Aizicovici Sergiu* (6670—8, 80—5, 92, 3, 5, 7, 8, 10, 1, 5, 6, 20—2, 4, 33, 6, 5, 48, 50, 1, 5, 6, 7, 60, 1, 3, 4), Alupului Neculai (6750—2, 5—60, 3, 4, 87, 97, 847—50, 2, 4), Botez Constantin (6670, 1, 3—7, 80, 4, 5, 710, 5, 20, 2, 4, 35, 6, 52, 5, 6, 7, 9, 61, 3, 4, 7, 82, 96, 7, 801, 3, 7, 35, 47—50, 2—4, 9, 762—5, 8, 9, 79, 80, 1, 4, 8), Costăchescu Florin (6670, 1, 3—6, 95, 710, 5, 6, 22, 35, 5, 63), Dămătăr Andrei (6710, 5, 6, 20, 2, 4—6, 9, 33, 5, 6, 41, 750, 1, 5—60, 3, 4), *Goroş Liviu* (6750—2, 5—7, 9—71, 3—5, 8, 82, 3, 6, 7, 91, 3, 5—7, 9, 801, 2, 3, 98, 11, 17, 21, 3, 4, 9, 47—54, 9, 62, 3, 4, 6, 8, 9, 70, 3, 8, 9, 80—4, 8), Hanganu Romeo (6750—2, 5—7, 61, 3, 91, 5—7, 9, 801, 2, 17, 24, 29, 47—54, 9, 62, 4, 6, 8, 70, 9, 80, 1, 3, 4, 8, 93, 5), Iacob Dumitru (6751, 5, 6, 7, 63, 4, 7, 82, 93, 7, 801, 407—50, 2, 3, 9, 63—5, 79—81, 4, 8), Macovei Gheorghe (6670——7, 80—4, 92, 8, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 33, 41, 51, 2, 5, 6, 7—9, 63, 4, 7, 8, 91), Mardare Mirel (6670, 3, 4, 5i, 7, 80, 4, 5, 715, 6, 20, 2, 4, 35), Pescaru Andrei (6710, 5, 6, 20, 2, 6, 35, 41, 51, 5, 6, 63, 4), Popa Ştefan (6751, 2, 5—7, 9—61, 3, 7, 82, 91, 6, 7, 9, 801—3, 17, 24, 35, 47—54, 62, 4, 6—8, 80, 9, 80, 1, 3, 4, 7, 8,), Popescu Petru (6755, 76, 63, 97, 802, 47—9, 52, 4, 63, 4, 7, 79, 81), Sărmăşanu Zaharia (6670—7, 80, 1, 92, 5, 7, 8,, 710, 1, 5, 6, 20, 2—6, 36, 51, 2, 5, 6, 7, 9, 60, 1, 3, 90, 1), Sava Benedict (6670, 1, 75, 6, 7, 98, 80, 710, 51, 2, 5, 61,

3), *Săveanu Florin* (6672—8, 80—5, 95, 7, 8, 710, 5, 6, 20, 4, 6, 35, 8, 50—3, 5—7, 9, 60, 1, 3, 4, 67, 80, 7, 97, 7, 9, 801, 2, 3, 13, 24, 9, 31, 4, 41, 2, 3, 7—50, 2—4, 9, 70, 2, 3, 8—84, 7, 8, 96), Simionescu Bogdan (6710, 1, 4, 5, 50, 1, 5—7, 63, 4, 7), Slătineanu Constantin (6751, 2, 5—7, 63, 8, 35, 47—50, 62, 4, 88), Farcan Ion (6751, 5, 63, 7, 93, 7, 801, 8, 47—50, 2, 64, 5, 79, 81, 8), Wittner Marius (6796, 802, 47, 50, 62, 70, 88, 97, 817, 48, 52, 4, 64, 79, 801, 35, 49, 59, 66, 81), Timofte Gheorghe (6752, 5, 7, 63, 97, 601, 817, 47—9, 42, 3, 62, 4, 5, 9, 70, 9, 80, 1, 8, 916).. *Ş. m. 4* cl. VI. Porcescu Liliana (E : 2251, 65—70, 7, 80, 2, 3). Cl. VII. Berneagă Adina (E : 2248, 50, 3, 4, 7, 65, 8, 70, 1, 80). Burduja Emanuel (E : 2250, 8, 65, 8, 70, 8, 80 ; 6724), Daneliuc Cristina (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 65, 6, 8, 74), Hriţcu Alioşa (E : 2287, 91, 2, 4, 7, 301, 2, 8, 27), Pătraşcu Octavian (E : 2265—71, 3, 4, 7), Rudu Dorina (E : 2265—71, 4, 6, 80, 2, 6, 91, 3—5, 301, 2, 7, 8), Wechsler Paula (E : 2248—51, 4, 5, 65, 6, 8, 74, 91, 3—6, 301, 2, 7, 8). Cl. VIII. Benchea Nicolae (E : 2248, 55, 8, 60, 3, 5—76, 8, 83, 6—92 ; 6720, 2,4), Mandache Marinel (E : 2250—4, 6—63), Roşu Dorina (E : 2265, 8, 80, 91, 4, 5, 6, 301), Săveanu Sanda (E : 2290, 3—6, 9, 301, 2, 7, 8, 19, 21, 48, 8, 62, 4). Cl. IX. Sava Ioan (6666, 8, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 6, 9, 93, 5, 7, 8, 801, 2, 10, 2, 4—6, 8, 1, 20, 7—9, 3, 31—3, 5, 6, 41, 4, 6, 7, 50—61, 3—5, 7, 71, 6, 8, 80, 2, 6—90, 7, 9—805, 9—12, 9, 21, 4), Tîrţău Mihai (6768, 82, 847, 9, 62, 4, 7, 8, 79—81, 4). Cl. X. Rucsăndrescu Mioara (6670, 3, 6, 7, 80, 92, 7, 8, 720, 3, 4, 9, 38, 42, 83, 7, 91). *S.,m. 5* cl. VII. Ciubotaru Rodica (E : 2286, 94—6, 9, 300, 1, 2, 7). *S. m. 6* cl. XI. Barbu Petrică (6750, 2, 5, 9, 60, 3, 91, 7, 802, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 8, 70, 9, 81, 915). *S. m. 7* cl. V. Ianciuc Liviu (E : 2248—51, 65, 6, 8, 83). Cl. VII. Băsescu Luminiţa (E : 2248, 50—5, 8, 65), Bîrleanu Dorel (E : 2265, 70, 2, 6, 91—3, 8, 91, 2, 4, 5, 9, 300—2), Creangă Silviu Tiberiu (E : 2248, 50—2, 5, 8—70, 6, 86, 91, 2, 4—6, 301, 2). Ianciuc Mircea (E : 2248—51, 8, 65, 92), Mardare Corneliu (E : 2225, 82, 92—4, 6, 9). Cl. IX. Breaur Neculai (6714, 6, 20—2, 4, 8, 31, 5, 6, 44, 58, 60, 1, 4, 5, 80, 3, 6—9, 91, 4, 824, 48—50, 62), Barbă Georgeta (6847, 8, 62, 4, 79, 81, 927, 31, 2, 4) Burduja Gheorghe (6750, 7, 64, 847, 8, 62, 4, 7, 79, 81, 4, 8), Sofronie Corneliu (6716, 20, 2, 70, 3, 4, 7, 80, 92, 8). *S. m. 8* cl. VII. Hogea Valentin (E : 2240, 7, 8, 50, 2, 3, 5, 9, 65, 6, 8—70, 5, 80—3, 6—8, 91, 301), Lazarovici Dorina (E : 2281, 6—8, 91, 4, 6, 301 7, 8), Mălăeru Constantin (E : 2268, 70, 4, 6, 80, 7, 91, 2). Cl. X. Amariţei Gheorghiţă (6667, 8, 710, 1, 4—6, 20, 2, 6, 35, 6, 8, 50—2, 6, 7, 9, 61, 3, 4, 95—8, 802, 3, 17, 24, 35, 41, 7, 8), Baraboi Adrian (6666—8, 74, 83, 98, 710, 4, 24—6, 35, 6, 41, 8, 50, 1, 3, 5—7, 9, 61, 3, 4), Godin Gheorghe (6666, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 711, 20, 35, 63), Iacob Dumitru (6670—3, 5, 6, 10, 5, 6, 20, 2, 4), *Susai Emanoil* (6670—3, 5—7, 80—5, 92, 5, 7, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 50—2, 5—7, 9, 60, 1, 3, 8, 76, 80, 2, 7, 91, 5—7, 9, 801—3, 13, 24, 40, 2, 3, 7—53, 7, 9, 62—70, 4, 9, 81, 3, 4,) Sancariuc Toma (6710, 5, 6, 22, 4, 35, 6, 57, 82, 8, 91). Cl. XI. Baraboi Adrian (6752, 8, 60, 82, 7, 91, 5—7, 9, 801, 2, 29), Iacob Dumitru (6751, 2, 5—7, 61, 3, 4, 91, 6, 7, 802, 3). *S. m. 9* cl. IX. Lencu Georgică (6764, 802, 47—50, 62, 5, 9, 81, 4). *S. m. Mihail Eminescu* cl. VIII. Anton Dumitru (6661, 3, 5, 84, 6—8, 90).

INEU (Crişana). Cl. X. Pop Marius (6710, 1, 5, 20, 2, 4, 6, 8, 31, 5, 6, 44, 67, 73, 83—5, 9, 92—5, 7, 8), Vinga Gheorghe (6751, 2, 5—7, 63, 76, 95, 7, 9, 802, 31, 52, 68, 81), Vlasiu Iulian (6710, 1, 5, 20, 2, 4, 51—3, 5—7, 9, 61, 3, 4). Cl. XI. Pătruţ Popa Ion (6666, 7, 71, 8, 80—2, 5, 91—3, 7, 8, 700, 3, 6, 7, 9, 10, 1, 5, 20, 6, 35, 57).

JIMBOLIA. Cl. XI. Sandu Lina (6670, 1, 3—6, 8, 713, 5, 20, 2, 35).

JOIŢA (Bucureşti). Absolvent Nenciu Vasile (670, 1, 3—8, 80, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 57, 71).

LACRIŢA (Oltenia). Andronescu Gabriela (E : 2286, 8, 91, 4—6, 302, 7, 13, 16).

LUGOJ. *S. m. 2* cl. IX. Ghidirmic Lucian (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 4, 95, 8). Cl. X. Hărăguş Ştefan (6795, 7, 9, 801, 2, 12, 3, 21, 4, 7, 9, 38), Mateica Dan (6788, 91, 815, 47—9, 62, 4, 7, 9, 81, 4), Frenţi Elena (6681, 5, 95, 7, 712, 20, 2, 4, 6, 35, 59, 64), Guberan Mircea (6677, 710, 1, 5, 35, 51, 2, 7, 61, 3, 4, 88, 97, 847—50, 9, 62, 7, 79), Munteanu Vasile (6666, 7, 70—7, 80, 3, 5, 92, 5, 7, 8, 710—2, 4—6, 20, 1, 2, 4, 6, 32, 5, 64). Popişteanu Delia (6666 7, 70, 1, 3, 5—7, 80, 711, 5, 20, 1, 2, 6, 35). Cl. XI. Jurca Ion (6678, 82, 4, 6, 89—93, 708, 10, 24, 6, 8, 39, 45, 64, 6, 76, 82, 3, 6, 7). Absolvent *Bena I. Dorin* (6796, 801, 3, 4, 7, 10, 20, 3, 5, 6, 40—90, 2, 3, 5,—8, 902, 7, 9, 11, 5, 6, 8—25, 7—60, 1—6, 8, 9, 71—3, 5, 80, 2, 3, 5, 6, P).

LUNCA (Suceava). Carpiuc Elena (E : 2248, 50, 4, 7, 14, 5, 7, 42).

LUPENI. Cl. IX. Schicht Ana (6847—9, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 8), Poenar Gabriela (6764, 88, 802, 49, 62, 4, 7, 9, 79, 81).

MĂCIN (Dobrogea). Cl. X. Simion Andrei (6666, 7, 70, 1, 3—7, 8, 80, 6, 9, 92, 3, 5, 7).

MĂGURA (Ploieşti). *S. g.* lc. VII. Ionescu Vivtor (E : 2248—50, 2, 4, 63, 70, 6).

MARGINA (Banat). *S. g.* cl. IV. Cipu Mihai (E : 2291, 4, 5, 301, 2, 8, 13). Cl. VII. Unguraş Ion (E : 2248—50, 2—4, 8, 83). Cl. VIII. Ionaşcu Maria (E : 2248, 54, 63, 5, 8, 70, 7, 9), Mesz Ioan (E : 2254, 65, 8, 70, 4, 5, 9, 80).

MUZEUL MUNICIPAL BUCUREŞTI BIBLIOTECA CENTRALĂ

MĂRGINENI (Argeș). *S. g.* cl. VIII. Piroi Ion (E : 2265, 8, 9, 80, 90—2, 4—6, 301, 2).

MEDGIDIA. *S. m.* VII. Țonea Zisu (E : 2281—3, 6, 7, 90—6, 99—301).

MEDIAȘ. *S. m. 1* cl. VIII. Popa Lucian (E : 2265, 8, 76, 80, 1, 301, 2). *S. m. 2* cl. X. Dudici Mircea (6752, 5—7, 9—61, 3, 96, 7, 9, 802, 35), Georgescu Clement (6666—8, 71, 1, 4—6, 20, 2, 4, 36, 50—2, 5, 7, 63, 4), Panican Viorel (6750, 2, 5—5, 60, 3, 91, 801, 3, 11, 97, 9). Cl. XI. Georgescu Clemet (6758—61, 5, 8, 93, 5—7, 9, 802, 3, 23, 47—9, 59, 62, 4).

MIHAI BRAVUL (București). *S. g.* cl. VI. Ionescu Gheorghe (E : 2248, 53, 4, 65, 6, 8, 9, 78, 81).

MIZIL. *S. g.* cl. VII. Stanciu Eliza (E : 2248, 50, 2, 65, 8, 9, 76, 80), Vlădăreanu Doina (E : 2281—3, 8, 91—6, 9, 300—2). *S. m. 1* cl. VI. Oprișan Vasile (E : 2248, 50, 5, 6, 8, 9, 65, 8, 78, 80).

MEHADIA. Cl. X. Vrăjitoru Isac (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 32, 5, 42, 8, 50—3, 5, 7, 9, 61, 3, 4, 76, 91, 801, 2, 12, 29, 31).

MIERLEȘTI (Argeș). *S. g.* cl. VIII. Mezdrea Maria (E : 2281—3, 6—8, 91—6, 9, 301, 2).

MOINEȘTI. *S. m.* cl. VIII. Grecu Victor (E : 2265, 6, 8, 9, 77, 8, 80, 1, 3, 90, 1, 3—6, 301, 2, 4, 7, 8, 9), Vrînceanu Gabriela (E : 2248, 50, 2, 4, 5, 8, 61, 3, 5—71, 7, 80).

MORENI. *S. m.* cl. VI. Șabău Mihaela (E : 2248—50, 3, 8, 9, 65, 6, 8, 70). Cl. VIII. Cojocaru Ion (E : 2248, 50, 63, 5, 8, 70, 7, 8). Cl. X. Matei Ion (6666, 7, 70—8, 80—2, 4, 5, 9, 92, 3, 5—8, 700, 1, 7, 10, 1, 5, 6, 20—4), Pădureanu Dumitru (6666—8, 70—7, 80, 2, 92, 4, 7, 11, 6, 20, 2, 4, 9). Cl. XI. Mărășescu Serghie (6666, 7, 70—8, 80, 1, 4, 5, 92, 5—8, 700, 3, 7, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 1, 2, 4, 6, 8, 45, 8), Tocan Mihail (6667, 9, 70—8, 80, 96, 710—3, 5, 6, 20).

MOȘTENI (București). *S. g.* cl. VIII. Dumitru Gheorghe (E : 2281—3, 6, 9—92).

MOZĂCENI DEAL (Argeș). Cl. IX. Iacșa Constantin (6802, 50, 2, 5, 9, 67, 8, 70, 9, 81, 95).

MURGENI (Iași). Cl. X. Cîrjă Gheorghe (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 51, 5, 63, 9, 90), Leu Ștefan (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 51, 5, 63, 4, 90), Popa Neculai (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 55, 63, 4).

MUȘETEȘTI (Oltenia), *S. g.* cl. VI. Curcanu Petre (E : 2296, 9, 305, 6, 12, 6, 9, 20—2).

NADLAC (Banat). *S. g.* cl. VI. Bățăran Ștefan (E : 2233, 5, 8, 40, 2, 3, 7, 8, 50). Cl. VIII. Țiriac Ștefan (E : 2248, 50, 65, 8, 73, 4, 5, 7).

NĂDRAG (Banat). C. IX. Petrescu Ion (6670, 1, 3, 6, 85, 716, 20 ,2, 4, 35, 57, 83). Cl. X. Bereneanțu Nicolae (6674, 5, 7, 85, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 57, 87, 91), David Nicolae (6666—77, 80, 2, 4, 5, 97, 706, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 42, 51—61, 3, 4, 8, 82, 3, 7, 8, 91, 7—9, 801, 2, 13, 5, 847—54, 9, 62, 4—70, 9—81, 4), Petrescu Zorel (6580, 3—5, 8, 9, 605, 7, 16, 31, 4, 44, 8, 56, 9, 70—7, 80, 2, 5, 93, 5).

NĂSĂUD (Cluj). Cl. IX. Ceuca George (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 4, 5, 98, 710, 4—6, 720—2, 4, 35, 50, 2, 7—9, 64, 82, 8, 91), Mureșanu Florin (6671, 4, 7, 80—2, 5, 712, 21, 4, 6, 847—9, 62—4, 6, 7, 9, 81), Tîmbulea Leon (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 4, 5, 716, 20, 2, 8, 35, 7, 64, 76). Cl. X. Kiselstein Aurel (6710—2, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 32, 5, 6, 50, 1, 5, 7, 63, 4).

NEGRU VODĂ (Dobrogea). Cl. X. Ciociia Ioana (6750—2, 5, 7, 9, 60, 3, 4, 91, 4, 802, 13).

NEMȚIȘOR (Bacău). *S. g.* cl. VII. Axinte Marta (E : 2265, 8, 70, 7, 8, 80, 2, 91).

NICOREȘTI (Galați). *S.g.* cl. VI. Oprea Dorin (E : 2265, 6, 8, 9, 78, 80, 3, 6).

NOVACI (Oltenia). Cl. IX. Duță Gheorghe (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 2, 4, 35). Cl. X. Comănescu Gheorghe (6670, 1, 3—7, 80, 2, 93, 711, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6).

OLTENIȚA (București). Cl. X. *Vlășceanu Stan* (6667, 70—7, 80, 1, 6, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 32, 5, 6, 41, 2, 8, 51, 2, 5—7, 61, 3, 4, 87, 8).

ORADEA. *Sc. pedag. nr. 5* cl. VI. Méhész Ana (E : 2248, 50, 1, 68, 70, 6, 80). *S. m. 1* cl. X. *Bara Gheorghe* (6750, 2, 5, 6, 9, 61, 97, 9, 801, 2, 12, 24, 41, 7—52, 4, 5, 7, 9, 62, 4, 5—9, 79, 81, 4, 8, 96), *Hîncu Marius* (6750—3, 5, 7, 9—61, 3—5, 8, 78, 82, 91, 5, 7, 9, 802, 3, 23, 4, 8, 9, 31, 40, 2, 7—50, 2, 4, 9, 60, 2, 4—70, 3, 8—81, 4, 8, 95, 902, 15, 6, 8), Lazăr Virgil 6671—8, 80, 3, 710, 1, 4—6, 20—2, 4, 6, 35, 50—2, 5, 9, 63, 6). *S. m. 2* cl. X. Lucus Teodor (6720, 2, 35, 70—8, 80, 2), Mănucu Dumitru (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 51, 6, 7, 63, 82, 97), Mile Stela (6796, 7, 9, 803, 49, 52, 4, 7, 9, 64, 5, 9, 70, 9, 81), Weisz Maria (6666, 70, 1, 3, 5—7, 710,1, 5, 20, 2). Cl. XI. Bologa Florin (6666, 7, 81, 5, 93, 5, 7, 8, 710, 5, 20, 2) *S. m. 4* cl. X. But Tiberiu (6666, 7, 82, 5, 91, 3, 5, 7, 710, 1, 5, 6, 23, 4, 6, 9, 32), *Meer Petru* (6666, 7, 70—7, 80—2, 5, 91—3, 5, 7, 8, 710, 1, 2, 5, 6, 20, 2—4, 6, 9, 31, 2, 5, 6, 8, 42, 8, 50—3, 5—61, 3, 4, 87, 8). Cl. XI. Hamza Lucian (6716, 24, 35, 50, 1, 5—7, 9, 61, 2, 3).

ORĂȘTIE. Cl. XI. Hîndorean Constantin (6670—8, 80, 1, 2, 98, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 51, 3, 5, 63).

1965 DEC 18

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— *Rezolvitorii de probleme din G.M.-B. care în anul 1965 vor întruni peste 150 probleme rezolvate și anunțate la rubrica rezolvitorilor în primele 10 numere apărute, pot trimite redacției, după 1.XI.1965, o fișe arătînd care sînt aceste probleme, pentru a face controlul la întocmirea listei elevilor care vor fi premiați pe anul 1965.*

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

ERATĂ. La problema 7088 în loc de x^3 se va scrie λx^3.

— Problemele 7060 și 7062 au fost propuse de E. Bortaș ; problema 7059 de Constanța Lăzărescu și problema 7061 de C. Cara.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Informația" — c. 2811 INDEX 41601 **Lei 2**

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) — octombrie 1965

10

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES
CONUMENTÁCIOS KÖZPONT
1883

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
Anul XVI (II), nr. 10 — octombrie 1965

SUMARUL

Pag.

1. Asupra unor transformări prin inversiune de Vasile Vasu, Sibiu 451
2. Note matematice de W. Maurer şi C. Bukowski, Sighişoara 459
3. A VII-a olimpiadă internaţională de matematică de conf. univ. Tiberiu Roman şi profesor emerit al R.S.R. Zlate Bogdanov 463
4. Probleme rezolvate (6700, 6708, 6709, 6728, 6731, 6739, 6740, 6744, 6746) 467
5. Chestiuni de examen (7167—7183) 473
6. Probleme propuse (7184—6215) 477
7. Exerciţii şi probleme propuse pentru cl. V—VIII (E: 2381—2393) 482
8. Din experienţa unui cerc de matematici din oraşul Braşov de Al. Corniciuc, Braşov 484
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme 486

ANUL XVI, 10 OCTOMBRIE

O mare parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Braşov a Societăţii de ştiinţe matematice din Republica Socialistă România.

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICA

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 10 octombrie 1965

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI PRIN INVERSIUNE

de *VASILE VASU*, profesor Sibiu

În paginile acestei reviste au apărut în anii precedenți, unele articole privind transformările prin inversiune. Astfel, în nr. 9/septembrie 1953 a fost publicat articolul „Inversiunea" de conf. univ. Elena Mavrodin, în nr. 1/ianuarie 1964 articolul „Unele aplicații ale transformării geometrice prin inversiune", de aceeași autoare, iar în nr. 10/octombrie 1960, „Unele aplicații ale transformării prin inversiune în spațiu", de I. Hadîrcă și V. V. Băghină, profesori din Breaza.

În rîndurile ce urmează îmi propun să arăt, în puține cuvinte, tinerilor cititori ai revistei, care nu dispun de volumele mai vechi ale acestei reviste, ce este inversiunea, principalele ei proprietăți, însoțite de sumare indicații pentru demonstrarea lor. Apoi voi prezenta un material mai puțin cunoscut, privind transformarea prin inversiune a hiperbolei echilatere, pol fiind ales centrul de simetrie al hiperbolei, precum și tranformarea prin inversiune a parabolei, pol fiind ales vîrful parabolei. Ultimele transformări vor duce la două curbe denumite *lemniscata lui Bernoulli* și *cisoida lui Diocles*. Din acestea vor rezulta, după cum vom arăta, posibilitatea de a stabili numeroase proprietăți ale acestor curbe.

Fie O un punct fix, numit pol de inversiune și k o mărime constantă, numită putere de inversiune.

Definiție. *Se numește transformatul prin inversiune sau inversul punctului M față de polul O și cu puterea k, punctul M situat pe dreapta OM astfel încît $OM \cdot OM' = k$.* (fig. 1).

Cînd $k > 0$, punctele M și M' vor fi așezate de aceeași parte a polului O, iar cînd $k < 0$, de o parte și de alta a polului.

Remarcăm că orice punct își are inversul său; inversul polului este punctul de la infinit.

Proprietatea I. Fie M, N două puncte date și M', N' inversele lor. Dreptele MN și $M'N'$ sînt antiparalele față de laturile OM și ON ale unghiului MON și avem relația fundamentală:

$$MN = M'N' \cdot \frac{k}{OM' \cdot ON'} \tag{1}$$

Demonstrația se face observînd că $OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = k$, de unde rezultă asemănarea triunghiurilor OMN și $OM'N'$.

Tot din asemănarea acestor triunghiuri deducem relaţia dintre segmentul MN, care uneşte două puncte date şi $M'N'$, care uneşte inversele acestor puncte.

Presupunem acum, că transformăm prin inversiune toate punctele curbei (C). Se obţine curba (C'), inversa curbei (C). (fig. 2).

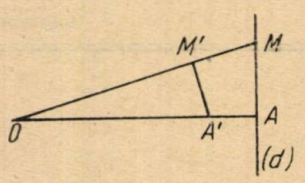


Fig. 1

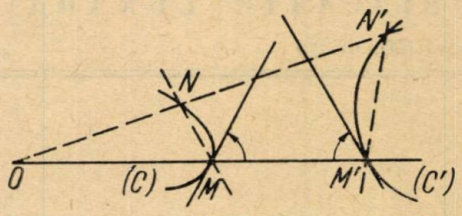


Fig. 2

O *consecinţă* a proprietăţii I este faptul că tangentele la cele două curbe inverse (C) şi (C') în puncte corespunzătoare fac cu raza vectoare unghiuri egale şi de sens contrar.

Se stabileşte această consecinţă rotind raza vectoare ONN' în jurul punctului O, încît N să tindă către M şi ţinînd seamă de poziţiile limită ale dreptelor NM şi $N'M'$, precum şi de proprietatea precedentă.

Altă consecinţă : Date fiind două curbe (C_1) şi (C_2) care se taie în M şi inversele lor, curbele (C_1') şi (C_2'), unghiul sub care se taie curbele date în M este egal cu unghiul sub care se taie curbele inverse în M', inversul lui M.

Această consecinţă rezultă din precedenta.

În particular, curbele tangente se transformă tot în curbe tangente.

Proprietatea II : *Transformata prin inversiune a unei drepte ce trece prin pol este dreapta însăşi.*

Transformata prin inversiune a unei drepte ce nu trece prin pol este un cerc ce trece prin polul de inversiune.

Prima propoziţie este evidentă. Pentru a dovedi pe a doua, notăm cu A proiecţia lui O pe dreapta (d), care trebuie transformată şi cu A', inversul punctului A. Punctul M fiind un punct oarecare pe dreapta (d) şi M' inversul său, dreptele AM şi $A'M'$ sînt antiparalele, deci $A'M' \perp OM$. Locul

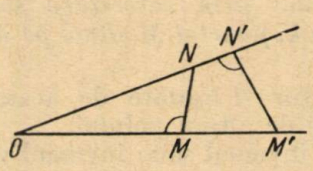
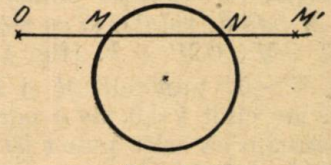


Fig. 3



Fip. 4

geometric al punctului M' este cercul de diametru OA'. Reţinem că centrul cercului obţinut se găseşte pe perpendiculara dusă din O pe dreapta (d).

Reciproc, un cerc ce trece prin polul de inversiune se transformă într-o dreaptă perpendiculară pe diametrul polului (fig. 3).

Demonstraţia se face analog.

Proprietatea III. Inversul unui cerc care nu trece prin pol este tot un cerc (fig. 4).

Presupunînd că O este polul, M un punct al cercului, M' inversul său, iar N punctul unde raza vectoare OM mai taie cercul dat, avem :

$OM \cdot OM' = k$; $OM \cdot ON = p$ (constant; puterea punctului O față de cercul dat).

Prin împărțire rezultă :

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{k}{p}$$

deci M' este omoteticul punctului N față de centrul de omotetie O și raportul de omotetie $\frac{k}{p}$.

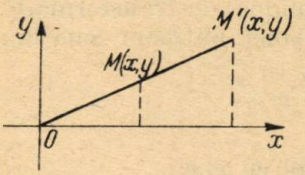


Fig. 5

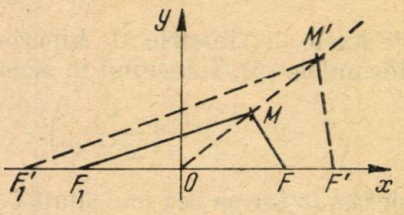


Fig. 6

Cum punctul N descrie cercul dat, punctul M' va descrie tot un cerc (figură omotetică cercului dat).

Folosind geometria analitică, să deducem coordonatele inversului M' cînd se cunosc coordonatele punctului M și puterea de inversiune k.

Alegem originea axelor în polul de inversiune și notăm coordonatele punctelor $M(x, y)$ și $M'(X, Y)$. Deducem perpendicularele din M și M'pe axa Ox. Din asemănarea celor două triunghiuri avem, ca mărime și ca semn : (fig. 5).

$$\frac{X}{x} = \frac{OM'}{OM} \text{ sau, succesiv : } \frac{X}{x} = \frac{OM' \cdot OM}{OM^2}; \quad \frac{X}{x} = \frac{k}{x^2 + y^2}$$

adică :

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2} \text{ și analog : } Y = \frac{ky}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

La fel deducem :

$$x = \frac{kX}{X^2 + Y^2}; \quad y = \frac{kY}{X^2 + Y^2}. \tag{3}$$

Folosind aceste relații de transformare stabilim ușor unele din proprietățile enunțate.

Să arătăm de exemplu, ca aplicație, că transformatul unui cerc care nu trece prin pol este tot un cerc.

Fie : $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ ecuația cercului dat. Înlocuind pe x, y cu valorile respective și făcînd calculele se obține ecuația :

$$p(X^2 + Y^2) + mkX + nkY + k^2 = 0$$

adică tot un cerc.

Se poate verifica ușor că centrele celor două cercuri și polul O sînt trei puncte coliniare.

Să găsim transformata prin inversiune a unei hiperbole echilatere, pol fiind ales centrul hiperbolei, iar puterea de inversiune o mărime k oarecare (Fig. 6).

Vom stabili atît analitic, cît și geometric, curba inversă, arătînd că ea este o curbă denumită *lemniscata lui Bernoulli* și vom deduce o proprietate geometrică foarte simplă a acestei curbe.

Analitic : raportînd hiperbola echilateră la axele ei de simetrie, ecuația ei este : $x^2 - y^2 = a^2$, notațiile fiind cele obișnuite.

Dacă c este semidistanța focală, avem $c = a\sqrt{2}$, iar ecuația hiperbolei echilatere este $x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$.

Transformăm hiperbola prin inversiune, alegînd centrul ei de simetrie ca pol de inversiune, puterea fiind k, oarecare. Alegem ca axe de coordonate axele de simetrie ale hiperbolei. Formulele de transformare vor fi deci formulele (3). Înlocuind în ecuația hiperbolei, obținem ecuația :

$$\left(\frac{kX}{X^2 + Y^2}\right)^2 - \left(\frac{kY}{X^2 + Y^2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$$

sau, pusă sub forma cea mai simplă și scrisă tot cu x, y :

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2k^2}{c^2}(x^2 - y^2) = 0. \tag{4}$$

Curba obținută este de gradul 4 și poartă numele de *lemniscata lui Bernoulli*. Făcînd schimbarea în coordonate polare, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, se obține ecuația simplă :

$$\rho = \frac{2k^2}{c^2} \cos 2\theta. \tag{5}$$

Folosind această formă se poate intui faptul că lemniscata are forma unui opt culcat (fig 7).

Proprietatea enunțată a fost dovedită analitic.

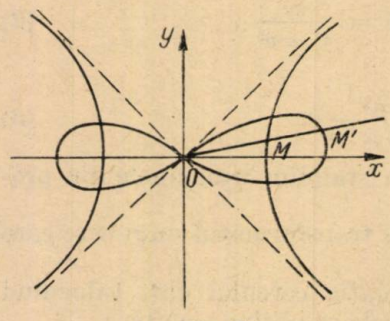


Fig. 7

Soluția geometrică a problemei dă însă, așa cum am afirmat, o simplă și frumoasă proprietate a curbei.

Folosind figura precedentă avem, din definiția hiperbolei :

$$MF_1 - MF = 2a, \tag{6}$$

F și F_1 fiind focarele, iar M un punct oarecare al hiperbolei. Notînd cu F', F_1' și M' inversele acestor puncte, conform relației fundamentale (1) putem scrie :

$$MF_1 = M'F_1' \cdot \frac{k}{OM' \cdot OF_1'};$$

$$MF = M'F' \cdot \frac{k}{OM' \cdot OF'}$$

Înlocuind în relația (6) obținem :

$$M'F_1' \cdot \frac{k}{OM' \cdot OF_1'} - M'F' \cdot \frac{k}{OM' \cdot OF'} = 2a$$

Dar F și F' sînt puncte inverse, deci $OF \cdot OF' = k$, adică $OF' = \frac{k}{c}$. La fel $OF_1' = \frac{k}{c}$. Înlocuite, relația precedentă devine :

$$M'F_1' - M'F' = \frac{2a}{c} OM' \text{ sau : } M'F_1' - M'F' = OM'\sqrt{2},$$

deoarece $c = a\sqrt{2}$.

Relația geometrică obținută este remarcabilă. Ea poate fi pusă însă, sub o formă și mai simplă : o ridicăm la patrat :

$$M'F_1'^2 + M'F'^2 - 2M'F_1' \cdot M'F' = 2OM'^2$$

În triunghiul $M'F'F_1'$, unde $OF' = OF_1'$, aplicăm teorema medianei :

$$M'F_1'^2 + M'F'^2 = 2OM'^2 + \frac{F'F_1'^2}{2}$$

Scăzînd relația precedentă din aceasta obținem :

$$2M'F_1' \cdot M'F' = \frac{F'F_1'^2}{2}$$

Dar $F'F_1' = 2OF'$. Înlocuind, rezultă proprietatea geometrică a lemniscatei lui Bernoulli :

$$M'F' \cdot M'F_1' = OF'^2 ; \; OF' = OF_1' = \frac{k}{c}$$

Notînd $\frac{k}{c} = p$ putem enunța următoarea

Proprietate : *Lemniscata lui Bernoulli, a cărei ecuație este* $(x^2 + y^2)^2 - 2p^2(x^2 - y^2) = 0$, *se bucură de proprietatea că produsul distanțelor de la un punct oarecare al ei la punctele fixe* $F'(p, 0)$ *și* $F_1'(-p, 0)$ *este constant și egal cu* p^2.

Verificarea ei se poate face acum ușor, direct, pe calea geometriei analitice, căutînd locul geometric al punctelor al căror produs al distanțelor la punctele F' și F_1' să fie egal cu p^2.

Să stabilim cine este transformata prin inversiune a parabolei, pol fiind ales vîrful parabolei, iar puterea de inversiune o mărime k, oarecare.

Ecuația parabolei fiind $y^2 = 2px$, formulele de transformare vor fi tot formulele (3). Înlocuind găsim :

$$\left(\frac{kY}{X^2 + Y^2}\right)^2 = 2p \frac{kX}{X^2 + Y^2}.$$

Punînd această ecuație sub forma cea mai simplă, rezolvînd-o în raport cu Y, apoi scriind ecuația obținută cu x și y în loc de X și Y, găsim că inversa parabolei este curba :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{\frac{k}{2p} - x}} \tag{7}$$

Ea se numește *cisoida lui Diocles*.

O definiție geometrică simplă a acestei curbe este următoarea :

Fiind dat un cerc de diametru AB, se duce în punctul B tangenta BC, iar prin A o secantă variabilă, pe care se măsoară o lungime AM

egală cu porțiunea secantei cuprinsă între cerc și tangenta fixă BC. Locul geometric al punctului M este *cisoida lui Diocles* (a se vedea și vol. nr. 10 apărut în Biblioteca S.S.M.F. cu titlul „Despre conice și alte curbe", de O. Sacter).

Notînd cu R raza cercului și luînd ca axe de coordonate diametrul AB și perpendiculara dusă pe el în punctul A, se va găsi fără greutate, că locul geometric căutat are ecuația :

$$Y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2R-x}} \tag{8}$$

Compararea ecuațiilor (7) și (8) arată imediat că ele reprezintă aceeași curbă și dă, în același timp, posibilitatea calculării razei R a cercului generator, în cazul ecuației (7).

Forma cisoidei este ușor de schițat, dat fiind că ecuația ei, pusă sub formă explicită, este destul de simplă.

În cele ce urmează voi arăta cum, folosind cele stabilite din proprietățile cunoscute ale hiperbolei echilatere sau ale parabolei se pot deduce proprietăți ale lemniscatei sau cisoidei.

Exemplul 1. Este cunoscută proprietatea că o tangentă variabilă dusă la hiperbola echilateră, împreună cu asimptotele hiperbolei, determină un triunghi de arie constantă (cititorii o pot verifica singuri). Deci, $OA \cdot OB$ = constant.

Transformăm întreaga figură prin inversiune, luînd pe O ca pol, puterea fiind k, oarecare. Să căutăm în ce se transformă proprietatea precedentă (fig. 8).

Hiperbola se transformă în lemniscată ; axele și asimptotele fiind drepte ce trec prin pol se transformă în ele însile, iar tangenta AB la hiperbolă, în cerc tangent la lemniscată, trecînd prin polul O. Punctele A și B găsindu-se la intersecția dreptei AB cu asimptotele, inversele lor A' și B'

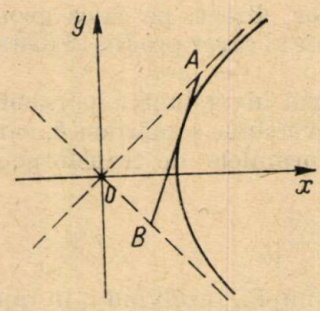


Fig. 8

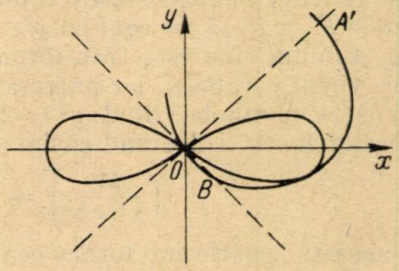


Fig. 9

se vor găsi la intersecția cercului precedent cu aceleași asimptote (fig. 9). Avem : $OA \cdot OB$ = constant.

Dar, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k$, de unde $OA = \frac{k}{OA'}$, $OB = \frac{k}{OB'}$ deci, $\frac{k}{OA'} \cdot \frac{k}{OB'}$ = constant, sau : $OA' \cdot OB'$ = constant.

Mai reținem că asimptotele hiperbolei fiind tangente curbei în punctele de la infinit, rezultă că pentru figura inversă, tot asimptotele vor fi tangente lemniscatei în origine (fig. 9).

Am dedus deci următoarea

Proprietate: Fie A' și B' punctele unde un cerc variabil, tangent la lemniscată, care trece prin centrul O de simetrie al acestei curbe, taie tangentele duse la curbă tot prin punctul O. Produsul segmentelor OA', OB' este constant.

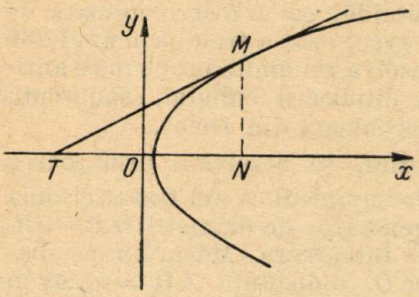


Fig. 10

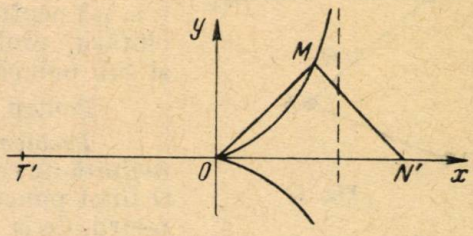


Fig. 11

Observație. Valoarea constantelor $OA \cdot OB$ și $OA' \cdot OB'$ este ușor de găsit, particularizînd poziția tangentei. Ele sînt respectiv egale cu c^2 și cu $\left(\frac{k}{c}\right)^2$, notațiile fiind cele folosite.

Exemplul 2. Se stabilește ușor, proprietatea: Fie un punct oarecare M al parabolei. Notăm cu N proiecția punctului M pe axa de simetrie a parabolei, cu T simetricul punctului N față de vîrful O al ei. Dreapta MT este tangentă la parabolă. Proprietatea enunțată dă posibilitatea construirii unei tangente la parabolă, într-un punct al ei (fig. 10).

Transformăm figura prin inversiune, alegînd ca pol vîrful parabolei, puterea fiind k, oarecare. Parabola se transformă în cisoida lui Diocles, iar M', inversul lui M, va fi un punct oarecare al cisoidei; dreapta MN se transformă într-un cerc ce trece prin O și M', avînd centrul pe axa Ox; acest cerc taie axa în N', inversul punctului N. Simetricul T' al punctului N' față de O, va fi inversul punctului T. Dreapta TM, tangentă la parabolă se transformă în cercul $T'M'O$, tangent la cisoidă, de unde rezultă următoarea

Proprietate. Notînd cu O punctul de întoarcere al cisoidei, cu M' un punct oarecare al ei; perpendiculara dusă în punctul M' pe dreapta OM' taie axa de simetrie a cisoidei în punctul N'. Mai notăm cu T' simetricul punctului N' față de punctul O. Cercul $T'\,M'\,O$ este tangent la cisoidă în punctul M' (fig. 11).

Observație. Punctele cisoidei, conform definiției curbei, se pot construi numai cu rigla și compasul. Din proprietatea precedentă rezultă că putem construi și tangenta la cisoidă, într-un punct al ei, numai cu rigla și compasul; ea ne arată în același timp, cum trebuie executată construcția.

Se pot da numeroase alte exemple de asemenea proprietăți ale lemniscatei sau cisoidei, deduse prin inversiune. Este suficient pentru aceasta, să plecăm de la o proprietate convenabilă a hiperbolei echilatere sau parabolei. Va fi un exercițiu util ca tinerii cititori ai revistei să facă singuri această alegere și transformările respective.

În încheiere atrag atenția asupra faptului că lemniscata, precum și cisoida, se întîlnesc în practică sau în rezolvarea problemelor (fig. 12).

Astfel, pentru a transforma o mişcare alternativă rectilinie într-o mişcare circulară alternativă, fizicianul Watt a folosit trei bare articulate. Barele OA şi CB se rotesc în jurul punctelor fixe O şi C, iar bara AB este articulată mobil cu celelalte două bare, în A şi B. Se demonstrează că un anumit punct al barei AB descrie în timpul mişcării, o lemniscată (v. O. Sacter, loc. cit. pag. 5).

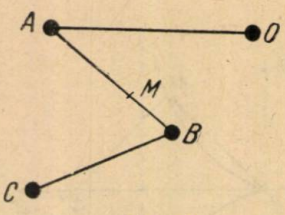


Fig. 12

Cît despre cisoidă, ea a fost imaginată de Diocles (geometru grec, care a trăit prin anul 200 î. e. n.) pentru a rezolva renumita problemă a antichităţii, problema duplicării cubului, cunoscută şi sub numele de problema din Delos.

Pentru lămurire, să rezolvăm următoarea

Problemă : Presupunem că am trasat cisoida definită de cercul generator de diametru $OA = 2R$, O fiind punctul de întoarcere. Măsurăm pe diametru, de la A spre O, o distanţă $AB = a$, iar în punctul B ridicăm o perpendiculară BC de lungime egalăm cu ma. Dreapta AC taie cisoida în punctul M, iar perpendiculara dusă din M pe diametrul OA taie cercul generator în N. Notăm cu D puuctul de intersecţie al dreptei AN cu BC. Să se calculeze lungimea segmentului BD (fig. 13).

Alegînd axele indicate în figură, ecuaţia cisoidei este :

$$y^2 = \frac{x^3}{2R - x}$$

R fiind raza cercului. Coordonatele lui A şi C sînt $A\ (2R\ ;\ 0)$, iar $C\ (2R = a\ ;\ ma)$. Ecuaţia dreptei AC este $y = -m(2R - x)$. Eliminarea lui y între ecuaţia dreptei şi cea a cisoidei duce imediat la ecuaţia :

$$\frac{x}{2R - x} = \sqrt[3]{m^2}$$

Din asemănarea triunghiurilor ADB şi ANP deducem succesiv :

$$\frac{BD}{NP} = \frac{AB}{AP}\ ;\quad \frac{BD}{\sqrt{x(2R - x)}} = \frac{a}{2R - x}\ ;\quad BD = a\sqrt{\frac{x}{2R - x}}$$

Ţinînd seamă de valoarea dedusă pentru raportul $\frac{x}{2R - x}$ deducem că :

$BD = a\sqrt{\sqrt[3]{m^2}} = a\sqrt[3]{m}$, deci, $BD^3 = ma^3$.

Aceasta ne arată cum poate fi folosită cisoida pentru a construi un cub al cărui volum să fie egal cu de m ori volumul unui cub dat. Latura cubului dat, fiind egală cu a, latura cubului cerut este egală cu lungimea segmentului BD, din construcţia precedentă.

Cazul $m = 2$ duce la rezolvarea problemei din Delos.

Cisoida se întîlneşte de asemenea în practică în unele probleme de mecanisme. Astfel, să considerăm două bare AM şi MP, perpendiculare una pe alta. Bara AM este obligată să treacă prin punctul fix B ; bara MP, de lungime constantă, egală cu distanţa de la punctul B pînă la dreapta fixă CD, se mişcă, fiind obligată ca punctul său P să alunece pe dreapta CD. Mijlocul barei MP descrie o cisoidă (fig. 14).

Mecanismul a fost imaginat de Newton, pentru a putea trasa cisoida.

Pentru verificare sfătuim pe cititori să noteze $BC = MP = 2a$, cu O mijlocul lui BC şi să-şi aleagă axele indicate în figură. N fiind mijlocul lui MF, se pot exprima coordonatele x şi y ale punctului N în funcţie de

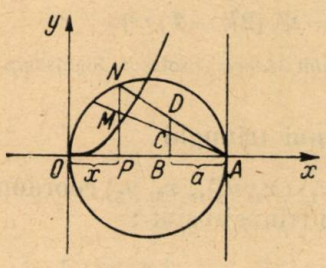


Fig. 13

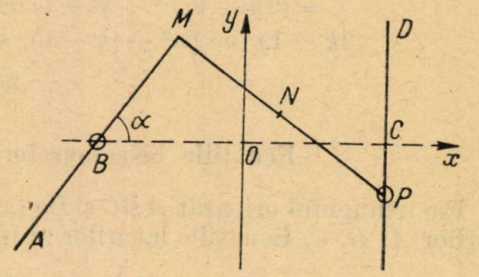


Fig. 14

mărimea a şi de unghiul $xBM = \alpha$. Se găseşte: $x = a(1 - \sin\alpha)$; $y = -a\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha}$. Eliminînd pe α între cele două relaţii se găseşte ecuaţia cisoidei.

NOTE MATEMATICE

Generalizarea problemelor E: 1468 şi E: 1844

a) Suma patratelor a $6k-1$ şi $6k-5$ numere naturale consecutive este un multiplu de $6k-1$, respectiv $6k-5$.

b) Suma cuburilor a $2k-1$ numere naturale consecutive este un multiplu de $2k-1$ şi un multiplu al mediei aritmetice a celor $2k-1$ numere date.

Soluţie. —a) 1° Fie $n-(3k-1), \ldots, n-2, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, n+(3k-1)$, $6k-1$ numere naturale consecutive. Avem:

$$[n-(3k-1)]^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + [n+(3k-1)]^2 = (6k-1)n^2 + 2[1^2+2^2+\ldots+(3k-1)^2] = (6k-1)n^2 + (3k-1)\cdot k\cdot(6k-1) = (6k-1)\cdot[n^2+k(3k-1)] = \mathfrak{M}(6k-1).$$

2° Fie $n-(3k-3), \ldots, n-2, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, n+(3k-3), 6k-5$ numere naturale consecutive. Avem:

$$[n-(3k-3)]^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + [n+(3k-3)]^2 = (6k-5)n^2 + 2(1^2+2^2+\ldots+(3k-3)^2] = (6k-5)n^2 + (k-1)\cdot(3k-2)\cdot(6k-5) = (6k-5)[n^2+(k-1)\cdot(3k-2)] = \mathfrak{M}(6k-5).$$

b) Fie $n-(k-1), \ldots, n-2, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, n+(k-1)$, $2k-1$ numere naturale consecutive. Media lor aritmetică este n.

68, 70—73, 75, 76, 78, 86, 88, 89, 93, 409, 19, 20, 24, 28).

Ș.m. 4, cl. X. **Bordaș Arcadiu** (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 20—22, 37, 38, 44, 45), Fleischer Gheorghe (6308, 09, 11, 12, 14, 17, 42, 44, 45, 54, 56—59, 61, 62, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 77, 81, 88, 89, 97, 98, 400, 02, 05, 06, 11, 14, 16, 18—20, 22, 24, 27—29, 31, 34, 36, 40, 41), Kapy Ștefan (6308, 09, 11, 12, 16, 17, 19, 28, 30, 42, 45, 56).

ORȘOVA. Ș.m. cl. IX. Crețoiu Mircea (6316, 21, 45, 68, 70, 73, 74, 88, 89, 93).

OȚELUL ROȘU. Ș.m. cl. VII. Sabău Florin (E: 2136, 38, 56—58, 64, 69, 82). Cl. X. Sabău Maria (6316, 45, 73, 88, 89, 93, 99, 70, 412, 20; E: 2174, 83).

PANCIU. Ș.m. cl. IX. Hărăbor Gheorghiță (6314, 28, 44, 56, 57, 70, 75, 89, 420, 21). Cl. X. Hărăbor Constantin (6308, 10—12, 14, 16, 17, 28, 30, 38, 44, 45, 56, 57, 60, 65—73, 75, 86, 88, 89, 93, 420, 31, 36).

PATÎRLAGELE. Ș.m. cl. VIII. Neacșu Dumitru (6368, 71, 75; E: 2143, 48, 71, 79, 83), Bîrzoveanu Constantin (6308, 44, 56, 60, 70, 72, 75; E: 2154, 55, 60). Cl. X. Popa Dumitru (6356, 67, 70, 72, 89, 93, 400, 19, 24, 41, 59, 60, 61, 63). Cl. XI. **Andrei Titus** (6308, 09, 11, 18, 20, 22, 23, 25—27, 29, 30, 33, 37, 38, 40—45, 50, 54, 56—62, 65—78, 81, 82, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 98, 400, 05, 10, 11, 16, 20, 21, 24, 26, 34, 41), Pavel Dumitru (6309, 20, 55, 74, 78, 81, 83, 89, 411, 16, 19, 20).

PĂUNEȘTI. Șc. 8 ani cl. VII. Gîdea Otilia (E: 2140, 52, 57, 66, 69, 71, 79, 82). Cl. VIII. Bacalu Lucica (E: 2159, 61, 68, 69, 71, 73, 79, 82).

PEȘTEANA-JIU. Ș.m. cl. VIII. Trușcă Matei (E: 2136—38, 45, 46, 48, 52, 54, 57, 69).

PETROȘENI (Hunedoara). Ș.m. cl. IX. Păișanu Viorel (6389; E: 2153—59, 61—68). Cl. XI. Popescu Lucian (6257, 58, 65, 67, 71—74, 76, 308—12, 14, 16—18, 45, 59, 66—69, 73).

PIATRA NEAMȚ. Ș.m. cl. VIII. **Drăgoi Marcel** (6308, 14, 16, 37, 44, 45, 56—58, 66—68, 70—75, 89, 93, 420, 24, 28; E: 2137, 40, 41, 43, 44, 49, 51, 54, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 75, 78—80, 83). Cl. XI. Teodorescu Voltaire (6308—20, 42, 45, 51, 54, 56, 58, 59, 62—65, 67, 69, 75, 82, 87, 89, 91).

PITEȘTI. Ș.m. 1, cl. VIII. Dumitrache Ion (6257, 58, 71—73; E: 2124—26, 28, 29, 31, 32, 34), **Lungulescu B. Eugen** (6308—12, 14—18, 20, 22, 25, 28—30, 33, 37, 38, 42, 44, 45, 56—59, 62, 65—59, 62, 65—69, 70—76, 86, 88—90, 93, 94, 98—400; E: 2137, 40, 41, 43—45, 48—51, 54, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 78—81, 83, 84, 86, 87, 91), Rubinstein Magda (6356—58, 70, 72, 73, 89; E: 2154, 55, 60—63, 67, 68). Cl. X. Herăscu Gabriela (6308, 14, 30, 45, 46, 56, 57, 59, 60, 67, 68, 70, 73, 75, 89), Nanu Mihaela (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 44, 45, 56, 62, 66, 67, 70, 72, 73, 77, 86, 420).

Ș.m. 2, cl. X. Brânișteanu Dumitru (6316, 40, 38, 44, 45, 56, 59, 67, 70—74, 92).

Ș.m. 3, cl. IX. Năsturescu Constantin (6310, 12, 17, 25, 28, 30, 38, 56—60, 66—68, 70—76, 82, 88, 89, 93, 400, 20, 21, 23, 24, 27, 31, 36).

Șc. 8 ani nr. 10, cl. VIII. Budan Octavian (E: 2136, 38, 47, 51, 53, 64, 66, 67).

Șc. 8 ani nr. 17, cl. VI. Popescu Cristian (E: 2147, 48, 52, 53, 57—59, 61—64, 66, 68—71, 73, 79, 82).

PLOIEȘTI. Ș.m. 1, cl. VII. Dobrescu Laurențiu (E: 2138, 47, 48, 51, 64, 66, 68, 69), Iordache Sorin (E: 2136, 38, 46, 51, 53, 56—59, 61, 63, 64). Cl. VIII. Anghel Paul (E: 2137, 43, 44, 49, 51, 55, 60—63, 67, 68, 71, 74, 78—81, 83), Boaldă Nicolae (E: 2136, 39, 45, 46, 48, 54, 69, 83), Bretcan Sabina (6356, 58, 70—72, 74, 89; E: 2154, 55, 60, 67, 74, 75, 78, 81, 83), **Căsăndroiu Dănuț** (6308, 10, 12, 14, 16, 22, 28—30, 37, 44, 45, 56—58, 67, 70, 72, 73, 75, 89, 400; E: 2137, 40—42, 46, 47, 49, 54, 55, 58—63, 67), Dragomirescu Cezar (6356, 70, 72, 73; E: 2136, 38, 41, 43, 46, 48, 51—54, 57—64), Popescu Luciana (E: 2136, 39, 53—71, 82, 83), Tomescu Gabriel (E: 2143, 46—48, 51, 54, 61—63, 71, 80, 83), Toporan Ștefan (6328, 44, 56, 58, 89, 424; E: 2137, 43, 50, 54, 55, 60, 71, 74, 75, 83). Cl. IX. **Stănescu Dan** (6356—60, 62, 66—68, 70—76, 82, 86, 88—90, 93, 98—400, 05, 09, 14—16, 18, 20—22, 24, 27, 28, 31, 34, 36). Cl. X. (seral). Petrea Sorin (6310, 16, 17, 28, 30, 38, 45, 56, 58, 89, 400). Cl. XI. Dumitrescu Gabriel (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 33, 38, 45, 57, 66, 67, 71—73, 75, 77, 86, 89, 424), Mocanu Dan (6312, 14, 16, 20, 33, 38, 45, 56, 66, 67, 70, 72, 73, 75, 77, 86, 89), Moiescu Anca (6308, 14, 16, 20, 44, 45, 58, 59, 66, 67, 72, 75), Oproescu Gabriel (6308, 10—12, 14, 16, 17, 42, 45, 56—58), Turcanu Laurențiu (6055, 59, 71, 113, 31, 34, 42, 69, 71, 92, 97, 209, 12, 30, 43, 76, 89, 90, 310, 12, 14, 16—18, 40, 45, 56, 68, 70, 72—74, 86, 93, 409, 16, 20, 29), Silaev Silvia (6308, 10, 12, 14, 16, 17, 45, 56, 57, 70, 73)

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Rezolvînd problemele pregătiți și Olimpiada Matematică 1965.

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Se primesc lunar într-un plic soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorii pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate în cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problmei respective. *Solicităm probleme interesante, legate de practică.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.-B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcut îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Erată — La pagina 544 din nr. 12/1964, rîndul 6, după $\frac{3}{2}$ se va scrie semnul — (minus).

— La pag. 554 rîndul 20 în loc de $\sqrt{3}$ se va scrie $3\sqrt{3}$

— La pag. 556, problema 6655, primul rînd se va scrie:
Se consideră două drepte concurente Δ_1 și Δ_2 și un punct fix A.

— La problema 6659 în loc de $x \to 0$ se va scrie $x \to 2$.

CĂRȚI DIN BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

Gh. Mihoc :	Elemente de calculul probabilităților.
Gh. Țițeica :	Culegere de probleme de geometrie, ed. IV-a (revăzută și completată de *Gh. Simionescu*).
C. Drîmbă :	Elemente de mecanică cerească.
Gh. A. Chiței :	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
Ciucu și *Simboanu :*	Probleme de calculul probabilităților și statistica matematică.
O. Sacter :	Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente.
* * *	Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Piatra Neamț, 1961).
M. Ghermănescu :	Aplicații ale trigonometriei.
A. Haimovici :	Grupuri de transformări.
T. Roman :	Simetria.
L. I. Golovina și *I. M. Iaglom :*	Inducția în geometrie.
Constantin Ionescu-Bujor :	Elemente de transformări geometrice (partea a treia).
Edmond Nicolau :	Introducere în cibernetică.
* * *	Probleme actuale de matematici (conferințe ținute la cursurile de vară de la Săcele-Brașov 1962).
N. Mihăilă :	Introducere în programarea liniară.

În vederea stimulării elevilor clasei XI premiați la olimpiadele internaționale de matematică și olimpiadele interne (etapa finală), care devin studenți ai facultății de matematică-mecanică sau fizică de la Universități, conducerea Ministerului Învățămîntului a hotărît să li se acorde următoarele forme de sprijin material :

a) bursă în primul an de studii, indiferent de situația lor materială. În următorii ani de studii bursa să fie menținută în aceleași condiții dacă obțin media generală cel puțin 9,00.

b) la începutul primului an de studii să li se acorde cărți și manuale de specialitate în valoare de 500 lei.

c) în vacanțele anului I de studii să fie trimiși cu prioritate la odihnă în tuberele studențești (iarna sau vara la alegerea studentului) dacă rezultatele școlare sînt foarte bune.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată pentru anul 1965 (12 numere). Prețul este de 2 lei exemplarul (24 lei anual).

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Grafica Nouă" II — c. 11856

Index 41601

Lei 2

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI februarie 1965

2

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI, nr. 2 — februarie 1965

SUMARUL

	pag.
1. Probleme de maxim şi minim de E. Rusu . . .	49
2. Note matematice de I. Chiţescu, V. Leibovici şi C. Popescu	57
3. Caleidoscop matematic	62
4. Probleme rezolvate (6153, 6163, 6181, 6182, 6189, 6190, 6191, 6192, 6193, 6194, 6200, 6211, 6219, 6224, 6232, 6236, 6240, 6241, 6251, 6258, 6287, 6293). . . .	64
5. Chestiuni de examen (6710—6719)	82
6. Probleme propuse (6720—6749)	86
7. Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2265—2280)	91
8. Premiile Gazetei Matematice, seria B pe anul 1964 .	94
9. Rubrica rezolvitorilor de probleme	95

ANUL XVI. 2 FEBRUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Cristea I., asistent: *Dincă N.*, profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.* prof.; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.* profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI nr. 2 februarie 1965

PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

EUGEN RUSU

Legenda spune că Didona, fiica regelui din Tyr, a fugit ajungînd în locul care avea să devină datorită ei, celebra cetate a Cartaginei. A cerut pămînt. Localnicii, în derîdere, i-au făgăduit atît pămînt cît poate să acopere o piele de taur. Didona a tăiat pielea ca o fîșie foarte îngustă și deci foarte lungă și a înconjurat cu ea un loc destul de mare ca să clădească pe el o cetate.

Multe dreptunghiuri pot fi construite avînd un perimetru dat; dintre toate, aria cea mai mare o are pătratul.

Nu numai în tehnică, dar și în știința teoretică problemele de maxim și minim au o mare importanță.

Exemplu. *Fermat* enunță următorul principiu: O rază de lumină ca să ajungă dintr-un punct A în alt punct, B își alege drumul pe care timpul de parcurs este minim. Cînd mediul este omogen (sau vid) acest principiu se traduce într-un enunț banal: raza de lumină merge în linie dreaptă. Cînd însă, raza trece dintr-un mediu în care are o viteză în alt mediu în care are o altă viteză sau — și mai complicat — cînd străbate un mediu neomogen în care în fiecare punct viteza este alta, problema de a găsi traiectoria care satisface principiul timpului minim este mult mai grea. În toate cazurile studiate principiul a fost confirmat. Este interesant că avem un principiu atît de general, cu un enunț atît de simplu, pentru fenomene concrete foarte variate.

În școala medie se tratează unele probleme de maxim cu ajutorul derivatelor, în clasa a XI-a.

Vom expune metode cunoscute mai elementare pentru a rezolva astfel de probleme*. Ele pot fi utile absolventului de școală medie pentru că în analiza de clasa a XI-a se tratează numai mărimi care depind de o singură variabilă (cum ar fi: volumul sferei depinde de raza ei), pe cînd metodele elementare se aplică — în unele cazuri — și mărimilor care depind de mai multe variabile (cum ar fi: volumul paralelipipedului dreptunghic depinde de fiecare din cele trei dimensiuni ale lui). Rezolvarea completă în cazuri cît mai generale aparține analizei matematice de nivel superior; pînă să ajungă acolo, unii cititori pot fi interesați să

* Vezi și G.M.F.-B, 1956, nr. 5, pag. 245. Cîteva teoreme de maxime și minime de *I. I. Cristea.*

cunoască metode mai puțin generale, dar mai curînd accesibile. Ele sînt utile și în rezolvarea unor exerciții.

Produsul a două numere a căror sumă este dată. Numărul 20 poate fi desfăcut în multe moduri, într-o sumă de două numere mai mici: $1 + 19$; $2 + 18$; $5 + 15$; $5\frac{1}{2} + 14\frac{1}{2}$; $10 + 10$; $-1 + 21$ etc. Dacă înmulțim cele două numere a căror sumă este 20, obținem — pentru exemplele menționate — ca produse: 19; 36; 75; $79\frac{3}{4}$; 100. Dacă unul din termeni este negativ și produsul este negativ, deci ne vom mărgini la cazul cînd termenii sînt pozitivi. Ce observăm? Cu cît cei doi termeni sînt mai apropiați unul de altul, cu atît produsul lor are o valoare mai

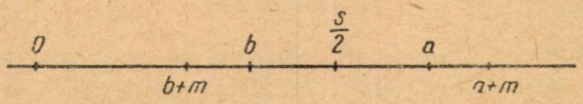


Fig. 1

mare; acest produs are valoarea cea mai mare posibilă cînd cele două numere sînt egale (în cazul nostru, $10 + 10 = 20$; $10 \cdot 10 = 100$).

Demonstrația generală este foarte simplă. Fie s suma dată și numerele a și b astfel încît $a + b = s$. Să admitem că a și b variază dar suma lor rămîne aceiași. Gîndim mai ușor lucrurile cu ajutorul unei figuri; să folosim reprezentarea numerelor pe axă (fig. 1).

Fie $a > b$. Punctele a, b sînt simetrice față de punctul $\frac{s}{2}$, căci $\frac{a+b}{2} = \frac{s}{2}$. Cînd a și b variază, dar $a + b = s$, punctele sau se apropie amîndouă sau se depărtează amîndouă de punctul $\frac{s}{2}$, cu cantități egale. Pe figură avem numerele $a + m$ și $b - m$ care au aceiași sumă, egală cu $a + b$. Facem produsul celor două perechi de valori, ca să vedem care este mai mare. Avem $(a + m)(b - m) = ab - m(a - b) - m^2$, relație care arată că atunci cînd numerele sînt mai depărtate unul de altul produsul lor $(a + m)(b - m)$ este mai mic decît în poziția inițială, cînd produsul era ab (din ab se scad cantități pozitive). Produsul va avea valoarea maximă cînd $a = b = \frac{s}{2}$ și va descrește treptat pe măsură ce a se depărtează spre dreapta, b spre stînga, cu cantități egale, de la această poziție.

Concluzie. Produsul ab crește cînd a și b se apropie unul de altul cu cantități egale astfel că suma $a + b$ rămîne aceiași și este maxim cînd a și b iau fiecare valoarea $\frac{a+b}{2}$.

A doua parte a concluziei o putem scrie sub forma unei inegalități: dacă $a \neq b$ atunci $ab < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$ sau $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, (1) unde suma celor doi factori din membru întîi sau doi este aceiași, căci

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = a + b.$$

Știm că dacă lucrăm numai cu numere pozitive, inegalitățile $A < B$; $A^2 < B^2$; $\sqrt{A} < \sqrt{B}$ etc. sînt echivalente între ele. Cînd A crește și A^2 crește, deci din $A < B$ rezultă $A^2 < B^2$ și reciproc.

Nu la fel se întîmplă în cazul cînd lucrăm și cu numere negative. Avem $A < B$ — de exemplu, $-2 < -1$ și $A^2 > B^2$, $(4 > 1)$.

Să presupunem că lucrăm numai cu numere pozitive. Luînd în ambii membri ai inegalității (1) rădăcina patrată obținem: dacă $a \neq b$,

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

ceea ce se exprimă în forma: *media geometrică a două numere pozitive distincte este mai mică decît media lor aritmetică.*

Dacă avem două numere egale a și a, media lor geometrică este $\sqrt{a \cdot a} = a$, iar media lor aritmetică $\frac{a+a}{2} = a$. Așa dar, a și b fiind pozitive,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

semnul egal fiind valabil numai în cazul cînd $a = b$.

2. *Suma pătratelor a două numere a căror sumă este dată.* Cu aceiași figură și notații (fig. 1) avem:

$$(a+m)^2 + (b-m)^2 = a^2 + b^2 + 2m^2 + 2m(a-b).$$

Așa dar, dacă numerele se depărtează unul de altul (suma lor rămînînd aceiași), atunci suma patratelor lor crește. Invers, dacă ele se apropie unul de altul, suma pătratelor lor scade și va fi minimă cînd numerele devin egale și deci egale, fiecare, cu $\frac{a+b}{2}$.

O teoremă analogă obținem dacă în loc de exponentul 2 scriem un exponent n oarecare. În adevăr,

$$(a+m)^n + (b-m)^n = a^n + b^n + C_n^1 \cdot m(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots$$

Toți termenii de forma $a^k - b^k$ fiind pozitivi, înseamnă că

$$(a+m)^n + (b-n)^n > a^n + b^n.$$

3. *Relații trigonometrice.* Să considerăm acum că a și b sînt două arce mai mici ca 180°, variabile, însă de sumă $s = a + b$ constantă.

Considerăm următoarele relații cunoscute:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \tag{1}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \tag{1'}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tag{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tag{2'}$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b} \tag{3'}$$

În toate aceste relații intervine suma $a + b$ care este prin ipoteză constantă și diferența $a - b$ care este variabilă, mai mică decît 180°. Ținînd seama că atunci cînd $a - b$ descrește de la 180° la 0°, $\cos(a - b)$ crește de la -1 la $+1$, găsim:

— Din (1) și (1'): dacă arcele a și b se apropie unul de altul (suma lor rămînînd aceiași) produsul $\cos a \cdot \cos b$ crește; el atinge valoarea maximă atunci cînd $a = b = \frac{a+b}{2}$. La fel pentru produsul $\sin a \sin b$

— Din (2) și (2'): aceleași concluzii pentru sumele $\sin a + \sin b$ și $\cos a + \cos b$.

— Din (3) și (3'): cînd a și b se apropie unul de altul, produsul $\cos a \cos b$ crește fracția $\frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$ adică $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$ scade și atinge valoarea *minimă* pentru $a = b$. La fel pentru $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b$.

4. Am găsit la punctul 1) că dacă suma $a + b = s$ este constantă produsul ab crește cînd a și b se apropie unul de altul și acest produs este maxim cînd $a = b = \frac{a+b}{2}$.

Vom arăta acum, că dacă n numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ variază astfel încît suma lor $a_1 + a_2 + \ldots a_n = s$ rămîne constantă, produsul lor $a_1 a_2 \ldots a_n$ este maxim atunci cînd numerele devin egale între ele, fiecare, egal cu $\frac{s}{n}$.

Să presupunem că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu sînt egale între ele (ca în fig. 2 pentru $n = 5$); atunci, unele sînt la dreapta lui $\frac{s}{n}$, altele la stînga lui $\frac{s}{n}$, putînd fi unele, chiar în $\frac{s}{n}$. În adevăr, dacă un exemplu,

ar fi toate la dreapta lui $\frac{s}{n}$ am avea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \ldots + \frac{s}{n} = s$; dacă ar fi toate la stînga lui $\frac{s}{n}$ suma lor ar fi mai mică decît s.

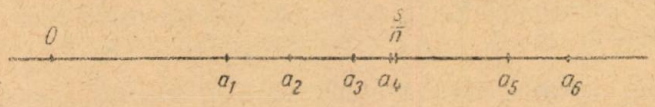


Fig. 2

Să considerăm două din aceste numere, unul la stînga, celălalt la dreapta lui $\frac{s}{n}$ de exemplu, în fig. 2 numerele a_3 și a_5. Le apropiem unul de altul cu cantități egale pînă ce unul din ele cel mai apropiat de $\frac{s}{n}$ ajunge în $\frac{s}{n}$, lăsînd pe loc celelalte $n-2$ numere. Prin schimbare, suma celor două numere și deci, nici suma celor n numere nu s-a schimbat; însă, produsul celor două numere și deci, produsul celor n numere a crescut. Cu noua poziție, procedăm la fel. Cît timp mai există un număr la stînga lui $\frac{s}{n}$ găsim cel puțin unul și la dreapta lui $\frac{s}{n}$, căci dacă nu am găsi suma ar fi mai mică decît s. Continuînd procedeul vom ajunge deci cu toate numerele în $\frac{s}{n}$; de fiecare dată produsul a crescut.

Așadar, oricare ar fi poziția în care nu toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt egale între ele, produsul $a_1 a_2 \ldots a_n$ este mai mic decît produsul

$$\frac{s}{n} \cdot \frac{s}{n} \cdots \frac{s}{n},$$

cu toate numerele în $\frac{s}{n}$.

Produsul $a_1 a_2 \ldots a_n$ este maxim cînd numerele sînt egale între ele și fiecare egal cu $\frac{s}{n}$; valoarea maximă a produsului este deci $\left(\frac{s}{n}\right)^n$.

Mai putem scrie concluzia sub forma:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \left(\frac{s}{n}\right)^n \text{ sau: } \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Media geometrică a n numere pozitive distincte este mai mică decît media lor aritmetică; numai cînd cele n numere sînt egale între ele media geometrică a lor este egală cu cea aritmetică.

Cu totul analog generalizăm propozițiile stabilite la punctele 2 și 3. Inegalitatea de mai sus,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

egalitate numai pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ poate fi interpretată și astfel:

Dacă numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ variază astfel încît produsul lor rămîne constant, $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = p = \text{constant}$, suma lor $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ia valoarea minimă atunci cînd $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt[n]{p}$ căci, pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, avem $s = n\sqrt[n]{p}$, iar cînd numerele a nu sînt toate egale avem $s > n\sqrt[n]{p}$.

În general, problemele de maxim și minim sînt legate de probleme de inegalități de forma $\leqslant$ sau $\geqslant$.

5. *Dacă* $x + y + z = s = \text{constant}$, produsul $x^m y^n z^p$, unde m, n, p sînt numere naturale date este maxim cînd

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{s}{m+n+p}.$$

Demonstrație. Produsul $x^m y^n z^p$ este maxim odată cu

$$\frac{x^m y^n z^p}{m^m n^n p^p}.$$

am împărțit cu o constantă pozitivă. Această fracție se scrie:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{z}{p}\right)^p =$$

$$= \underbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \ldots \frac{x}{m}}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{\frac{y}{n} \ldots \frac{y}{n}}_{n \text{ factori}} \cdot \underbrace{\frac{z}{p} \ldots \frac{z}{p}}_{p \text{ factori}}.$$

Avem deci un produs de $m + n + p$ factori. Suma lor:

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \ldots + \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \ldots + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} + \ldots + \frac{z}{p} =$$

$$= m \cdot \frac{x}{m} + n \cdot \frac{y}{n} + p \cdot \frac{z}{p} = x + y + z = s$$

este constantă. Deci, produsul este maxim cînd factorii sînt egali între ei, adică

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Analog, dacă în loc de x, y, z avem două sau patru sau n numere.

6. *Exemple și aplicații.* a). Dintre toate triunghiurile cu același perimetru triunghiul echilateral are aria maximă.

Într-adevăr,

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Suma factorilor $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$ este constantă. Produsul este maxim cînd factorii sînt egali.

b) Să se afle cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă dată.

Notînd cu x raza și cu y jumătatea înălțimii cilindrului căutat, cu R raza sferei date, cu V volumul cilindrului avem: $x^2+y^2=R^2$; $V=2\pi x^2 y$: $V=4\pi^2(x^2)^2\cdot y^2$. Maximul produsului $(x^2)^2\cdot(y^2)^1$ unde $x^2+y^2=$ = constant, deci și maximul lui V are loc atunci cînd

$$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{1}=\frac{R^2}{3} \text{ de unde } x=R\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=R\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

c) Considerăm problema 4869 (G.M.F.-B 9/1961 dată la olimpiada internațională 1961):

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare și S aria sa. Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$.

În ce caz este valabilă egalitatea?

Vom da mai multe soluții (expuse pe scurt) pentru a se vedea diferite moduri de aplicare a ideilor de mai sus.

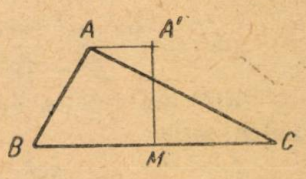


Fig. 3

Soluția 1. Ne gîndim să modificăm triunghiul păstrîndu-i aria: mișcăm pe A pe o paralelă la BC pînă ce triunghiul devine isoscel (fig. 3).

Avem: $b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2AM^2$; a a rămas aceiași, AM s-a micșorat deci, $a^2+b^2+c^2$ s-a micșorat. S a rămas același. Rămîne să demonstrăm pentru triunghiul isoscel. În acest caz, relația devine: $a^2+2b^2\geqslant 4\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$. Ridicînd la patrat (sînt cantități pozitive), ea se scrie: $(a^2-b^2)^2\geqslant 0$. Egalitatea are loc pentru $a=b$ (triunghi echilateral).

Soluția 2. Mișcăm pe A astfel încît să nu se schimbe AM (pe un cerc), deci nici suma $a^2+b^2+c^2$, pînă ce A ajunge pe mediatoare cînd S este maxim. Revine tot la un triunghi isoscel.

Soluția 3. Fie h înălțimea din A și a_1, a_2 segmentele determinate pe BC. În funcție de aceasta inegalitatea devine:

$$(a_1+a_2)^2+a_1^2+h^2+a_2^2+h^2\geqslant 4\sqrt{3}\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\cdot h$$

Înmulțim peste tot cu 3 și o scriem sub forma:

$$(a_1\sqrt{3}-h)^2+(a_2\sqrt{3}-h)^2+[(a_1+a_2)\sqrt{3}-2h]^2=0$$

Egalitatea are loc pentru $a_1\sqrt{3}=a_2\sqrt{3}=h$ (triunghi echilateral).

Soluția 4. Avem $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $S = \frac{1}{2} bc \sin A$. Inegalitatea devine:

$$2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos A \geqslant 2\sqrt{3}\, bc \sin A$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) \geqslant 0$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos(60° - A) \geqslant 0$$

Construind un triunghi cu laturile b, c și unghiul cuprins $(60° - A)$, sau $(A - 60°)$, în membrul I avem pătratul laturii a treia, deci o cantitate pozitivă. Egalitatea are loc cînd $b = c$ și $60° - A = 0$, triunghi echilateral.

Soluția 5. Dintre toate triunghiurile cu același perimetru, S este maxim pentru triunghiul echilateral și $a^2 + b^2 + c^2$ este minim pentru triunghiul echilateral. Problema revine la verificarea egalității în cazul triunghiului echilateral.

Soluția 6. Avem $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot DC$; $DC = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2a}$;

$$h^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{b^2 - 4a^2}; \quad 4S^2 = a^2 h^2 = a^2 b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4}.$$

Ridicînd relația dată la patrat și folosind expresia lui S ea se va putea scrie:

$$(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2) \geqslant 0.$$

Soluția 7. Adunînd relația $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ cu analoagele ei obținem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C,$$

Insă,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Inegalitatea devine $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geqslant \sqrt{3}$.

Stabilirea acestei inegalități, egalitate pentru $A = B = C = 60°$, poate fi privită ca o problemă nouă. Putem sau să stabilim echivalența ei cu problema dată și să o reducem astfel la una din soluțiile anterioare sau să căutăm o soluție independentă de primele. O putem enunța într-o formă mai generală:

Dacă $A + B + C = k$ (constant nu neapărat 180°) suma cotangentelor este minimă pentru $A = B = C$.

Stabilim întîi propoziția pentru cazul a două unghiuri $A = B = k$ (scriind $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}$) și căutăm apoi s-a extindem pentru 3 sau mai multe unghiuri.

Soluția 8. Considerăm triunghiul dat prin latura a și unghiuri. Folosind $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ relația devine:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

relație care de asemeni poate fi privită ca o problemă independentă și care e valabilă în condiții mai generale.

NOTE MATEMATICE

Cîteva proprietăți proiective ale figurilor plane

I. 1. *Se dau patrulaterele omologice*[1]) $A\alpha B\beta$ *și* $A'\alpha'B'\beta'$ *înscrie într-o conică*[2]). *Centrul de omologie este* O. *Notăm:* $A\alpha \cap B\beta = M$; $A'\alpha' \cap B'\beta' = M'$. *Să arătăm că punctele* M, O, M' *sînt colineare (fig. 1).*

Considerăm hexagonul $A\alpha\alpha' B\beta\beta'$ care este înscris în conica dată. Notăm: $A\alpha = l_1$; $\alpha\alpha' = l_2$; $\alpha' B = l_3$; $B\beta = l_4$; $\beta\beta' = l_5$; $\beta' A = l_6$. Avem: $l_1 \cap l_4 = M$; $l_2 \cap l_5 = O$. Notăm: $l_3 \cap l_6 = M_1$.

Conform teoremei lui *Pascal* punctele M, O, M_1 sînt colineare (1).

Considerăm hexagonul $A'\alpha'\alpha B'\beta'\beta$ înscris în aceeași conică. Notăm: $A'\alpha' = l'_1$; $\alpha'\alpha = l'_2$; $\alpha B' = l'_3$; $B'\beta' = l'_4$; $\beta'\beta = l'_5$; $\beta A' = l'_6$. Avem: $l'_1 \cap l'_4 = M'$; $l'_2 \cap l'_5 = O$. Notăm: $l'_3 \cap l'_6 = M'_1$. Punctele M', O, M'_1 sînt colineare (2).

Considerăm hexagonul $A\alpha B'B\beta A'$ înscris în aceeași conică. Notăm: $A\alpha = L_1$; $\alpha B' = L_2$; $B'B = L_3$; $B\beta = L_4$; $\beta A' = L_5$: $A'A = L_6$. Avem: $L_1 \cap L_4 = M$; $L_2 \cap L_5 = M_1'$; $L_3 \cap L_6 = O$. Punctele M, O, M'_1 sînt colineare (3). Din (1), (2), (3) rezultă că punctele M, O, M' sînt colineare, ceea ce trebuia demonstrat.

2. *Reciproca.* Se dau punctele A, α, B, β și A', α', B', β' așezate pe o conică. Se notează: $A\alpha \cap B\beta = M$; $A'\alpha' \cap B'\beta' = M'$. Dacă triunghiurile $A\alpha B$ și $A'\alpha'B'$ admit un centru de omologie O și punctele M, O, M' sînt colineare, atunci și punctele β, O, β' sînt colineare.

Să notăm conica cu Γ. Fie $\beta_1 = \beta O \cap \Gamma$. Mai notăm: $A'\alpha' \cap B'\beta_1 = m'$ Conform teoremei directe, punctele M, O, m' sînt colineare.

Dar, dreptele MOM' și MOm' sînt confundate, avînd punctele distincte comune (se exclude cazul $M \equiv O$, adică $\beta \equiv \beta'$) deci punctele M' și m' aparțin dreptei $MOM' = \Delta$. Urmează că Δ intersectează pe $A'\alpha'$ în două puncte distincte.

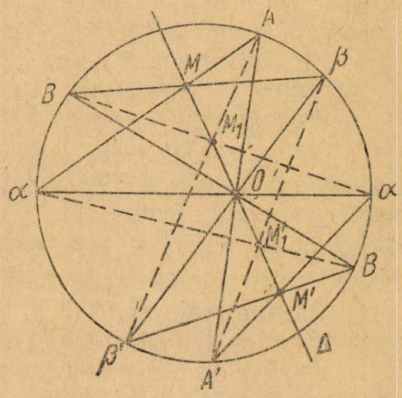


Fig. 1

[1]) Elemente de transformări geometrice de C. **Ionescu-Bujor.**
[2]) În figură conica este un cerc, proprietățile proiective se păstrează.

Această concluzie este absurdă. Deducem că punctele M' și m' se confundă, deci și $\beta' \equiv \beta_1$ adică punctele β, O, β' sînt colineare, ceea ce trebuia demonstrat.

II. 1. *Fie triunghiurile omologice ABC și $A'B'C'$ înscrise într-o conică Γ. Se consideră un punct curent M al conicei. Se notează $MA \cap B'C' = \alpha$; $MB \cap C'A' = \beta$; $MC \cap A'B' = \gamma$. Să arătăm că punctele α, β, γ și centrul de omologie sînt colineare*[3]).

Urmăm un procedeu analog. Fie O centrul de omologie. Considerăm hexagonul $BMCC'A'B'$ înscris în Γ.

Notăm: $BM = l_1$; $MC = l_2$; $CC' = l_3$; $C'A' = l_4$; $A'B' = l_5$; $B'B = l_6$ și avem: $l_1 \cap l_4 = \beta$; $l_2 \cap l_5 = \gamma$; $l_3 \cap l_6 = O$.

Conform teoremei lui *Pascal* punctele β, γ, O sînt colineare (4).

Analog, considerînd hexagonul $CMAA'B'C'$ obținem punctele γ, α, O colineare (5); considerînd hexagonul $AMBB'C'A'$ obținem punctele α, β, O colineare (6).

Oricare din propozițiile (4), (5), (6) luate cîte două, ne conduc la concluzia că punctele α, β, γ, O sînt colineare, ceea ce trebuia demonstrat.

Consecință. Unind M cu A' și notînd $MA' \cap BC = \alpha''$ etc. rezultă că dreptele $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha''\beta''\gamma''$ sînt concurente în O.

2. *Reciproca.* Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt omologice și înscrise în aceeași conică. Se consielră dreapta Δ care trece prin centrul de omologie O și se notează: $\Delta \cap B'C' = \alpha$; $\Delta \cap C'A' = \beta$; $\Delta \cap A'B' = \gamma$ și $\Delta \cap BC = \alpha'$; $\Delta \cap CA = \beta'$; $\Delta \cap AB = \gamma'$. Dreptele $A\alpha$, $B\beta$ și $C\gamma$ sînt concurente într-un punct M al conicei, ca și dreptele $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ concurente în alt punct M' al conicei.

Demonstrația se face prin reducere la absurd. Să notăm conica cu Γ și $A\alpha \cap \Gamma = M$. Unim M cu B și C și notăm: $MB \cap C'A' = \beta_1$; $MC \cap A'B' = \gamma_1$. Conform teoremei directe, punctele α, O, β_1, γ_1 sînt colineare.

Dar dreptele Δ și $\alpha O \beta_1 \gamma_1$ sînt confundate. Dacă punctele β și β_1 sau γ și γ_1 ar fi distincte, atunci am ajunge la rezultatul absurd că Δ intersectează pe $A'C'$ sau pe $A'B'$ în două puncte distincte. Rezultă că în mod necesar avem: $\beta \equiv \beta_1$ și $\gamma \equiv \gamma_1$.

De aici urmează ceea ce trebuie demonstrat: dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sînt concurente în punctul M al conicei.

Analog pentru punctul M'.

III. 1. Considerăm aceleași triunghiuri omologice ABC și $A'B'C'$ înscrise într-o conică. Fie punctele M și M' pe conică, astfel că M, M' și O sînt colineare. Notăm $MA \cap B'C' = \alpha$ și $MA' \cap BC = \alpha'$ etc. Punctele α, β, γ, O, α', β', γ' sînt colineare (fig. 2).

Pentru demonstrație folosim proprietatea de la I.1.

Patrulaterele $MAB'C'$ și $M'A'BC$ fiind omologice și înscrise în conică rezultă că $\alpha = MA \cap B'C'$, $\alpha' = M'A' \cap BC$ și O sînt colineare.

Analog se demonstrează că punctele β, O, β' și γ, O, γ' sînt colineare. Dar, α, β, γ, O și α', β', γ', O fiind colineare rezultă că toate cele șapte puncte sînt colineare, ceea ce trebuia demonstrat.

---

[3]) Această proprietate este cunoscută — Teorema lui *Aubert*.

2. *Reciproca.* Ne aflăm în condițiile de la II.2. Punctele M, O, M' sînt colineare (fig. 2). Ne folosim de proprietatea de la I.2. Triunghiurile $AB'C'$ și $A'BC$ sînt omologice și înscrise în conică. Mai știm că $\alpha = MA \cap B'C'$, $\alpha' = MA' \cap BC$, O sînt colineare. Rezultă că M, O, M' sînt colineare, ceea ce trebuia demonstrat.

In toate cazurile punctul O nu trebuie să aparțină conicei.

La II. 1). Dacă M este luat astfel încît MA este paralelă cu $B'C'$, atunci punctul α este aruncat la infinit și Δ devine paralelă cu $B'C'$.

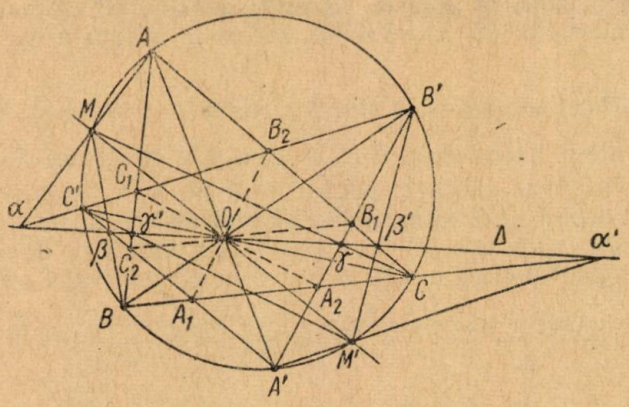


Fig. 2

Particularizări. 1) Se știe că se pot considera drept conice degenerate : două drepte concurente (hiperbolă) sau două drepte paralele (parabolă). De aceea proprietățile demonstrate se extind și pentru cazul cînd Γ este astfel reprezentată.

2) Să notăm $A'C' \cap BC = A_1$ etc., ca pe figură.

Se consideră poziția particulară a lui M, astfel ca $M \equiv A$. In acest caz, $MA \equiv A$, $MB \equiv AB$ și $MC \equiv AC$. Pe figură: $AB \cap A'C' = C_2$; $AC \cap A'B' = B_1$. Conform proprietății de la II. 1) punctele B_1, O, C_2 sînt colineare ca și C_1, O, A_2 și A_1, O, B_2. Rezultă că hexagonul $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ prezintă proprietatea remarcabilă că unindu-i vîrfurile din 3 în 3 se obțin 3 drepte concurente în O.

3) Vom demonstra că *problema 6293* din G.M.-B 4/1964 este un caz particular al proprietății de la II.2.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că triunghiurile omologice ABC și $A'B'C'$ din problemă sînt înscrise în aceeași conică. In acest caz, dreptele AA'', BB'', CC'' sînt concurente într-un punct M al conicei.

Intr-adevăr, o conică fiind determinată în general prin 5 puncte necolineare rezultă că punctele A, B, C sînt pe o conică. Considerînd pe O ca centru de simetrie al acestei conice, rezultă că și A', B', C' sînt de conică.

Observație. Fiind o conică cu centru de simetrie, ea nu poate fi decît elipsă sau hiperbolă. De altfel, în această problemă există paralelograme înscrise în conică, dar s-a demonstrat (problema 5320) că un paralelogram nu poate fi înscris într-o parabolă.

Chițescu Ion, cl. XI, ș.n. 10 București

Asupra problemelor 5696, 6200

Dacă $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ *sînt unghiurile unui poligon convex şi dacă* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *atunci:*

$$\sin^\alpha A_1 + \sin^\alpha A_2 + \ldots + \sin^\alpha A_n \leqslant n \sin^\alpha \frac{360^\circ}{n}$$

Pentru a demonstra aceasta, să arătăm mai întîi că $f(x) = \sin^\alpha x$ este concavă pe intervalul $(0, \pi)$. Aceasta revine la a demonstra că $f''(x) \leqslant 0$, sau că:

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1) \sin^{\alpha-2} x \cos^2 x - \alpha \sin^\alpha x < 0,$$

ceea ce e evident ţinînd seama că $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ şi că $x \in (0, \pi)$.

Aşadar, $f(x)$ este concavă, pentru $x \in (0, \pi)$. Se ştie (v. G.M.F. — B 9/1959), articolul „Folosirea inducţiei matematice la demonstrarea unor inegalităţi" sau „Curs special de algebră elementară de I. Novoselov (pag. 228) că pentru orice funcţie concavă pe un interval I avem:

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n} \leqslant \varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \text{ unde}$$

$x_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Egalitatea are loc numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ Funcţia $f(x) = \sin^\alpha x$ $(\alpha \in [0,1])$ *este concavă pe intervalul* $(0, \pi)$ iar dacă A_i este unghiul unui poligon convex, vom avea $0 < A_i < 180^\circ$ şi deci: $A_i \in (0, \pi)$. Putem scrie deci:

$$\frac{\sin^\alpha A_1 + \sin^\alpha A_2 + \ldots + \sin^\alpha A_n}{n} \leqslant \sin^\alpha \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}$$

şi ţinînd seama că $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$ rezultă:

$$\sin^\alpha A_1 + \sin^\alpha A_2 + \ldots + \sin^\alpha A_n \leqslant n \sin^\alpha \frac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n} =$$

$$= n \sin^\alpha \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = n \sin^\alpha \frac{360^\circ}{n}.$$

Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ se obţine problema 6200, iar dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $n = 3$ se obţine problema 5696.

Leibovici Valeriu, elev, cl. XI şc. m. 34 Bucureşti

În legătură cu proprietatea optică a conicelor

Dăm o demonstraţie analitică următoarelor proprietăţi bine cunoscute.

a) *Normala într-un punct al unei elipse bisectează unghiul razelor vectoare.* Fie punctul $M(a \cos \varphi ; b \sin \varphi)$ *situat pe elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu focarele $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$ cu $c^2 = a^2 - b^2$.

Avem

$$FM = \sqrt{(a\cos\varphi - c)^2 + b^2\sin^2\varphi} = \sqrt{(a - c\cos\varphi)^2} =$$

$$= |\, a - c\cos\varphi \,| = a - c\cos\varphi.$$

Dar $F'M + FM = 2a$, deci $F'M = a + c\cos\varphi$.

Normala în M la elipsă este: $a\dfrac{x}{\cos\varphi} - b\dfrac{y}{\sin\varphi} - c^2 = 0$ care taie segmentul $F'F$ în $I\left(\dfrac{c^2\cos\varphi}{a}\,;\,0\right)$ și $\left|\dfrac{c^2\cos\varphi}{a}\right| < c$, adică I este interior segmentului $F'F$. Avem:

$$\frac{F'I}{IF} = \frac{\dfrac{c^2\cos\varphi}{a} + c}{c - \dfrac{c^2\cos\varphi}{a}} = \frac{c\cos\varphi + a}{a - c\cos\varphi} = \frac{F'M}{FM},$$

adică I este piciorul bisectoarei interioare.

b) *Tangenta într-un punct al unei iperbole bisectează unghiul razelor vectoare.* Fie punctul M ($a\sec\varphi\,;\,b\,\mathrm{tg}\,\varphi$) *situat pe iperbola* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu focarele $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ cu $c^2 = a^2 + b^2$.

Ecuația tangentei la iperbolă în M este $x\dfrac{\sec\varphi}{a} - y\dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi}{b} - 1 = 0$, care taie pe $F'F$ în $I\left(\dfrac{a}{\sec\varphi}, 0\right)$. Avem

$FM = \sqrt{(a\sec\varphi - c)^2 + b^2\,\mathrm{tg}^2\varphi} = \sqrt{(c\sec\varphi - a)^2} = |\, c\sec\varphi - a\,|$; atunci $F'M = |\, c\sec\varphi + a\,|$. Pe de altă parte $x = \left|\dfrac{a}{\sec\varphi}\right| < c$, adică I se află între F și F'. Avem și $\dfrac{F'I}{IF} = \dfrac{\dfrac{a}{\sec\varphi} + c}{c - \dfrac{a}{\sec\varphi}} = \dfrac{|\, c\sec\varphi + a\,|}{|\, c\sec\varphi - a\,|} = \dfrac{F'M}{FM}$,

adică I este piciorul bisectoarei unghiului razelor vectoare.

c) *Tangenta într-un punct al parabolei este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela dusă prin acest punct la axa parabolei, îndreptată înspre directoare.*

Fie $M\left(\dfrac{p}{2m^2}, \dfrac{p}{m}\right)$ un punct al parabolei $y^2 = 2px$, m fiind panta tangentei în M. Dacă φ este unghiul format de tangentă cu paralela din M la axa parabolei avem $m = \mathrm{tg}\,\varphi$. Pe de altă parte coeficientul unghiular

al razei vectoare FM este:

$$m_{FM} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{p}{m}}{\frac{p}{2m^2} - \frac{p}{2}} = \frac{2m}{1-m^2} = \operatorname{tg}^2\varphi.$$

Rezultă $\beta = 2\varphi$, adică proprietatea enunțată.

Corneliu Popescu, profesor București

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Identități interesante

1. Se verifică ușor că

$$(3x^{2p} - 2x^p - 1)^2 + (4x^{2p} + 4x^p)^2 \equiv (5x^{2p} + 2x^p + 1)^2,$$

de unde rezultă că dînd lui x și p valori din șirul numerelor naturale cu $x > 1$, obținem

$$b' = 3x^{2p} - 2x^p - 1,\ c' = 4x^{2p} + 4x^p \text{ și } a' = 5x^{2p} + 2x^p + 1$$

care sînt laturile unui triunghi dreptunghic în numere întregi.

Ceea ce îl deosebește pe acesta de acel mai general cu laturile

$$b = m^2 - n^2,\quad c = 2mn,\quad a = m^2 + n^2$$

este faptul că putem da lui p valori suficient de mari pentru care triunghiul cu laturile a', b', c' să fie „aproape asemenea" cu triunghiul ale cărui laturi sînt 3; 4; 5.

Într-adevăr avem:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{b'}{c'} = \lim_{p\to\infty} \frac{3x^{2p} - 2x^p - 1}{4x^{2p} + 4x^p} = \frac{3}{4}.$$

2. Identitatea

$$\left(x^8 - 4x^7 + 8x^6 - 10x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(x^8 + 4x^7 + 8x^6 + 10x^5 + 8x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \equiv x^{16} + \frac{17}{2}x^8 + \frac{1}{16},$$

ne oferă un exemplu de două polinoame fiecare avînd cîte 9 termeni și al căror produs nu are decît 3 termeni.

3. Din existența identității

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}$$

tragem concluzia că există expresii numerice care se pot „simplifica" ştergînd doar exponentul comun care se întîlneşte la numărător şi la numitorul fracţiei de simplificat:

De exemplu avem:

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}.$$

4. Identitatea

$$\frac{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}$$

unde m este un număr raţional pozitiv, arată că uneori „simplificarea nepermisă a simbolului lg" poate da un rezultat corect. De exemplu, avem:

$$\frac{\lg(9/4)}{\lg(27/8)}=\frac{9/4}{27/8}.$$

5. Identitatea

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$$

ne conduce la o serie de egalităţi curioase, cum sînt:

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}};\quad \sqrt[4]{5\frac{5}{624}}=5\sqrt[4]{\frac{5}{624}};\quad \sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$$

ş.a.m.d.

6. Se poate lesne verifica că prin suprimarea simbolului „sin" din identitatea trigonometrică

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

se obţine tot o identitate

$$\alpha+2\alpha+3\alpha+\ldots+n\alpha=\frac{\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\frac{n}{2}\alpha}{\frac{\alpha}{2}}$$

7. Se demonstrează lesne egalitatea:

$$[3(10^m+10^{m-1}+\ldots+10)n+1]^2\equiv n^2(10^{2m+1}+10^{2m}+\ldots+10^{m+1})+$$
$$+(6n-n^2)(10^m+10^{m-1}+\ldots+10+1)+1.$$

Această identitate ne conduce la o serie de egalități numerice interesante.

Astfel pentru $n = 1$ și $m = 1 ; 2 ; 3 ; 4 \ldots$ obținem :

$34^2 = 1156 ; \; 334^2 = 111556 ; \; 3334^2 = 11115556 \ldots$

Pentru $n = 2$ și $m = 1 ; 2 ; 3 ; 4 \ldots$, avem

$67^2 = 4489 ; \; 667^2 = 444889 ; \; 6667^2 = 44448889, \ldots$

(prelucrare după „Jocuri și probleme distractive de matematică" de R. P. Domoriad de către O.S.).

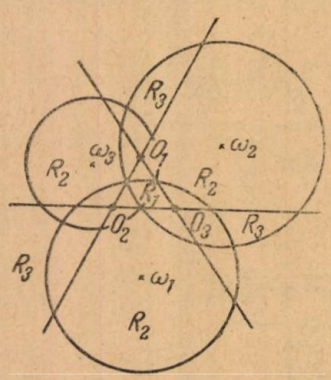
PROBLEME REZOLVATE

Problema 6153

Se dau în plan trei cercuri secante două cîte două, astfel încît centrul de omotetie inversă O_i $(i = 1, 2, 3)$ a oricare două dintre ele să se afle în exteriorul celui de-al treilea. Considerăm cele șapte regiuni în care laturile triunghiului $O_1O_2O_3$ împart planul. Fie R_1 regiunea interiorului triunghiului, R_2 reuniunea regiunilor unde se află cercurile exînscrise triunghiului și R_3 reuniunea celorlalte trei regiuni. Să se arate că dacă A, B, C sînt respectiv sumele arcelor de cerc situate în R_1, R_2, R_3 măsurate în radiani, atunci $A+B-C=2\pi$.

Tudor Zamfirescu, student, București

Soluția autorului — Notăm ω_1, ω_2, ω_3 cercurile date, O_1, O_2, O_3 fiind centrele de omotetie inversă ale perechilor de cercuri ω_2, ω_3 ; ω_3, ω_1 ; ω_1, ω_2 ; notăm cu a^i $(i = 1, 2, 3)$ arcul din cercul ω_i aflat în R_1, cu b^i_j $(i, j = 1, 2, 3)$ arcul din cercul ω_i aflat în regiunea din R_2 opusă lui O_j și cu c^i_j $(i, j = 1, 2, 3)$ arcul din cercul ω_i aflat în regiunea R_3 alăturată lui O_j.



Știind că, date fiind două cercuri, suma arcelor aflate în fiecare parte a unei drepte arbitrare ce trece prin centrul lor de omotetie inversă este de 360° putem scrie, relativ la cercurile ω_1, ω_2, ω_3 și dreptele O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 următoarele relații :

$$b^1_1 + c^1_2 + c^1_3 + b^2_1 + b^2_2 + c^2_3 = c^1_1 + b^1_2 + b^1_3 + a^1 + c^2_1 + b^2_2 + b^2_3 + a^2$$

$$b^1_1 + c^1_2 + c^1_3 + b^3_1 + c^3_2 + c^3_3 = c^1_1 + b^1_2 + b^1_3 + a^1 + c^3_1 + b^3_2 + b^3_3 + a^3$$

$$b^2_2 + c^2_3 + c^2_1 + b^3_2 + c^3_3 + c^3_1 = c^2_2 + c^2_3 + c^2_1 + a^2 + c^3_2 + b^3_3 + b^3_1 + a^3$$

$$b_2^2 + c_3^2 + c_1^2 + b_2^1 + c_3^1 + c_1^1 = c_2^2 + b_3^2 + b_1^2 + a^2 + c_2^1 + b_3^1 + b_1^1 + a^1$$
$$b_3^3 + c_1^3 + c_2^3 + b_3^1 + c_1^1 + c_2^1 = c_3^3 + b_1^3 + b_2^3 + a^3 + c_3^1 + b_1^1 + b_2^1 + a^1$$
$$b_3^3 + c_1^3 + c_2^3 + b_3^2 + c_1^2 + c_2^2 = c_3^3 + b_1^3 + b_2^3 + a^3 + c_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + a^2$$

Adunînd aceste șase relații și reducînd termenii asemenea găsim:

$$2c_2^1 + 2c_3^1 + 2c_1^2 + 2c_3^2 + 2c_1^3 + 2c_2^3 =$$
$$= 2b_2^1 + 2b_3^1 + 2b_1^2 + 2b_3^2 + 2b_1^3 + 2b_2^3 + 4a^1 + 4a^2 + 4a^3$$

sau:

$$C - c_1^1 - c_2^2 - c_3^3 = B - b_1^1 - b_2^2 - b_3^3 + 2A. \qquad (1)$$

Putem scrie de asemenea:

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 = \frac{b_2^2 - a^2}{2}; \quad \sphericalangle O_2O_3O_1 = \frac{b_3^3 - a^3}{2}; \quad \sphericalangle O_3O_1O_2 = \frac{b_1^1 - a^1}{2} \qquad (2)$$

Adunînd avem:

$$b_1^1 - a^1 + b_2^2 - a^2 + b_3^3 - a^3 = 2\pi \qquad (2')$$

căci:

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 + \sphericalangle O_2O_3O_1 + \sphericalangle O_3O_1O_2 = \pi$$

De asemenea, $c_1^1 = c_2^2 = c_3^3 = 0.$ (3)

Relațiile (2) și (3) au loc numai în cazul unei așezări a celor trei cercuri ca cea din enunț, dar cele șase relații din care se deduce (1) au loc oricum ar fi așezate ω_1, ω_2 și ω_3. Din (2') rezultă:

$$-b_1^1 - b_2^2 - b_3^3 = -A - 2\pi. \qquad (2'')$$

Introducînd pe (3) și (2'') în (1) găsim $C = B - A - 2\pi + 2A$ sau

$$A + B - C = 2\pi.$$

Problema 6163

Să se afle numărul 2xy977z știind că se divide prin 792.

Alexandru Levin, Tallin U.R.S.S.

Soluție dată de *Popa Eugen*, elev Iași. — Descompunem pe 792 în factori primi: $792 = 2^3.3^2.11$. Pentru ca un număr să se dividă prin 2^3 trebuie ca numărul format de ultimele trei cifre să se dividă prin 2^3, deci $77z = m8$, de unde $z = 6$.

Pentru ca un număr să se dividă prin 3^2 trebuie ca suma cifrelor sale să se dividă prin 3^2, deci $2 + x + y + 9 + 7 + 7 + 6 = m9$, de unde $x + y = m9 - 4$. Deoarece x și y sînt cifre, nu putem avea decît $x + y = 5$ sau $x + y = 14$.

Pentru ca un număr să se dividă prin 11 trebuie ca diferența dintre suma cifrelor de rang par și cele de rang impar să se dividă prin 11. Deci: $2 + y + 7 + 6 - x - 9 - 7 = \mathfrak{M}11$, de unde $y - x = \mathfrak{M}11 + 1$. Deoarece x și y

sînt cifre nu putem avea decît $y-x=1$. Pentru a avea simultan $x+y=5$ și $y-x=1$ sau $x+y=14$ și $y-x=1$ trebuie ca: $x=2$ și $y=3$ sau $=6\frac{1}{2}$ și $y=7\frac{1}{2}$, x și y fiind cifre nu satisface decît prima pereche, deci, numărul căutat este: 2239776.

Ca verificare: $2239776=792.2828$.

Problema 6181

Să se arate că expresia:

$$E=(2^{8n+4}-3^{4n+2})(7^{2n+3}+2^{4n+7}+2^{4n+6}+2^{4n+2})$$

este divizibilă cu 3773, n fiind un număr natural.

Acu Dumitru, elev Năsăud

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu. — Numărul 3773 se mai poate scrie $3773=7^3\cdot 11$. Prima paranteză se transformă astfel:

$$2^{8n+4}-3^{4n+2}=2^{4(2n+1)}-3^{2(2n+1)}=16^{2n+1}-9^{2n+1}=\mathfrak{M}7.$$

In paranteza a doua avem:

$$7^{2n+3}+2^{4n+7}+2^{4n+4}+2^{4n+2}=7^2\cdot 7^{2n+1}+2^{4n+2}\cdot$$
$$\cdot(2^5+2^4+1)=7^2\cdot 7^{2n+1}+2^{4n+2}(32+16+1)=$$
$$=7^2\cdot 7^{2n+1}+7^2\cdot 2^{4n+2}=7^2(7^{2n+1}+2^{4n+2})=$$
$$=7^2[7^{2n+1}+2^{2(2n+1)}]=7^2(7^{2n+1}+4^{2n+1})=$$
$$=7^2(7+4)(7^{2n}-7^{2n-1}\cdot 4+\ldots+4^{2n})=\mathfrak{M}7^2\cdot 11$$

Deci $E=\mathfrak{M}7\cdot\mathfrak{M}7^2\cdot 11$.

Problema 6182

Se consideră două cercuri O_1 și O_2 de raze R și r, tangente exterior în T. O dreaptă variabilă ce trece prin T taie cele două cercuri în A și B. Perpendiculara din O_1 pe AB și paralela din B la linia centrelor se întîlnesc într-un punct P; iar perpendiculara din O_2 pe AB și paralela din A la linia centrelor se întîlnesc în Q. Se cer locurile geometrice descrise de P și Q.

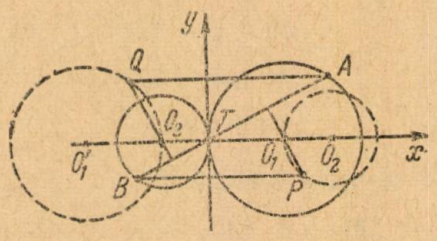
C. Săndulache, Negrești

Soluție dată de *Boicescu Vlad*, elev, Craiova. — Luînd linia centrelor și tangenta comună ca axe, ecuațiile celor două cercuri sînt:

$$(O_1)\quad (x-R)^2+y^2-R^2=0 \quad \text{sau:}\quad x^2+y^2-2Rx=0$$
$$(O_2)\quad (x+r)^2+y^2-r^2=0 \quad \text{sau:}\quad x^2+y^2+2rx=0.$$

Fie $y=\alpha x$ ecuația dreptei ATB. Intersectînd-o cu O_1 și O_2 obținem punctele $A\left(\frac{2R}{\alpha^2+1}, \frac{2R\alpha}{\alpha^2+1}\right)$ și $B\left(-\frac{2r}{\alpha^2+1}, -\frac{2r\alpha}{\alpha^2+1}\right)$.

Ecuațiile celor două perpendiculare pe AB sînt: $y=-\frac{1}{\alpha}(x-R)$ și $y=-\frac{1}{\alpha}(x+r)$. Ecuația locului geometric al punctului P, rezultă din: $y=-\frac{1}{\alpha}(x-R)$ și $y=-\frac{2r\alpha}{\alpha^2+1}$.



Scriind ecuația a doua sub forma $\alpha^2 y+y+2r\alpha=0$ și introducînd în ea valoarea $\alpha=\frac{x-R}{y}$ scoasă din prima, obținem succesiv:

$$\frac{(x-R)^2}{y}+y\,\frac{2r(y-R)}{y}=0;\ (x-R)^2+y^2-2r(x-R)=0$$

$$x^2+y^2-2(R+r)x+R^2+2Rr=0;\ [x-(R+r)]^2+y^2-r^2=0$$

Rezultă că punctul P descrie un cerc cu centrul $O_2'\,[(R+r), 0]$, avînd raza egală cu r. In mod analog ecuația locului geometric al punctului Q rezultă din: $y=-\frac{1}{\alpha}(x+r)$ și $y=\frac{2R\alpha}{\alpha^2+1}$. Prin calcule similare se obține locul geometric al lui Q, cercul $[x+(R+r)]^2+y^2-R^2=0$ avînd centrul $O_1'\,[-(R+r), 0]$ și raza R.

Problema 6189

Un participant la Pronosport folosește două buletine combinate. Inițial, pe primul buletin joacă simple, duble și triple, iar pe al doilea buletin numai simple și duble, depunînd astfel 124 variante. Dacă dublele de pe primul buletin le trece pe al doilea și invers, atunci el depune 436 variante. Cînd triplele de pe primul buletin le trece în locul dublelor de pe al doilea și invers, depune numai 91 variante. Cîte duble și triple a folosit inițial participantul pe primul buletin și cîte duble pe al doilea buletin?

V. V. Pravăț. Iași

Soluția autorului. — Se știe că depunînd pe un buletin combinat spre exemplu, 5 simple, 3 duble și 4 triple, numărul variantelor obținute este: $1^5\cdot 2^3\cdot 3^4=648$.

Notăm cu x și y numărul dublelor, respectiv triplelor de pe primul buletin, iar cu z numărul dublelor de pe al doilea buletin jucate inițial de participant. Ținînd cont de datele problemei obținem sistemul:

$$2^x \cdot 3^y + 2^z = 124$$
$$3^y \cdot 2^z + 2^x = 436$$
$$2^z \cdot 2^x + 3^y = 91$$

Pentru rezolvarea acestui sistem vom pune: $2^x = a$, $3^y = b$ și $2^z = c$ Sistemul devine:

$$ab + c = 124$$
$$bc + a = 436$$
$$ca + b = 91$$

Acest sistem trece în sistemul echivalent:

$$b = \frac{124 - c}{a} = \frac{436 - a}{c} = 91 - ac.$$

Din al doilea raport și din ultimul obținem:

$$91a - a^2c = 124 - c. \qquad (1)$$

Din al treilea raport și din ultimul obținem:

$$91c - ac^2 = 436 - a. \qquad (2)$$

Din relația (1) rezultă: $c = \frac{124 - 91a}{1 - a^2}$. Înlocuind această valoare a lui c în relația (2) se obține:

$$91\frac{124 - 91a}{1 - a^2} - a\frac{(124 - 91a)^2}{(1 - a^2)^2} = 436 - a.$$

Efectuînd toate calculele obținem ecuația de grad 5 în a:

$$a^5 - 436a^4 - 2a^3 + 12156a^2 - 23656a + 10848 = 0.$$

Această ecuație admite o singură rădăcină întreagă și pozitivă și anume pe $a = 4$. Așa fiind avem:

$$c = \frac{124 - 364}{1 - 16} = 16 \text{ și } b = \frac{124 - 16}{4} = 27.$$

Înlocuind acum pe a, b, c cu valorile lor rezultă: $2^x = 4 = 2^2$, de unde $x = 2$; $3^y = 27 = 3^3$, de unde $y = 3$; $2^z = 16 = 2^4$, de unde $z = 4$. Prin urmare, inițial, participantul a folosit două duble și trei triple pe primul buletin și patru duble pe al doilea buletin.

Problema 6190

Pe bazele unui trunchi de piramidă oarecare se iau respectiv punctele A, situat pe baza de arie a și B, pe baza de arie b. Pe segmentul AB se ia un punct M astfel că $\lambda_a \cdot MB = \lambda_b \cdot AM$, *unde* λ_a, λ_b *sînt numere cunoscute; și se duce prin M un plan paralel cu bazele care determină în trunchi, o secțiune de arie S.*

a) *Să se arate că* $\left(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{\lambda_b}\right)\sqrt{S}=\frac{\sqrt{a}}{\lambda_a}+\frac{\sqrt{b}}{\lambda_b}$.

b) *Fie M și N două puncte situate între A și B astfel ca* $AM \cdot AN = MB \cdot NB$. *Prin M și N se duc plane paralele cu bazele, care determină în trunchiul de piramidă două secțiuni de arii* S_M *și* S_N. *Să se arate că*

$$\sqrt{S_M}+\sqrt{S_N}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

O. Sacter

Soluție dată de *Perjeru Emil*, elev, Petroșeni. — a) Notînd cu h înălțimea trunchiului întreg, atunci înălțimile trunchiurilor determinate de planul dus prin M sînt respectiv $\frac{h\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$, $\frac{h\lambda_b}{\lambda_a+\lambda_b}$ și prin urmare avem:

$$\frac{h\lambda_a}{3(\lambda_a+\lambda_b)}(a+S+\sqrt{aS})+\frac{h\lambda_b}{3(\lambda_a+\lambda_a)}(b+S+\sqrt{bS})=\frac{h}{3}(a+b+\sqrt{ab}).$$

După simplificări și gruparea termenilor obținem ecuația de gradul al doilea în $\sqrt{S}$:

$$(\lambda_a+\lambda_b)S+(\lambda_a\sqrt{a}+\lambda_b\sqrt{b})\sqrt{S}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\lambda_a\sqrt{b}+\lambda_b\sqrt{a}).$$

Deducem:

$$\sqrt{S}=\frac{-(\lambda_a\sqrt{a}+\lambda_b\sqrt{b})\pm\sqrt{(\lambda_a\sqrt{a}+\lambda_b\sqrt{b})^2+4(\lambda_a+\lambda_b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\lambda_b\sqrt{a}+\lambda_a\sqrt{b})}}{2(\lambda_a+\lambda_b)}$$

După ce se arată că expresia de sub radical este

$$[(\sqrt{a}+2\sqrt{b})\lambda_a+(\sqrt{b}+2\sqrt{a})\lambda_b]^2$$

obținem

$$\sqrt{S}=\frac{-(\lambda_a\sqrt{a}+\lambda_b\sqrt{b})\pm[(\sqrt{a}+2\sqrt{b})\lambda_a+(\sqrt{b}+2\sqrt{a})\lambda_b]}{2(\lambda_a+\lambda_b)}$$

sau, după reținerea soluției acceptabile, $S=\frac{\lambda_a\sqrt{b}+\lambda_b\sqrt{a}}{\lambda_a+\lambda_b}$

ceea ce demonstrează relația din enunț.

b) În cazul acesta, dacă $\frac{AM}{MB}=\frac{\lambda_a}{\lambda_b}$, atunci $\frac{AN}{NB}=\frac{\lambda_b}{\lambda_a}$ și prin urmare, cele două secțiuni duse prin M și N, de arii respectiv S_M, S_N sînt date

de expresiile : $\sqrt{S_M} = \frac{\lambda_a\sqrt{b} + \lambda_b\sqrt{a}}{\lambda_a + \lambda_b}$ și $\sqrt{S_N} = \frac{\lambda_b\sqrt{b} + \lambda_a\sqrt{a}}{\lambda_a + \lambda_b}$. Deducem $\sqrt{S_M} + \sqrt{S_N} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Problema 6191

Fiind dat determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

să se arate că dacă $a_{11}\ a_{22} = a_{12}^2$ *și* $a_{ik} = a_{ki}$ $(k \neq i)$, *atunci :*

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^2 = -\ a_{22}\,\Delta.$$

O. Sacter

Soluție. — Notînd $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = d$ și dezvoltînd Δ după ultima linie, obținem :

$$\Delta = a_{31}\ d - a_{32}\begin{vmatrix} \frac{a_{12}^2}{a_{22}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

sau :

$$\Delta = a_{31}\ d - \frac{a_{32}a_{12}}{a_{22}}(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{32}).$$

Rezultă :

$$\Delta = d\left(\frac{a_{31}\,a_{22} - a_{32}\,a_{12}}{a_{22}}\right) = \frac{-d^2}{a_{22}},\ \text{adică}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 6192

Să se rezolve ecuația : sinnx+cosnx=sin(n+1)x—cos(n+1)x.

Eugen Popa, elev, Iași

Soluție dată de *Georgescu George*, elev Craiova. — Ecuația se mai scrie : $\sin(n+1)x - \sin nx = \cos(n+1)x + \cos nx$ *sau :*

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}\ \text{de unde :}$$

$$\cos\frac{(2n+1)x}{2} = 0;\ \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}.$$

Din prima ecuație avem:

$$\frac{(2n+1)x}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ sau } x = \frac{\pi(2k+1)}{2n+1}.$$

Din a doua ecuație avem:

$$\frac{x}{2} = \frac{(4k+1)\pi}{4}, \text{ adică } x = \frac{\pi(4k+1)}{2}.$$

Deci, ecuația dată are ca soluții:

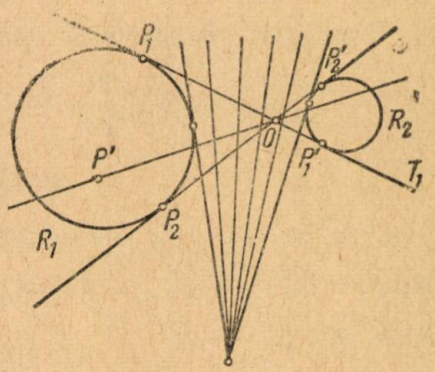
$$x = \frac{\pi(2k+1)}{2n+1} \text{ și } x = \frac{\pi(4k+1)}{2}, \; k \text{ și } n \text{ fiind numere întregi.}$$

Problema 6193

Se consideră în plan punctul P și două cercuri. Să se ducă prin P o dreaptă astfel încît suma arcelor de cerc aflate de fiecare parte a ei să fie de 360° și să se discute unicitatea soluției.

Tudor Zamfirescu

Soluția autorului. — Să presupunem că P este centrul de omotetie inversă al celor două cercuri, iar Δ o dreaptă oarecare dusă prin P. Atunci oricărui arc de cerc situat de o parte a lui Δ îi va corespunde un arc din celălalt cerc, egal cu primul și situat de cealaltă parte a lui Δ, astfel încît suma arcelor de cerc aflate de fiecare parte a lui Δ este 360°. Avem o infinitate de soluții și anume, toate dreptele care vor trece prin P.



Să presupunem acum că P nu este centrul de omotetie inversă al celor două cercuri, notat acum cu O. Facem în acest caz, ipoteza că cercurile sînt secante sau tangente. Atunci, conform celor spuse anterior, dreapta OP va satisface condiția din enunț și se arată ușor că oricare altă dreaptă nu o satisface. Avem deci, în acest caz, o soluție unică, dreapta OP. Ne rămîne de studiat cazul cînd cercurile sînt exterioare (nu sînt secante sau tangente), bine înțeles tot în ipoteza $O \neq P$. Ducem tangentele T_1, T_2 din O la cele două cercuri și fie P_1, P_1', respectiv P_2, P_2' punctele de contact (P_1 și P_1' pe T_1). Considerăm figura geometrică F obținută prin ștergerea segmentelor P_1P_1' și P_2P_2' și a arcelor P_1P_2 și $P_1'P_2'$ mai mari decît 180° din figura formată de cercurile date și tangentele T_1, T_2. Figura F împarte planul în trei regiuni R_1, R_2, R_3 dintre care primele două conțin interioarele cercurilor date. Se observă ușor că dacă P se află în R_1, R_2 sau pe F soluția este unică și anume, dreapta OP

iar dacă P se află în $\mathcal{R}_3$ există o infinitate de soluții și anume este soluție orice dreaptă ce trece prin P și printre cele două cercuri (eventual tangentă la unul din ele, dar situată tot între ele).

Problema 6194

Să se arate fără a utiliza tabelele de logaritmi, că logaritmul în baza zece al lui 11 este cuprins între 1,03 și 1,05.

Dan Voiculescu, elev, București

Soluția autorului. — Știm că: $\log_{10} 11 = \dfrac{1}{\log_{11} 10} = \dfrac{1}{\log_{11} 2 + \log_{11} 5}$

Inegalitățile: $2^7 = 128 > 121 = 11^2$; $5^3 = 125 > 121 = 11^2$ se mai scriu: $\log_{11} 2 > \dfrac{2}{7}$ și $\log_{11} 5 > \dfrac{2}{3}$, de unde deducem $\log_{11} 10 > \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{20}{21}$.

Inegalitățile: $1024 : 100 = 2^8 : 5^2 < 11$ și $5^4 \cdot 2 = 1250 < 1331 = 11^3$ se mai scriu: $\log_{11} 5 < \dfrac{3 - \log_{11} 2}{4}$; $8 \log_{11} 2 - 2 \log_{11} 5 < 1$.

Dacă aplicăm rezultatul din prima inegalitate într-a doua avem:

$$8 \log_{11} 2 - \frac{3 - \log_{11} 2}{2} < 1 \text{ sau: } \log_{11} 2 < \frac{5}{17}.$$ Găsim deci:

$$\log_{11} 10 < \frac{3 - \log_{11} 2}{4} + \log_{11} 2 = \frac{3}{4}(1 + \log_{11} 2) < \frac{3}{4}\left(1 + \frac{5}{17}\right) = \frac{33}{34}.$$

Rezultatele precedente ne dau:

$$\frac{34}{33} < \log_{10} 11 < \frac{21}{20}, \text{ adică } 1{,}0303\ldots < \log_{10} 11 < 1{,}05.$$

Problema 6200

Dacă $A_1, A_2, \ldots A_n$ *sînt unghiurile unui poligon convex să se arate că* $\sqrt{\sin A_1} + \sqrt{\sin A_2} + \ldots + \sqrt{\sin A_n} \leqslant n \sqrt{\sin \dfrac{360^\circ}{n}}$ (*în legătură cu problema 5696*),

* * *

Soluție și generalizare dată de *Dan Voiculescu*, elev București.

Vom demonstra propoziția mai generală:

Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sînt n unghiuri cuprinse între 0° și 180° atunci există întotdeauna pentru k natural și $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, relația

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\sin a_i} \leqslant n \sqrt[k]{\sin \frac{S}{n}}$$

1. Dacă $b_1, b_2, \ldots b_n$ sînt reali pozitivi și x_1, x_2 reali: pe baza inegalității *Cauchy — Buniakovski* putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{x_2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \right)^2$$

2. Mai general, să arătăm că pentru b_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) reali pozitivi, x_p ($p = 1, 2, 3, \ldots m$) reali și x media aritmetică a numerelor x_p avem

$$\prod_{p=1}^{p=m} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_p} \right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x} \right)^m$$

Vom folosi pentru demonstrarea acestei relații un raționament apropiat de inducția completă: demonstrăm inegalitatea pentru orice $m = 2^y$ iar apoi stabilim că inegalitatea fiind adevărată pentru $m = t$ este adevărată și pentru $m = t - 1$. Va rezulta că inegalitatea este valabilă pentru orice n număr natural. Vom schița numai această demonstrație.

Inegalitatea pentru $m = 2^y$ se obține aplicînd de mai multe ori inegalitatea de la punctul (1), de exemplu pentru $m = 4$ procedăm astfel:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_1} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_3} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_4} \right) \geqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{x + x_4}{2}} \right) \right]^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}} \right)^4$$

Dacă în inegalitatea pentru $m = t$ punem

$$x_t = \frac{1}{t-1} \sum_{p=1}^{t-1} x_p$$

vom obține o inegalitate care simplificată cu

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{x_t} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{\lambda}$$

este chiar relația pentru $m = t - 1$.

3. Dacă în relația de la punctul 2) facem $x_1 = x_2 = \ldots x_{m-1} = 0$ și $x_m = m$ ajungem la:

$$n^{m-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^m \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^m$$

4. Pentru $a_1, a_2, \ldots a_n$ cuprinși între 0° și 180° inegalitatea Hölder-Jensen ne permite să stabilim inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin a_i \leqslant n \sin \frac{S}{n}$$

unde S are sensul dat în enunțul generalizării problemei 6200.

Fără inegalitatea Hölder-Jensen obținem inegalitatea de mai sus pe baza unui raționament de tipul celui de la punctul 2) pornind de la $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \leqslant 2 \sin \frac{a+b}{2}$ cînd a și b sînt cuprinși între 0° și 180°.

Punînd în inegalitatea de la punctul 3) $b_i = \sqrt[k]{\sin a_i}$; $m = k$ și aplicînd apoi inegalitatea de la punctul 4) avem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\sin a_i} \right)^k \leqslant n^{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin a_i \leqslant n^k \sin \frac{S}{n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\sin a_i} \leqslant n \sqrt[k]{\sin \frac{S}{n}}$$

adică ceea ce era de arătat.

Pentru $k = 2$ și $S = (n-2)\ 180°$ se va obține inegalitatea ce constituie obiectul problemei 6200 deoarece:

$$\sin \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \sin \left(180° - \frac{360°}{n} \right) = \sin \frac{360°}{n}$$

Problema 6211

Notînd $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, se cere:

a) *să se găsească rădăcinile ecuației* $f(x) = 0$; b) *să se reprezinte grafic funcția* $y = f(x)$.

* * *

Soluție. a) Notăm $\sqrt{x} = z$ și ecuația $f(x) = 0$ devine

$$f(z) = \sqrt{1-z^2} - z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0, \text{ de unde } \sqrt{1-z^2} = z + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ridicînd la patrat rezultă

$$1 - z^2 = z^2 + \frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}, \text{ apoi } z^2 + \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = 0, \text{ de unde } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

Dar $\sqrt{x} = z > 0$ și deci, convine numai rădăcina pozitivă,

$$z = \sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \text{ de unde } x = z^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$$

Verificarea rădăcinii. Introducînd în expresia funcției date valoarea lui x, rezultă:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}+\frac{1-\sqrt{5}-2}{2\sqrt{3}}=$$

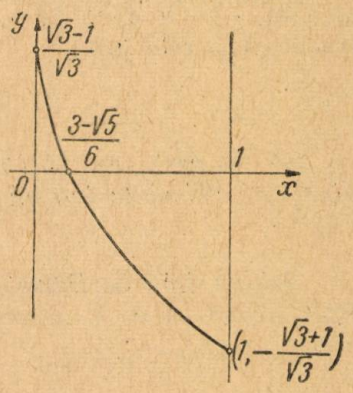
$$=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

b) Pentru reprezentare trebuie să considerăm funcția reală.

Rezultă $0<x<1$, adică funcția variază în intervalul limitat de

$$f(0)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

și $f(1)=-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.



Problema 6219

Să se rezolve inecuația: $\log_5 x>\log_{125}(3x-2)$.

* * *

Soluție dată de *G. G. Niculescu*, București și *Chițescu Ion*, ș.m. 10 București. Folosim formula de schimbare a bazei logaritmilor avem:

$$\log_5 x=\log_{125} x\cdot\log_5 125=3\log_{125} x=\log_{125} x^3$$

și atunci inecuația dată se mai scrie:

$$x^3-3x+2>0,$$

sau:

$$(x-1)^2(x+2)>0 \quad \text{care ne dă } x>-2.$$

Dar, în mod necesar avem: $x>0$ și $x>\frac{2}{3}$. Restrîngem cele trei condiții într-una singură și obținem în definitiv: $x>\frac{2}{3}$.

Problema 6224

Să se arate că dacă $0°<x<5°$ *avem:*

$$\cos(40°-3x)\sin(70°-2x)>\sin(40°+4x)\cos(10°+4x).$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *Chițescu Ion*, elev ș.m. 10 București și *Dăncilă Ioan* Sibiu. Transformînd produsele în sume, inegalitatea propusă devine:

$$\sin(110° - 4x) > \sin(50° + 8x) \qquad \text{sau încă}$$

$$\sin(70° + 4x) > \sin(50° + 8x).$$

Se vede că ambele arce din paranteze sînt în cadranul I. Deci, trebuie să avem: $70° + 4x > 50° + 8x$ sau $20° > 4x$, $5° > x$. Rezultă că inegalitatea propusă este justă.

Problema 6232

Să se arate că $2bc(b+c) > a(b+c-a)(b+c) > 2abc\cos A$ *notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.*

The Mathematical Gazette, London 1963)

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu și *Mihalca Dan*, elev București. Deoarece a, b, c sînt pozitive avem de demonstrat inegalitățile:

$$2bc > a(b+c-a) : (b+c-a)(b+c) > 2bc\cos A.$$

$$\text{Dar } 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

deci avem de demonstrat că:

$$2bc > a(b+c-a);\ b^2 + c^2 + 2bc - ab - ac > b^2 + c^2 - a^2$$

sau ținînd seama că cele două inegaliăți se confundă, că

$$2bc > a(b+c-a).$$

Dar $b + c - a = 2(p - a)$ deci, va trebui să demonstrăm că:

$$2bc > 2a(p-a)$$

sau:

$\frac{2p}{a} > 2\frac{p(p-a)}{bc}$ și cum $\frac{p(p-a)}{bc} = \cos^2\frac{A}{2}$ avem de demonstrat că:

$\frac{2p}{a} > 2\cos^2\frac{A}{2}$ sau că: $\frac{2p}{a} > \cos A + 1$, de unde avem $\frac{2p-a}{a} > \cos A$

sau: $\frac{b+c}{a} > \cos A$, ceea ce e evident ținînd seama că $b + c > a$.

Problema 6236

Fie progresia geometrică $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *Cunoscînd sumele:* $T = a_1 + a_2 + a_2 + \ldots + a_n$; $T_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ să se găsească $P = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ în funcție de T, T_1, n.

Boicescu Vlad, elev Craiova

Soluție dată de *Popa Eugen*, cl. VIII ș.m. 3 Iași și *Spircu Tiberiu*, elev Arad. Putem scrie:

$$T = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$T_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{v_n} = \frac{q^n - 1}{a_1 q^{n-1}(q - 1)}$$

$$P = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = a_1^n \sqrt{q^{n(n-1)}}$$

unde q este rația progresiei geometrice date. Împărțind membru cu membru relațiile $T = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $T_1 = \frac{q^n - 1}{a_1 q^{n-1}(q - 1)}$ găsim $\frac{T}{T_1} = a_1^2 q^{n-1}$ de unde $a_1 = \sqrt{\frac{T}{T_1 q^{n-1}}}$. Putem scrie:

$$P = \sqrt{\frac{T^n}{T_1^n q^{n(n-1)}}} \cdot \sqrt{q^{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{T^n}{T_1^n}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{n/2}$$

care reprezintă relația căutată.

Problema 6240

Să se arate că

$$\prod_{k=1}^{n} k! \cdot \prod_{k=1}^{n} \cdot k^{k-1} = (n!)^n$$

Ion Nănuți, Timișoara

Soluție dată de *Crișan Victor* elev Aiud

Avem:

$$\prod_{k=1}^{n} k! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \ldots\ldots (1 \cdot 2 \ldots n) =$$

$$= 1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-3} \cdot 4^{n-3} \ldots, (n-1)^2 \cdot n$$

și

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k-1} = 1^0 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \ldots\ldots\ldots (n-1)^{n-2} \cdot n^{n-1}$$

Deci

$$\prod_{k=1}^{n} k! \prod_{k=1}^{n} k^{k-1} = 1^n \cdot 1^0 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^2 \cdot 4^{n-3} \cdot 4^3 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (n-1)^2 \cdot (n-1)^{n-2} \cdot n \cdot n^{n-1} = 1^n \cdot 2^n \cdot 3^n \cdot 4^n \ldots\ldots n^n = (n!)^n.$$

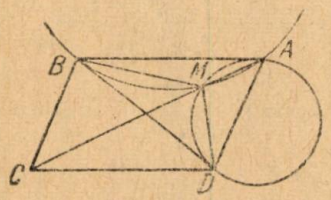
Problema 6241

Se dă paralelogramul ABCD cu diagonalele AC > BD. Pe diagonala AC să se deetrmine un punct M astfel ca patrulaterul BCDM să fie inscriptibil. Să se demonstreze că BD este o tangentă comună exterioară a cercurilor AMB şi AMD.

Ştefan Musta, Oradea

Soluţie dată de *Chiţescu Ion*, ş.m. 10 Bucureşti. In patrulaterul inscriptibil $BMDC$, $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MCD$. Dar : $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MAB$, deci

$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBD$; BD este tangentă cercului circumscris lui ABM.



Analog, BD este tangentă cercului circumscris lui AMD. Deci, BD este tangentă comună exterioară a cercurilor AMB şi AMD.

Problema 6251

Să se arate că :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}+\frac{8}{65}+\frac{12}{325}+\ldots+\frac{4n}{4n^4+1}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{65}+\frac{11}{325}+\ldots+\frac{2n^2-2n-1}{4n^4+1}\right)=0$$

C. Berdan, Bacău

Soluţie dată de *Spircu Tiberiu*, elev Arad.

a) Termenul general devine :

$$T_n=\frac{4n}{4n^4+1}=\frac{4n}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)}=$$

$$=\frac{2n^2+2n+1-2n^2+2n-1}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)}=\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2n^2+2n+1}=$$

$$\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2-2(n+1)+1}$$

Deci

$$T_n=f(n)-f(n+1) \quad \text{unde} \quad f(n)=\frac{1}{2n^2-2n+1}$$

Suma este deci:

$$S_1 = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = f(1) - f(2) + f(2) -$$

$$- f(3) + \ldots + f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{65} + \ldots + \frac{4n}{4n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}\right) = 1$$

b) Termenul general este:

$$T_n = \frac{2n^2-2n-1}{4n^4+1} = \frac{n-1}{2n^2-2n+1} - \frac{(n+1)-1}{2(n+1)^2-2(n+1)+1}$$

Deci

$$T_n = f(n) - f(n+1) \quad \text{unde} \quad f(n) = \frac{n-1}{2n^2-2n+1}$$

Suma este deci:

$$S_2 = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + \ldots$$

$$+ f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1) =$$

$$= 0 - \frac{n}{2n^2+2n+1} = -\frac{n}{2n^2+2n+1}$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{65} + \frac{11}{325} + \ldots + \frac{2n^2-2n-1}{4n^4+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n^2+2n+1}\right) = 0$$

Problema 6258

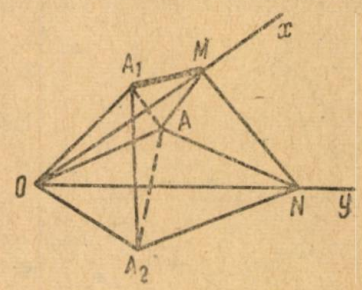
Se dă un unghi xoy și un punct A în interiorul lui. Pe Ox se ia un punct M și pe Oy un punct N. Se notează cu A_1 simetricul lui A față de Ox și cu A_2 simetricul lui A față de Oy.

Să se arate că:

a) $A_1M + A_2N > MN$,

b) $AM + AN > \frac{A_1A_2}{2}$.

c) Unde trebuie să fie situat punctul A pentru ca să avem $AA_1 = AA_2$.



In acest caz să se arate că A_1 și A_2 sînt simetrice față de bisectoarea unghiului xOy.

Petrescu P. Anastasie, Craiova

Soluția dată de *Dan Voiculescu*, elev București.

a) Triunghiurile A_1MA și A_2NA sînt isoscele deoarece medianele OM respectiv ON sînt și înălțimi.

Deci $A_1M + A_2N = AM + AN$.

Dar în triunghiul AMN:

$$AM + AN > MN \text{ adică } A_1M + A_2N > MN$$

b) În triunghiurile isoscele A_1MA și ANA_2 vom avea $2AM > A_1A$ și $2AN > AA_2$ sau adunînd $2(AM + AN) > A_1A + AA_2$. Dar în triunghiul AA_1A_2 avem: $A_1A + AA_2 > A_1A_2$ așa încît: $2(AM + AN) > A_1A_2$ sau

$$AM + AN > \frac{A_1A_2}{2}.$$

c) Să observăm că notînd cu d_1 distanța lui A la Ox și cu d_2 distanța lui A la Oy avem: $AA_1 = 2d_1$ și $AA_2 = 2d_2$ rezultă că $AA_1 = AA_2$ echivalează cu $d_1 = d_2$. Punctul A trebuie deci să se afle pe bisectoarea lui xOy.

Triunghiurile OAA_1 și OAA_2 sînt isoscele medianele din O fiind în același timp și înălțimi, deci $OA_1 = OA = OA_2$.

Dacă $AA_1 = AA_2$ triunghiurile OAA_1 și OAA_2 vor fi egale avînd laturile egale.

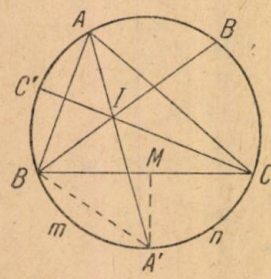
De aici rezultă că A_1 și A_2 vor fi simetrice față de OA, care este bisectoarea lui xOy.

Problema 6287

Bisectoarele interioare ale triunghiului ABC taie cercul circumscris triunghiului în A', B', C'. Notînd cu d_a, d_b, d_c distanțele punctelor A', B', C' respectiv la laturile BC, CA, AB și cu r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, să se stabilească relația $\frac{d_a}{r_a} + \frac{d_b}{r_b} + \frac{d_c}{r_c} = 1$.

* * *

Soluție dată de *Chițescu Ion*, elev ș.m. 10 București. Deoarece A' este pe bisectoare rezultă că $\overset{\frown}{AmA'} = \overset{\frown}{A'nC}$, de unde $A'B = A'C$, $MB = \frac{BC}{2}$ și $\sphericalangle A'BC = \frac{A}{2}$. Deci: $A'B = 2R \sin\frac{A}{2}$.



Din triunghiul dreptunghic $A'BM$ rezultă:

$$MA' = A'B \sin\frac{A}{2} = 2R \sin^2\frac{A}{2} = d_a.$$

$$r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\ ;\ \frac{d_a}{r_a} = \frac{2R}{p}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{R\sin A}{p}$$

Analog obținem și $\frac{d_b}{r_b}\ ;\ \frac{d_c}{r_c}$ deci,

$$\sum \frac{d_a}{r_a} = \frac{R\sin A + R\sin B + R\sin C}{p} = 1.$$

Problema 6293

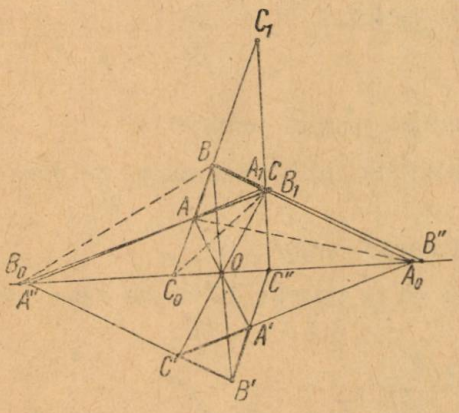
Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri simetrice față de un punct O. Dreptele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ intersectează o dreaptă oarecare (Δ) dusă prin O respectiv în C'', A'', B''. Să se demonstreze că AA'', BB'', CC'' sînt concurente.

V. Brînzănescu, Gh. Lusztig studenți București

Soluție dată de autori.

Notăm $A_0 \equiv (\Delta, BC)$, $B_0 \equiv (\Delta, CA)$, $C_0 \equiv (\Delta, AB)$ și $A_1 \equiv (AA'', BC)$, $B_1 \equiv (BB'', CA)$, $C_1 \equiv (CC'', AB)$.

Punctele A_0, B_0, C_0 sînt respectiv simetricele punctelor A'', B'', C''. Teorema lui *Menelaus* aplicată triunghiului ABC și transversalei (Δ) ne dă:



1) $$\frac{A_0B}{A_0C}\cdot\frac{B_0C}{B_0A}\cdot\frac{C_0A}{C_0B} = 1.$$

Fascicolul de drepte (AB, AC, AA'', AA_0) tăiat de dreptele BC și $(\Delta$ ne dă:

2) $$\frac{A_1B}{A_1C} : \frac{A_0B}{A_0C} = \frac{A''C_0}{A''B_0} : \frac{A_0C_0}{A_0B_0}.$$

Analog fascicolele de drepte (BA, BC, BB'', BB_1) tăiat de AC și (Δ) și (CA, CB, CC'', CC_0) tăiat de AB și (Δ) ne dau:

3) $$\frac{B_1C}{B_1A} : \frac{B_0C}{B_0A} = \frac{B''A_0}{B''C_0} : \frac{B_0A_0}{B_0C_0}$$

și

4) $$\frac{C_1A}{C_1B} : \frac{C_0A}{C_0B} = \frac{C''B_0}{C''A_0} : \frac{C_0B_0}{C_0A_0}$$

Inmulțim relațiile 1), 2), 3) și 4):

$$\frac{A_0B}{A_0C}\cdot\frac{B_0C}{B_0A}\cdot\frac{C_0A}{C_0B}\cdot\frac{\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}}{\frac{A_0B}{A_0C}\cdot\frac{B_0C}{B_0A}\cdot\frac{C_0A}{C_0B}}=\frac{\frac{A''C_0}{A''B_0}\cdot\frac{B''A_0}{B''C_0}\cdot\frac{C''B_0}{C''A_0}}{\frac{A_0C_0}{A_0B_0}\cdot\frac{B_0A_0}{B_0C_0}\cdot\frac{C_0B_0}{C_0A_0}}$$

și simplificăm ținînd seama că datorită simetriei avem: $A''C_0 = C''A_0$; $A''B_0 = B'''A_0$; $B''C_0 = C''B_0$ și $A_0B_0 = -B_0A_0$; $A_0C_0 = -C_0A_0$; $B_0C_0 = -C_0B_0$.

Se obține:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = -1$$ de unde rezultă că AA'', BB'', CC'' sînt concurente conform reciprocei teoremei lui *Ceva*.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date în septembrie 1964 la admiterea în Facultatea de matematică-mecanică, cursuri de zi, din Timișoara

6710. Să se rezolve ecuația:

$$f(x) = 16x^4 - 64x^3 + 56x^2 + 16x - 15 = 0$$

știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

6711. Fiind dată egalitatea:

$$(1 - \cos x\ \cos y)^2 - \sin^2 x \sin^2 y = (\cos x - \cos y)^2$$

Se cere: a) Să se arate că este identitate; b) Ținînd seama de punctul a) să se rezolve ecuația în u,

$$u^2\sin^2 x - 2u(1 - \cos x \cos y) + \sin^2 y = 0$$

c) u_1 și u_2 fiind rădăcinile ecuației de la punctul b) să se calculeze expresia:

$$E = \frac{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}}{\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2}}$$

apoi să se găsească valoarea și pentru $x = \frac{2\pi}{3}$ și $y = \frac{\pi}{3}$.

6712. O roabă încărcată, avînd masa totală de 85 kg, este împinsă în sus pe un plan înclinat. Lungimea planului este de 34 m, iar înălțimea de 5,2 m. Cunoscînd coeficientul de frecare $k = 0{,}3$, să se afle:

a) forța tangențială și forța de rezistență aplicată roabei;

b) lucrul mecanic util și cel consumat;
c) puterea dezvoltată, dacă roaba se mișcă uniform cu o viteză de 0,8 m/s.

6713. Într-un triunghi ABC se notează cu D și E mijloacele laturilor BC respectiv CA. Știind că $A(1, -1)$, $D(1, 2)$, $E(2, 0)$ se cere:
a) Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiurilor ABC;
b) Să se scrie ecuațiile cercurilor O_1 și O_2 circumscrise triunghiurilor ABC și DEC.
c) Să se arate că punctul C se găsește pe linia centrelor cercurilor O_1 și O_2.

6714. Se dă cercul de diametrul $AB = 2R$ și patratul $CDEF$ cu vîrfurile C și D pe AB și cu vîrfurile E și F pe cerc. Diagonalele EC și FD întîlnesc a doua oară cercul dat în M și N. Fie P centrul patratului.
a) Să se calculeze aria triunghiului PMN în funcție de raza cercului dat și să se arate că ea este egală cu aria patratului dat.
b) Să se arate că $MN = 2CD$
c) Rotind figura în jurul diametrului AB, considerăm sferele de diametre SB, AC și CB. Între aceste trei sfere este cuprins un volum V. Notăm cu V_1 volumul unui con cu raza bazei AC și înălțimea cît raza sferei mari și cu V_2 volumul unui con cu raza bazei BC și înălțimea cît raza sferei mari. Are loc relația

$$\left(\frac{V}{3}\right)^2 = V_1 V_2.$$

Facultatea de matematică-mecanică, Cursul fără frecvență

6715. Să se rezolve ecuația:

$$9x^3 - 27x^2 + 23x - 5 = 0,$$

știind că între rădăcinile ei avem relația:

$$2x_1 = x_2 + x_3.$$

6716. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii BC. Bisectoarea unghiului AMB taie pe AB în P și bisectoarea unghiului AMC taie pe AC în Q. Să se arate că:
a) $2RM = PQ$, R fiind punctul unde AM taie pe PQ.
b) PQ este paralelă cu BC.

6717. Fie un cerc (O) de centru O; AB unul din diametrii săi, (D) și (Δ) tangentele la (O) în A și în B.
Tangenta la (O) într-unul din punctele sale, notat cu R, taie (Δ) în M; AR taie (Δ) în Q; BR taie (D) în P.
A) 1° Să se arate că M este mijlocul lui BQ și că fascicolul de drepte AB, AQ, AM, AP este armonic.
2° PM taie AB în T. Să se precizeze poziția punctului S, conjugatul armonic al lui T în raport cu M și P.

3° Folosind numai rezultatele precedente, să se construiască polara (θ) a lui T în raport cu dreptele (D) și (Δ). Să se arate că dreptele PB, MA și (θ) sînt concurente.

B) 1° Folosind un sistem de axe rectangulare, cu origina în O, centrul cercului (O) și presupunînd că în acest sistem coordonatele lui A, sînt $(-1, 0)$ să se scrie ecuația cercului (O).

Notînd cu α și β coordonatele lui R, să se scrie relația în α și β exprimînd că R aparține lui (O).

2° Să se scrie ecuația tangentei în R la (O) și ecuația dreptei AR (aceste ecuații vor conține parametrii α și β).

Să se deducă de aci, coordonatele lui M și Q; să se regăsească astfel că M este mijlocul lui BQ.

(Bacalaureat, Maroc, iunie 1964)

6718. Un pendul, presupus simplu, este format dintr-o ladă umplută cu nisip, de masă totală M, atîrnată la capătul unui fir metalic de lungime l și de masă neglijabilă.

Pendulul fiind în repaus, un glonte de masă m, aflat în mișcare rectilinie orizontală, atinge lada cu o viteză v, intră în ea și se imobilizează. Pendulul (ansamblul ladă-glonte) este atunci asvîrlit la o anumită înălțime h. (Se va neglija frecarea pe axa de rotație și rezistența aerului).

1° Cunoscînd pe M, m, h și g să se determine viteza v a glontelui.

2° Presupunînd că după lovitură pendulul efectuează oscilații, să se găsească viteza lineară a pendulului și tensiunea firului la trecerea prin verticală.

3° Să se determine ecuația mișcări pendulului.

Se va lua: $M = 3$ kg; $m = 10$ g; $h = 20$ cm; $l = 2$ m; $g = 9{,}8$ m/s^2. Calculele vor fi simplificate dacă se va observa că m este foarte mic față de M.

(Bacalaureat, Guineea, iulie 1963)

6719*. Se dă un paralelipiped cu vîfrurile: A, B, C, D, A', B', C', D' și al cărui centru O este mijlocul comun al segmentelor AA', BB', CC', DD'.

Muchiile duse din A sînt notate AB', AC', AD'; I, J, K sînt mijloacele respective ale segmentelor AB, BC, CA; (π) este un plan variabil care trece prin O. ON este un vector nenul perpendicular pe (π), iar a, b, c sînt produsele scalare: $a = \overline{ON} \cdot \overline{OI}$; $b = \overline{ON} \cdot \overline{OJ}$; $c = \overline{ON} \cdot \overline{OK}$.

I. 1° Să se demonstreze că orice sistem de numere a, b, c, nu toate nule, determină un vector $\overline{ON}$ și numai unul singur, deci un singur plan (π).

Să se caracterizeze astfel planul (π) încît să avem:

$$(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = 0.$$

Care este planul (π) care să satisfacă în același timp relația $b - c = 0$ și $a = 0$

Aceeași întrebare pentru $b + c = 0$ și $a = 0$; pentru $c - a = 0$ și $b = 0$; pentru $c + a = 0$ și $b = 0$.

---

* Soluția la problema 6719 se primește fără enunț.

2° Se asociază numerelor reale x, y, z, t punctele P, Q, R, S definite prin relațiile vectoriale următoare :

$$\overline{OP} = \overline{OI} + x(\overline{OJ} - \overline{OK}),$$
$$\overline{OQ} = -\overline{OI} + y(\overline{OJ} + \overline{OK}),$$
$$\overline{OR} = \overline{OJ} + z(\overline{OK} - \overline{OI}),$$
$$\overline{OS} = -\overline{OJ} + t(\overline{OK} + \overline{OI}).$$

Care sînt locurile lui P, Q, R, S cînd x, y, z, t variază independent unele față de altele ?

3° Să se calculeze x, y, z, t în funcție de a, b, c — în afară de cazul imposibilității — pentru ca punctele P, Q, R, S să fie în planul (π), trecînd prin O și definit de numerele a, b, c ca la punctul 1°.

Se va presupune că situația este aceiași în tot restul problemei.

Să se exprime atunci vectorii $\overline{PQ}$ și $\overline{RS}$ în funcție de vectorii $\overline{OI}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OK}$ și de numerele a, b, c.

Notînd prin ω și ω' mijloacele respective ale segmentelor PQ și RS, să se exprime și $O\omega$ și $O\omega'$ în funcție de vectorii $\overline{OI}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OK}$ și de numerele a, b, c.

4° Fie G mijlocul lui $\omega\omega'$. Să se stabilească relația $b\overline{PQ} + a\overline{RS} + 4c\overline{OG} = \overline{O}$, unde $\overline{O}$ este vectorul nul.

II. Reamintim că punctele P, Q, R, S și O sînt în planul (π).

1° Date fiind a și b, cum trebuie ales c pentru ca dreptele PQ și RS să aibă aceiași direcție ?

2° Se presupune — numai la acest punct — că planul (π) conține punctul K. Să se demonstreze că dacă (π) variază trecînd prin O și K, fiecare din dreptele QS, QR, PS, PR trec printr-un punct fix. Care sînt locurile punctelor ω, ω' și G ?

III. 1° Fie M punctul definit de :

$$\overline{OM} = \overline{OJ} + \frac{\lambda}{2}(\overline{OI} + \overline{OK}) + \frac{1}{2\lambda}(\overline{OK} - \overline{OI}),$$

unde λ este un număr ne nul. Să se demonstreze că M aparține, oricare ar fi λ, planului feței $A'BDC'$ a paralelipipedului. Se raportează acest plan axelor JX și $\overline{JY}$, cu originea în J, pe care vectorii unitate sînt respectiv egali cu $\overline{JD'}$ și $\overline{JC}$. Să se calculeze în funcție de λ coordonatele X și Y ale lui M în raport cu aceste axe astfel luate și să se deducă locul (H) al lui M cînd λ variază.

2° Se convine să se spună că planul (π), care trece prin O, aparține familiei (F) pentru a putea spune că numerele a, b, c verifică relația $c^2 = a^2 + b^2$.

Să se formeze ecuația în λ, depinzînd de parametrii a, b, c care exprimă că M este în (π) și să se deducă o definiție a familiei (F) relativă la conul (Σ) de vîrf O și directoare (H).

3° Se presupune că un plan (π) al familiei (F) conținînd P, Q, R, S taie în U o dreaptă AC și în V dreapta BD. Să se studieze în (π) așezarea punctelor P, Q, R, S. Să se demonstreze că ω și ω' se află pe dreapta UV.

Să se compare vectorii $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ și $\overline{OG}$ (G fiind definit la § I, 4°).

Notînd cu R' și S' simetricele respective ale lui R și S în raport cu O, să se demonstreze că punctele R', S', P, Q sînt colineare.

Să se demonstreze că paralela dusă prin O la PQ (sau la RS) este o generatoare a conului (Σ).

4° În această ultimă chestiune și contrar indicațiilor generale, paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ nu mai este fixat, dar planul (π) îi rămîne atașat prin a, b, c.

Se presupune numai, că punctele O și G sînt date, că avem: $c^2 = a^2 + b^2$ și că raportul $\frac{a+b}{c}$ este un număr relativ dat m. Să se demonstreze că dreapta PR trece printr-un punct fix E și că dreapta QS trece printr-un punct fix E'. Să se studieze ansamblul punctelor E și E' cînd m variază, O și G rămînînd fixe.

(La concursul general al liceelor și școlilor normale, din Franța, 1964)

PROBLEME PROPUSE *

6720. Să se simplifice fracția:

$$F(x) = \frac{x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x - 10}$$

Munteanu Corneliu, elev București

6721. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu centrul O care are $AB = DC = a$; $AD = BC = b$; $DB = c$; $AC = d$, iar diagonala AC este jumătate din diagonala BD.

Se prelungește latura BC pînă întîlnește cercul circumscris triunghiului ODC în M. Dreptele AM și DC se taie în Q. Să se arate că:

$$\frac{MC}{MD} = 2\left(1 - \frac{AQ}{AM}\right).$$

Pestroiu Daniel, elev Tg. Jiu

6722. Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^4 + 2ax^3 + (a^2 + b)x^2 + 2abx + a^2b}{x^5 + ax^4 - b^2x - b^2a}.$$

Liviu Pîrșan, student București

*) IX: (6720, 6721, 6722, 6723, 6724, 6725, 6726, 6727, 6728, 6729); X: (6730, 6731, 6732, 6733, 6734, 6735, 6736, 6737, 6738, 6739, 6740, 6741, 6742); XI (6743, 6744, 6745, 6746, 6747, 6748, 6749). Soluțiile se primesc pînă la 30 mai 1965.

6723. Dacă vîrfurile și ortocentrul unui triunghi se află pe laturile unui poligon convex, să se demonstreze că triunghiul este dreptunghic.

Dan Voiculescu, elev, București

6724. Pionierii unei tabere pot fi așezați în rînduri, cîte: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, formînd în fiecare caz un număr întreg de rînduri. Știind că numărul total al pionierilor este mai mic de 400 și că 1/3 din numărul băieților este cu 40 mai mare decît 1/5 din numărul fetelor, să se afle cîți băieți și cîte fete erau în tabără.

I. Albescu, Făgăraș

6725. In triunghiul ABC o paralelă la BC taie pe AB și AC respectiv în M și N. Fie T mijlocul lui MN iar O intersecția lui MC cu NB; TO intersectează BC în P, iar MP și NP intersectează pe TB și TC respectiv în R și Q. Dreptele BQ și CR se intersectează în S. Să se arate că punctele A, O, S sînt colineare.

Pelteanu Ioan, elev, ș.m. 23 Buucrești

6726. Să se elimine λ între relațiile:

$$x = a(\lambda + 1) + b(1 + \lambda + \lambda)$$

$$y = b(\lambda + 1) + a(1 + \lambda + \lambda^2)$$

I. M. Stancu, student București

6727. Se consideră punctul K pe mediana AA' a triunghiului ABC, astfel încît $A'K = BC/2$. Se construiește BL, astfel încît $\sphericalangle ABK = \sphericalangle KBL$, ($L$ fiind pe AA'). Se mai notează $(BK, AC) \equiv B'$; $(CK, AB) \equiv C'$ și se cere:

a) Să se demonstreze că CK este bisectoarea interioară a unghiului ACL. b) Să se calculeze valoarea comună a rapoartelor $\frac{B'A}{B'C}$ și $\frac{C'A}{C'B}$ în funcție de $BC = a$ și $AA' = m_a$. Se va discuta semnul acestui raport.

Chițescu Ion, elev București

6728. Fie punctele distincte A, B, C, D ale unui cerc așa ca AB să fie un diametru al cercului, iar BC nu. Să se demonstreze că dreapta care unește punctul de intersecție al tangentelor la cerc (duse în punctele C și D) cu punctul de intersecție al dreptelor AC și BD este perpendiculară pe dreapta AB.

(propusă de R.P.P. la a VI-a O.I.M.)

6729. Să se formeze douăsprezece perechi ordonate cu ajutorul numerelor de la 1 la 12, fiecare număr fiind utilizat odată ca primul număr al unei perechi și odată ca al doilea număr, astfel încît fiecare diferență posi-

bilă, (0,1, . . . , 11) dintre două numere ale unei perechi să apară exact odată. Exemplu în cazul numerelor de la 1 la 5: (1,5), (2,2), (3,4), (4,1), (5,3).

(Eureka, Cambridge, 1962)

6730. Să se rezolve ecuația:

$$4 \sin x \sin 4x + 4 \sin^2 2x = 3$$

Nicolae Peligrad, profesor Pitești

6731. Știind că $\sum_{k=1}^{n} a_k = C$, unde $a_k > 0$, iar C este o constantă. Să se arate că minimul expresiei

$$E = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a_k} + \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \text{este } \frac{(C+n)^2}{C}.$$

(În legătură cu problema 6254)

Bena I. Dorin, elev Caransebeș

6732. Să se arate că

$$l_{42}^7 - 7R^2 l_{42}^5 + 14R^4 l_{42}^3 - 7R^6 l_{42} + R^7 = 0$$

unde l_{42} este latura poligonului regulat cu 42 de laturi și R raza cercului circumscris.

(În legătură cu articolul din G.M.F. 1964, nr. 3 pagina 106).

Ion M. Stancu, student București

6733. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 5x + 4) = 5$$

Nicolae Peligrad, Pitești

6734. Se dau două drepte oarecare în spațiu (D_1) și (D_2). Pe (D_1) se ia un punct fix A.

a) Să se arate că există o infinitate de plane ce trec prin A pe care cele două drepte se proiectează după direcții perpendiculare.

b) Dacă M este intersecția proiecțiilor celor două drepte să se afle locul său geometric.

Stănescu Ilie, Sibiu

6735. Să se rezolve ecuația:

$$2x^4 - (8 + 3\sqrt{2})x^3 + (4 + 12\sqrt{2})x^2 - (8 + 3\sqrt{2})x + 2 = 0.$$

Traian Ionescu, Brăila

6736. Să se arate că polinomul

$$f(x) = (x+2)\,x^{3n+1} + 2^{3n+2}$$

este divizibil cu x^2+2x+4.

F. Kacsó, student, Cluj

6737. Să se rezolve sistemul:

$$(\sin x + \cos x)\sec\frac{y}{2} + \operatorname{cotg} y - \operatorname{cosec} y = 1,$$

$$2\sin(x+y) - 2\sin x = 1.$$

L. Mănescu, R. Vîlcea

6738. Dacă $\sin a$ este irațional, să se arate că și $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\sin 3a$ sînt iraționale.

* * *

6739. Fie ecuația cu rădăcini reale pozitive:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

Se se arate că

$$a_k \cdot n^k = C_n^k \cdot a_1^k$$

Dan Voiculescu, București

6740. Există un număr natural z care să poată fi reprezentat în două moduri distincte sub forma

$$z = x! + y!$$

unde x și y sînt numere naturale și $x \leqslant y$?

(propusă de R.S.C. la a IV-a O.I.M.)

6741. Să se rezolve ecuația:

$$2(\sin 13x + \sin 9x + \sin 5x + \sin x) =$$
$$= \sin 15x + 2(\sin 11x + \sin 7x + \sin 3x)$$

și să se verifice soluțiile obținute.

C. Ionescu-Țiu

6742. In adunarea

$$\begin{array}{r} \text{T H I S} \\ \text{I S. S O} \\ \hline \text{H A R D} \end{array}$$

literele distincte reprezintă cifre distincte din sistemul cu baza 8. Înlocuiți literele cu cifre astfel încît să obțineți o adunare corectă.

(Eureka, Cambridge, 1962)

6743. Se dau funcțiile $f(x)=\frac{e^x \arcsin x}{x^2}$ și $g(x)=\frac{\arcsin x}{x^2}$ și se cere:

a) Să se determine intervalul în care $f'(x)<g'(x)$. b) Să se traseze graficele celor două funcții. c) Să se arate că

$$f'(x)\equiv e^x[g(x)+g'(x)].$$

(În legătură cu articolul din G.M.F./1964 pag. 100).

M. I. Focșeneanu

6744. Pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$ se iau punctele A_1, B_1, C_1, D_1 așa încît $\frac{AB}{AA_1}=\frac{BC}{BB_1}=\frac{CD}{CC_1}=\frac{DA}{DD_1}=n$. Se cere:

a) Să se determine în funcție de n valoarea raportului $\frac{S_1}{S}$, unde S_1 reprezintă aria patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ iar S aria patrulaterului $ABCD$.

b) Să se determine valoarea lui n pentru care S_1 este minim.

Eugen Popa, elev Iași

6745. Se dă cercul (C) de ecuația:

$$x^2+y^2-2ax-2[(1+\sqrt{2})a+1]y+(3+2\sqrt{2})a^2+$$
$$+2(1+\sqrt{2})a+3-2\sqrt{2}=0.$$

a) Care este locul centrului cînd a variază? b) care este puterea originei față de (C)? c) Să se calculeze raza R funcție de a? d) Să se determine cercurile (C) de rază nulă.

* * *

6746. O emisiune de radio de 30 minute poate să cuprindă publicitate, teatru și muzică. Prețurile pe minut sînt: 25 lei pentru publicitate, 100 lei pentru teatru, 125 lei pentru muzică.

a) Să se stabilească alcătuirea unei emisiuni de preț minim, știind că: 1° nu trebuie să aibă mai puțin de 3 minute nici mai mult de 15 minute de publicitate, 2° nu trebuie să aibă mai mult de 22 minute de teatru.

b) Să se rezolve presupunînd că prețul muzicii e nul, celelalte date rămînînd aceleași.

* * *

6747. Să se afle extremele funcției $7x+5y-3$ în domeniul $2x+y+9\geqslant 0$; $-x+3y+6\geqslant 0$; $x+2y-3\leqslant 0$; $x+y\leqslant 0$, unde variabilele x și y sînt pozitive sau nule.

* * *

6748. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 12°$, avem:

$$-\frac{1}{4} \leqslant \sin(5x - 30°)\cos(5x + 60°) \leqslant 0$$

$$\frac{1}{4} \leqslant \sin\left(\frac{5x}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - 60°\right) \leqslant \frac{3}{4}$$

C. Ionescu-Țiu

6749. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și M un punct în planul său. Notăm cu A', B', C', D' proiecțiile acestui punct pe laturile AB, BC, CD, DA. Să se afle locul geometric al punctului M cînd $A'B' = C'D'$.

Mihalca Dan, elev București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *

E : 2265. Într-o magazie s-a depozitat o cantitate de 5 ori mai mare de grîu decît în a doua magazie. Dacă din prima s-au scos 90 t iar din a doua 14 t de grîu, în cele două magazii au rămas cantități egale. Să se afle ce cantitate de grîu a fost în fiecare magazie?

D. Mîrzan, R. Vîlcea

E : 2266. Trei pionieri au împreună la C.E.C. suma de 570 lei. Al doilea are de două ori mai mult ca primul și încă 20 lei, iar al treilea dacă ar mai avea depuși încă 80 lei ar avea de 11/2 ori mai mult ca al doilea. Să se afle cît are la C.E.C. fiecare pionier?

Gh. V. Samoilă, profesor Bacău

E : 2267. O Cooperativă agricolă de producție a vîndut 868 kg fructe și anume: mere, pere și prune, primind pentru mere 375 lei, pentru pere 1620 lei și pentru pere 138 lei. Știind că 4 kg mere costă cît 3 kg de pere și că merele sînt de trei ori mai scumpe decît prunele, se cere să se afle ce cantități de fructe s-au vîndut din fiecare și cît a costat kilogramul din fiecare fel de fructe.

I. Munteanu, profesor, Vaslui

E : 2268. Un pionier avea depusă la C.E.C. o anumită sumă de bani. Cu jumătate din această sumă a achitat biletul pentru tabără, cu 1/5 din rest și-a cumpărat cărți și i-au mai rămas la C.E.C. 86 lei. Să se afle:

---

*) V(E: 2265, 2266, 2267, 2268); VI(E: 2269, 2270, 2271, 2272); VII (2273, 2274, 2275, 2276); VIII (2277, 2278, 2279, 2280).

a) cîți lei avea pionierul depuși la C.E.C.? b) cît a plătit pentru tabără și cîți pentru cărți?

Gh. V. Samoilă, profesor, Bacău

E : 2269. Două echipe de muncitori forestieri s-au angajat să realizeze peste plan o producție în valoare de 64200 lei. Prima echipă a depășit angajamentul cu 12%, iar a doua cu $\frac{3}{5}$ din cît s-a angajat și în acest fel au dat împreună o producție peste plan de 85584 lei. Cît a dat peste plan fiecare echipă?

T. Dobre, profesor, Haleș — Buzău

E : 2270. M-am născut în ultimul secol, în anul în care ultimele sale două cifre sînt una dublul celeilalte și alcătuiesc un număr de patru ori mai mare decît numărul lunii în care m-am născut. Știind că numărul lunii în care m-am născut este pătratul zilei mele de naștere, să se afle ziua, luna și anul în care m-am născut.

Stelian Lambă, Constanța

E : 2271. O sumă de bani se împarte la trei muncitori astfel: primul primește 100 lei și 2/11 din suma rămasă. Al doilea primește 200 lei din rest și încă 1/7 din suma rămasă, iar al treilea restul. Să se afle cît a primit al treilea știind că al doilea a primit aceiași sumă ca și primul.

Grigorescu D. Nicolae, Hîrșova, Dobrogea

E : 2272. Într-o cutie sînt nasturi de aceeași mărime și formă, însă de culoare: neagră, roșie și albă. Care este numărul cel mai mic de nasturi ce trebuie scos din cutie pentru a fi siguri că am scos cel puțin 6 nasturi de culoare neagră și 6 nasturi de culoare albă, dacă $\frac{22}{49}$ din numărul nasturilor sînt de culoare neagră, $\frac{5}{49}$ sînt de culoare roșie, iar $\frac{4}{9}$ din numărul mărit cu unu al nasturilor existenți sînt albi.

I. Albescu

E : 2273. Două ceasornice sînt potrivite la ora 12, conform orei oficiale. La ora 1 primul ceasornic indică ora 1 fără 1 minut, iar al doilea 1 și 1 minut. După cîte ore și care este prima oră care va fi indicată deodată de ambele ceasornice? După cîte ore și care este prima oră care va fi indicată de cele două ceasornice împreună cu ora oficială?

I. Albescu, Făgăraș

E : 2274. Se dau punctele A și B, astfel încît $AB = 10$ cm. Cu ajutorul unei rigle negradată de 8 cm și unui compas să se ducă dreapta ce trece prin A și B.

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

E : 2275. Într-o cutie sînt 70 de bile, 20 roşii ; 20 verzi ; şi 20 galbene, iar restul sînt negre sau albe. Care este cel mai mic număr de bile care întotdeauna conţine 10 bile de aceeaşi culoare ?

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

E : 2276. O cooperativă agricolă de producţie a vîndut în 4 zile consecutive un număr de pui de găină. În prima zi a vîndut 2/3 din toţi puii vînduţi în cele patru zile şi încă 6 pui ; în ziua următoare 2/3 din ce a rămas şi încă 6 pui ; în ziua a treia 2/3 din noul rest şi încă 6 pui, iar în ziua a patra, 2/3 din ce a rămas şi ultimele 3 perechi de pui. Se întreabă : a) cîţi pui s-au vîndut în fiecare zi din cele 4 zile ; b) şi cîţi pui în total.

T. Grozescu, profesor Arad

E : 2277. În adunarea de mai jos să se înlocuiască literele prin cifre de la 0 la 9, ştiind că literelor egale le corespund numere egale iar literelor diferite, numere diferite.

$$\begin{array}{r} f\,o\,r\,t\,y\,+ \\ t\,e\,n \\ t\,e\,n \\ \hline s\,i\,x\,t\,y \end{array}$$

Olimpiada matematică, R.D.G., 1964

E : 2278. Să se afle numerele al căror produs este 845, iar cel mai mare divizor comun al lor este 13.

* * *

E : 2279. Să se arate că dacă $a + b + c = 2$, atunci :

$$\frac{a^4+b^3+c^3}{a-1}+\frac{a^3+b^4+c^3}{b-1}+\frac{a^3+b^3+c^4}{c-1}=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

unde a, b, c sînt diferite de unu.

I. M. Stancu, student Bucureşti

E : 2280. O cooperativă agricolă de producţie posedă o anumită suprafaţă de teren pe care o cultivă cu grîu, porumb, orz şi alte culturi. Suprafaţa cultivată cu grîu reprezintă 3/7 din întreaga suprafaţă, cea cultivată cu porumb 5/8 din rest, cea cultivată cu orz 2/3 din suprafaţă rămasă în urma cultivării grîului şi porumbului, iar 86 ha este suprafaţa cu alte culturi. Să se afle care este întreaga suprafaţă a gospodăriei în ha, cît s-a cultivat cu grîu, cît cu porumb şi cît cu orz.

M. Neacşu, profesor Caransebeş

Avem :

$$[n-(k-1)]^3+\ldots+(n-2)^3+(n-1)^3+n^6+(n+1)^3+(n+2)^3+\ldots+$$
$$+[n+(k-1)]^3=(2k-1)\,n^3+6\,[1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2]\,n=$$
$$=(2k-1)\,n^3+(k-1)\cdot k\cdot(2k-1)\cdot n=$$
$$(2k-1)\cdot n\cdot[n^2+(k-1)\cdot k]=\mathfrak{M}\,(2k-1)\cdot n.$$

Wilhelm Maurer, profesor, Sighişoara

Ecuaţiile bisectoarelor unui triunghi

Fie triunghiul orientat ABC şi fie (x_1, y_1) (x_2, y_2),, $x_3, y_3)$ coordonatele vîrfurilor A, B, C. Ecuaţiile laturilor acestui triunghi sînt :

$$(AB)\ldots\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0\,;\quad (BC)\ldots\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0\,;\quad (CA)\ldots\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}=0$$

iar lungimile laturilor :

$$a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\,;\quad b=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2},$$
$$c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Bisectoarele sînt date de ecuaţia :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}=\pm\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{(y_3-y_1)^2+(x_3-x_1)^2}}$$

sau :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}}{c}=\pm\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}}{b}$$

sau :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}}{c}\pm\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}}{b}=0$$

sau, în sfîrşit, din motive de simetrie,

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}}{b}\pm\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}}{c}=0 \qquad (1)$$

Ecuația (1) reprezintă deci, cele două bisectoare din A. Care este bisectoarea interioară și care este cea exterioară? Notăm:

$$E(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b}+\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c},$$

membrul I al ecuației (1), cu semnul + intre termeni.

Înlocuim în această expresie x și y cu coordonatele lui B, adică cu x_2 și y_2 și obținem:

$$E(x_2,y_2)=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b}+\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c}=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b}$$

determinantul al doilea este zero, avînd două linii identice, sau:

$$E(x_2,\ y_2)=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{b}$$

(Am schimbat linia întîia cu linia a treia și a doua cu a treia și deci, semnul determinantului a rămas același).

Înlocuim apoi, în aceiași expresie, x și y cu coordonatele lui C, adică cu x_3 și y_3 și obținem în mod analog,

$$E(x_3\,y_3)=\frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b}+\frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c}=\frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c}=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{c}$$

Deoarece b și c sînt cantități pozitive, atît $E(x_2\,y_2)$, cît și $E(x_3,\ y_3)$ au semnul determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

adică același semn. Rezultă că ecuația:

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b}+\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c}=0$$

reprezintă bisectoarea exterioară corespunzătoare unghiului A și deci, ecuația :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b} - \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c} = 0$$

reprezintă bisectoarea interioară corespunzătoare unghiului A.

În mod analog obținem bisectoarele corespunzătoare lui B și C respectiv :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c} \pm \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{a} = 0$$

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{a} \pm \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b} = 0.$$

Însemnînd

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = D_1; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = D_2; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = D_3$$

putem scrie prescurtat, ecuațiile bisectoarelor :

$$\frac{D_2}{b} \pm \frac{D_3}{c} = 0; \quad \frac{D_3}{c} \pm \frac{D_1}{a} = 0; \quad \frac{D_1}{a} \pm \frac{D_2}{b} = 0.$$

Ecuațiile bisectoarelor scrise sub această formă ne permit să demonstrăm concurența lor aproape fără nici un calcul. Considerăm ecuațiile bisectoarelor interioare :

$$\frac{D_2}{b} - \frac{D_3}{c} = 0, \quad \frac{D_3}{c} - \frac{D_1}{a} = 0, \quad \frac{D_1}{a} - \frac{D_2}{b} = 0$$

Adunînd cele trei ecuații obținem o relație identic zero, între membrii întîi ai ecuațiilor bisectoarelor interioare, adică este satisfăcută condiția de concurență a trei drepte.

În mod analog, putem demonstra concurența a două bisectoare exterioare și una interioară :

$$\frac{D_2}{b} - \frac{D_3}{c} = 0; \quad \frac{D_1}{a} + \frac{D_2}{b} = 0$$

$$\frac{D_3}{c} + \frac{D_1}{a} = 0$$

Înmulțim ecuația a doua cu -1 și adunînd cele trei ecuații obținem de asemenea o relație liniară și omogenă, cu coeficienți nu toți nuli, între membrii întîi ai ecuațiilor celor trei bisectoare și deci ele sînt concurente.

E. Bukowski, profesor, Sighișoara

A VII-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

conf. univ. *TIBERIU ROMAN*, prof. emerit *ZLATE BOGDANOV*

Olimpiada internațională de matematică a avut loc în acest an la Berlin în intervalul 3—13 iulie 1965. Echipa țării noastre a fost formată din 8 elevi selecționați în urma olimpiadei de matematică internă și a unor lucrări suplimentare de baraj date după etapa pe țară și în timpul cantonamentului organizat pentru pregătirea elevilor. Delegația țării noastre a fost formată din elevii : Liliana Bucur, Sibiu ; Alexandru Bădescu, Ploiești ; Dan Voiculescu, București ; Jack Weinstein, Rădăuți ; Octavian Bîscă, Craiova ; Eugen Popa, Iași, Ion Ștefănescu — Sabba, București și Eleodor Popescu, Tr. Severin. Doi elevi au fost din clasa a IX-a, unul din clasa a X-a și 5 din clasa a XI-a. Delegația a fost condusă de semnatarii acestor rînduri.

Delegația țării noastre a sosit la Berlin în dimineața zilei de 3 iulie și a fost cazată, împreună cu celelalte delegații, la Bogensee (30 km. nord de Berlin), la școala superioară de tineret, unde au avut loc și lucrările scrise.

La olimpiadă au participat delegațiile a 10 țări : R. P. Bulgaria, R. S. Celoslovacia, R. Finlanda, R. D. Germană, R.S.F. Jugoslavia, R. P. Mongolă, R. P. Polonă, R. S. România, U.R.S.S. și R. P. Ungară.

Lucrările olimpiadei s-au desfășurat sub conducerea unui juriu internațional format din cei 10 șefi ai delegațiilor, condus de prof. univ. W. Engel (R.D.G.).

Lucrările scrise au avut loc în zilele de 5 și 6 iulie, între orele 9,30—13,45, sub supravegherea unor nespecialiști. La prima lucrare s-a dat spre rezolvare trei probleme, iar la a doua alte trei probleme.

Corectarea lucrărilor scrise s-a făcut de către profesorii fiecărei delegații, iar pentru a stabili criterii unice, definitivarea punctajelor s-a făcut de către comisiile de coordonatori (zece matematicieni germani), care au dovedit principialitate, fermitate și operativitate.

Distribuirea premiilor a avut loc în dimineața zilei de 12 iulie în sala Congreselor din Berlin. În afara delegațiilor la O.I.M. au participat : primul locțiitor al ministrului învățămîntului, primul secretar al C.C. al Tineretului liber german, reprezentați ai unor ambasade din Berlin, elevi ai unor școli medii etc. În numele tuturor elevilor participanți la O.I.M. a vorbit Liliana Bucur (Sibiu). Conducătorul delegației bulgare a transmis, în încheerea ședinței, invitația la cea de a VIII-a O.I.M., în anul 1966, în Bulgaria.

La masa comună care a urmat, elevii noștri au împărțit obiecte de artă populară elevilor tuturor celorlalte delegații, iar profesorii au distribuit cărți și obiecte de artizanat profesorilor din celelalte delegații.

Cu privire la probleme. Comisia germană de organizare a O.I.M. a primit din timp 36 probleme din partea a șase țări participante, (R. S. România a propus 6 probleme) din care a selecționat 12 probleme ce au fost supuse spre discutare juriului internațional. Dintre acestea au fost alese 6 probleme care sînt publicate la pagina 476. Dintre acestea o problemă a fost dintre cele propuse de S.S.M. Notarea rezolvării problemelor s-a făcut cu un punctaj diferențiat (între 4—9 puncte de

problemă) în funcție de dificultățile proprii ficcăreia. În total s-a acordat celor șase probleme 40 puncte.

Rezultatele obținute. Dăm mai jos clasificarea neoficială a echipelor, după totalul punctajului obținut, al premiilor și evidențierilor pentru rezolvări deosebite ale unor probleme :

Țara	Total puncte	Pr. I	Pr. II	Pr. III	Evidențiați
U.R.S.S.	281	5	2	—	—
R. P. Ungară	246	3	2	2	2
R. S. România	222	—	4	3	1
R. P. Polonă	178	—	1	3	1
R. D. Germană	175	—	2	3	—
R. S. Cehoslovacia	159	—	1	3	—
R. S. F. Iugoslavia	137	—	—	2	—
R. P. Bulgaria	93	—	—	1	—
R. P. Mongolă	63	—	—	—	1
R. Finlanda	62	—	—	—	1

Pentru prima dată din echipa țării noastre a făcut parte o elevă ca și doi elevi din clasa a IX-a. Eleva a obținut cel mai bun punctaj dintre elevii români și cel mai mare număr de puncte dintre elevele tuturor delegațiilor. Elevii din clasa a IX-a au obținut cîte un premiu.

Considerăm că rezultatele obținute de elevii noștri au fost în ansamblu bune : au obținut 4 premii II elevii : *Liliana Bucur*, *Alexandru Bădescu*, *Dan Voiculescu* și *Jack Weinstein*, 3 premii III elevii : *Octavian Bîscă*, *Eugen Popa* și *Ion Ștefănescu-Sabba*. Elevul Al. Bădescu a obținut și o diplomă pentru rezolvarea excelentă pe care a dat-o problemei a doua.

Rezultatul din acest an este superior celui din anul trecut, cînd echipa noastră a obținut numai 2 premii II și 3 premii III.

Liliana Bucur

Alexandru Bădescu

Dan Voiculescu

În *Gazeta Matematică seria B*, se va publica un articol de prezentare a rezolvărilor problemelor, date de elevii noștri.

Programul conex. Elevii au vizitat Berlinul în trei jumătăți de zile, au făcut o plimbare pe Müggelsee cu vaporul, în tovărășia unor elevi din Berlin, au vizitat Potsdam — o zi întreagă.

Ei au avut ocazia să lege prietenii cu elevii altor delegații în perioada șederii la Bogensee, a jocurilor sportive și întîlnirilor prietenești, schimburilor de insigne etc.

Toate delegațiile au făcut o excursie de 4 zile cu autocarele : Domul din Naumburg, Buchenwald (fostul lagăr, muzeul, monumentul), Weimar (casa Goethe, casa Schiller, muzeul palatului, plimbare în parc cu elevii localnici), Karl-Marx-Stadt (vizitarea orașului), Dresda (galeria de picturi, Zwinger, Albertinum, fresca prinților, Luisenhof etc.).

Jack Weinstein

Octavian Bîscă

Eugen Popa

Ioan Ștefănescu-Sabba

Delegațiile au avut astfel posibilitatea să cunoască valori culturale ale R.D.G. și munca pașnică a poporului german.

Toți elevii au primit cîte o diplomă de participant și insigna celei de a VII-a O.I.M., în care se marchează realizarea marelui matematician Gauss, înainte de a fi împlinit 19 ani: constructibilitatea cu rigla și compasul a poligonului regulat cu 17 laturi.

În tot timpul O.I.M. tovarășii germani — președintele, profesorii, însoțitorul și translatorul grupului nostru de elevi, cei din diferitele comisii organizatorice — administrative, au fost de o amabilitate deosebită. Materialele de informare puse la dispoziție (hărți, planuri, broșuri despre învățămînt, ilustrații, albume, ziare) au fost foarte variate.

Presa din R.D.G., posturile de radio, televiziunea, jurnalele de actualități au urmărit de aproape desfășurarea O.I.M. Ziarul „Junge Welt" organ al Tineretului liber german a acordat pagini întregi O.I.M.

Profesorul Lehman de la Leipzig, cu sprijinul organelor locale, a tipărit la „Leipziger Volkszeitung" un supliment, care a apărut în mai 1965, cuprinzînd problemele date la olimpiadele internaționale, amintiri și impresii ale participanților la olimpiadele internaționale de matematici.

Centrul de presă a asigurat ca în timpul excursiei să fie editată o revistă de 24 pagini care constituie o cronică ilustrată și bine documentată a O.I.M. de la Berlin. În această revistă găsim un material cu aspecte de la pregătirea echipei noastre, este reprodusă insigna olimpiadei noastre, este dată lista membrilor echipei și a premianților.

În ziua de 9 iulie s-a depus o coroană de flori la monumentul Buchenwald, toți conducătorii delegațiilor au semnat în cartea de aur, apoi s-a depus cîte o jerbă de flori la coloanele fiecărei țări care a dat jertfe în fostul lagăr.

În seara zilei de 13 iulie, ziarul „Junge Welt" a organizat o întîlnire prietenească a tuturor delegațiilor cu oameni de știință din R.D.G., conducători politici, redactori ai presei de tineret, secretari ai unor organizații de tineret din școli.

În seara zilei de 13 iulie delegația țării noastre a părăsit Berlinul îndreptîndu-se spre Patrie.

EVIDENȚIAȚII CELEI DE-A VII-A OLIMPIADE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

PREMIUL I

Pawel Blecher, Moscova; *Laszlo Lovasz*, Budapesta; *Andrei Subkov*, Moscova; *Sergei Walander*, Leningrad; *Anatoli Peresezki*, Moscova *Nikolai Șirokow*, Leningrad; *Endre Makai*, Budapesta; *Jozsef Pelikan* Budapesta.

PREMIUL II

Alexandr Karsanow, Moscova; *Liliana Bucur*, Sibiu—R. S. România; *Lajos Pósa*, Budapesta; *David Preiss*, Jindrichw Hradec — R. S. Cehoslovacia; *Krzysztof Nowinski*, Legnice — R. P. Polonă; *Alexandru Bădescu*, Ploiești; *Dan Voiculescu*, București; *Wassili Stoianowski*, Moscova; *Jack Weinstein*, Rădăuți — R. S. România; *Istvan Berkes*, Budapesta; *Manfred Brandt*, Berlin; *Wolfgang Klamt*, Berlin.

PREMIUL III

Tamara Marcisova, Bratislava; *Peter Enskonatus*, Berlin; *Zenon Fortuna*, Rzeszów — R. P. Polonă; *Michal Misiurewicz*, Varșovia; *Octavian Bîscă*, Craiova — R. S. România; *Walter Liepe*, Berlin; *Miklós Laczkovich*, Budapesta; *Velimir Bole*, Liubliana; *Gyorgy Elekes*, Budapesta; *Tadeusz Figiel*, Gdansk; *Eugen Popa*, Iași; *Bohus Sivak*, Zvolen — R. S. Cehoslovacia; *Wilhelm Otto*, Grevesmühlen — R. D. Germană; *Miroslav Asic*, Tuzla — R.S.F. Jugoslavia; *Ion Ștefănescu - Sabba*, București; *Iordan Tabov*, Sofia; *Miroslav Reznicek*, Hradec — Kralove — R. S. Cehoslovacia.

DIPLOMA PENTRU REZOLVAREA EXCELENTĂ A UNEI PROBLEME

Time Erkama, Helsinki (pentru problema 4); Awgaanzeren Damdinzuren, Ulan-Bator (pentru problema 4); Krzysztof Nowinski, Legnica — R. P. Polonă (pentru problema 3); Alexandru Bădescu, Ploiești (pentru problema 2); László Lovász, Budapesta (pentru problema 2); Jósef Pelikan, Budapesta (pentru problema 2).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6700

Să se arate că dacă a, b, c sînt numere reale pozitive oarecare iar x, y, z numere reale, avem :

$$\sum [a(1 + yz)\sqrt{1 + x^2}] \leqslant (a + b + c)\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluția I dată de *Niculescu Constantin*, elev Tîrgoviște. — Oricărui număr n îi putem ataşa un alt număr φ, astfel ca $n = \operatorname{tg}\varphi$. Să notăm $x = \operatorname{tg}\alpha$; $y = \operatorname{tg}\beta$; $z = \operatorname{tg}\gamma$. Cei doi membri ai inegalității se mai scriu :

$$E_1 = \sum [a(1 + yz)\sqrt{1+x^2}] = \sum a(1+\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sum \frac{a \cos(\beta - \gamma)}{\cos\alpha \cos\alpha \beta \cos\gamma}$$

$$E_2 = (a + b + c)\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)} =$$

$$= (a + b + c)\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1 + \operatorname{tg}^2\gamma)} = \frac{a + b + c}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.$$

Comparînd E_1 cu E_2 rămîne să arătăm că

$$\sum a \geqslant \sum a \cos(\beta - \gamma)$$

ceea ce este evident. Egalitate avem cînd $\alpha = \beta = \gamma$, adică pentru $x = y = z$.

Soluția II-a dată de *Filipoiu Alexandru*, elev Buzău. — Considerăm într-un caz particular inegalitatea Cauchy-Buniakowsky :

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

şi notăm $a_1 = b_1 = 1$ şi $a_2 = y$, $b_2 = z$ şi deci,

$$(1 + yz)^2 \leqslant (1 + y^2)(1 + z^2).$$

Înmulțind egalitatea cu $a^2(1 + x^2)$ şi extrăgînd rădăcina pătrată din ambii membri deducem :

$$a(1 + yz)\sqrt{1 + x^2} \leqslant a\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

şi analoagele. Prin adunare obținem inegalitatea cerută în problemă.

Problema 6708

Printre parabolele (P) de ecuația $y = ax^2 + bx + c$ se consideră cele ce sînt tangente la dreapta (Δ) de ecuație $x - y + 2 = 0$ în punctul A de abscisă $+ 1$.

a) Să se demonstreze că ecuația acestor parabole (P) se poate scrie $y = a(x - 1)^2 + x + 2$.

b) Să se găsească o relație independentă de a, verificată de coordonatele x, y ale vîrfului V al unei parabole (P) şi să se precizeze locul geometric al acestor vîrfuri.

c) Pentru care valori ale lui a aceste parabole taie axa xx' în două puncte M' și M''? Să se discute în funcție de valorile lui a, semnele absciceselor x' și x'' ale punctelor M' și M''.

d) Să se arate că dacă a variază, M' și M'' rămîn conjugate armonic în raport cu punctele E (−5,0) și F (+1,0).

Soluție dată de *Niculescu Constantin și Filipoiu Alexandru.* — a) Scriem că punctul (1,3) verifică ecuația parabolei și că dreapta $x - y + 2 = 0$ e tangentă parabolei:

$$3 = a + b + c$$
$$(b-1)^2 - 4ac + 8a = 0$$

Rezolvînd în funcție de a, găsim: $b = 1 - 2a$ și $c = a + 2$. Ecuația parabolei (P) este deci:

$$y = ax^2 + (1-2a)x + a + 2 \quad \text{sau:} \quad y = a(x-1)^2 + x + 2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Coordonatele vîrfurilor acestor parabole sînt:

$$x = \frac{2a-1}{2a},\ y = \frac{12a-1}{4a}.$$

Eliminînd pe a găsim că locul lui V este o dreaptă de ecuație

$$(V) \qquad x - 2y + 5 = 0.$$

c) Pentru ca parabolele (P) să taie axa xx' în două puncte distincte M' și M'' trebuie ca

$$\Delta = (2a-1)^2 - 4a^2 - 8a = 1 - 12a > 0$$

adică $a < \frac{1}{12}$; Dacă $a = \frac{1}{12}$ atunci $M' = M''$. Produsul absciselor celor două puncte este $x'x'' = 1 + \frac{2}{a}$, iar suma $x' + x'' = 2 - \frac{1}{a}$. Cînd $a \in (-2,0)$ cele două puncte sînt așezate deoparte și de alta a originii. Cînd $a \in (-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right)$ punctele sînt așezate în aceiași regiune a axei xx'. Cînd $a = -2$, unul din puncte e identic cu originea sistemului de axe.

d) Să arătăm că:

$$(x' + x'')(-5+1) = 2x'x'' - 10$$

Conform punctului precedent avem $x' + x'' = \frac{2a-1}{a}$ și $x'x'' = \frac{a+2}{a}$.

Înlocuind găsim în fiecare din membri:

$$E_1 = \frac{2a-1}{a} \cdot (-4);\ E_2 = \frac{2a+4-10a}{a} = (-4)\frac{2a-1}{a}.$$

Deci, $E_1 = E_2$. Concluzia finală e că punctele M' și M'' sînt conjugate armonic în raport cu punctele $E(-5,0)$ și $F(1,0)$.

Problema 6709

Aplicînd formula creşterilor finite funcţiei $f(x) = ln\ x$, *să se demonstreze că*

$$\frac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln\ n < \frac{1}{n}$$

unde n *este un întreg pozitiv şi să se demonstreze că*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

tinde către $+\infty$ *cînd* n *creşte nemărginit.*

Bacalaureat, Pondichéry

Soluţie dată de *Niculescu Const.*, Tîrgovişte, *Voiculescu Dan*, Bucureşti, *Popescu Eleodor*, Tr. Severin şi *Filipoiu Alex.*, Buzău. — Conform teoremei creşterilor finite putem găsi în intervalul n, $n+1$ un număr c astfel ca :

$$\frac{ln(n+1) - ln\ n}{n+1-n} = f'(c) = \frac{1}{c}.$$

Cum $n < c < n+1$, putem scrie :

$$\frac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln\ n < \frac{1}{n}.$$

Din inegalitatea $ln(n+1) - ln\ n < \frac{1}{n}$, dînd lui n valori de la 1 la n găsim : $U_n > ln(n+1)$, de unde tragem concluzia că atunci cînd n creşte nemărginit, U_n tinde către $+\infty$.

Problema 6728

Fie punctele A, B, C, D *ale unui cerc astfel ca* AB *să fie un diametru, iar* CD *nu. Să se demonstreze că dreapta care uneşte punctul de intersecţie al tangentelor la cerc, duse în* C *şi* D, *cu punctul de intersecţie al dreptelor* AC *şi* BD *este perpendiculară pe dreapta* AB.

(Propusă de R.P.P. la OIM)

Soluţie dată de *Voiculescu Dan*, elev Bucureşti şi *Dăncilă Ioan*, Sibiu. — Deoarece CD nu este diametru rezultă că tangentele în C şi D au un punct de intersecţie. De asemenea AC şi BD au un punct de intersecţie, în caz contrar, ar trebui ca AC şi BD să fie paralele, deci $ACBD$ să fie trapez inscriptibil, adică isoscel, de unde ar urma $AB = CD$, adică, CD să fie diametru, ceea ce e contradictoriu.

Analog dovedim că BC şi AD se intersectează.

Fie deci, $I \equiv (AD, BC)$, $Q \equiv (AC, BD)$ şi P intersecţia tangentelor C şi D. Avem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$, deci I este ortocentrul triunghiului QAB şi patrulaterul $DICQ$ este inscriptibil avînd două unghiuri opuse de 90°. Vom demonstra că I, P, Q sînt colineare.

Avem înainte de toate $PD = PC$ și $\sphericalangle CPD = 180°$ — măs. $\widehat{CD} = 2.(90° - {}^1/_2$ măs $\widehat{CD}) = 2 \sphericalangle DQC$. Deducem de aici că Q se află pe cercul de rază PD și centru P, adică P este centrul cercului circumscris lui CDQ. Dar cercul circumscris lui CQD coincide cu cercul circumscris lui $ICQD$, adică P coincide cu mijlocul lui IQ.

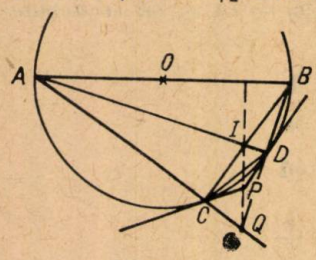


Fig. 1

Problema 6731

Știind că $\sum_{k=1}^{n} a_k = C$, *unde* $a_k > 0$, *iar* C *este o constantă, să se arate că minimul expresiei*

$$E = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a_k} + \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)^2$$

este $\dfrac{(C+n)^2}{C}$. *(În legătură cu problema 6254).*

Bena I. Dorin, Caransebeș

Soluție dată de *Niculescu Constantin*, Tîrgoviște și *Voiculescu Dan* București. — Expresia se mai scrie :

$$E = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k + 1)^2}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k + 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Minimul expresiei E se realizează odată cu maximele numerelor a_k. Și cum

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = C$$

rezultă că expresia E admite un minim cînd

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \frac{C}{n}$$

care este

$$E_{min} = C + 2n + \frac{n}{\frac{C}{n}} = \frac{C\,n^2 + 2nC + C^2}{C} = \frac{(n+C)^2}{C}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 6739

Fie ecuația cu rădăcinile pozitive :

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

Să se arate că

$$a_k \cdot n^k \leqslant C_n^k \cdot a_1^k.$$

Dan Voiculescu, București

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu. — Fie

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

rădăcinile ecuației date. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \text{constant}$ $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$ e maxim cînd $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Același lucru se întîmplă cu produsele analoage. Rezultă imediat că

$$\sum x_1 x_2 x_3 \ldots . x_k = \text{maxim}$$

cînd

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \frac{x_1 + x_2 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \left(\frac{a_1}{n}\right)^k,$$

Ținînd seama de faptul că numărul termenilor însumați în relația precedentă este C_n^k, avem

$$\sum x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_k \leqslant C_n^k \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k$$

și cum $\sum x_1 x_2 x_3 \ldots x_k = a_k$ avem imediat inegalitatea

$$a_k \leqslant C_n^k \left(\frac{a_1}{n}\right)^k$$

din care rezultă inegalitatea din enunț.

Problema 6740

Există un număr z care să poată fi reprezentat în două moduri distincte sub forma : $z = x! + y!$, unde x și y sînt numere naturale și $x \leqslant y$?

(Propusă de R.S.C. la OIM)

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București și *Dăncilă Ioan*, Sibiu. — Fie x' și y' alte două numere ce îndeplinesc relația din enunț. Putem presupune fără a restrînge generalitatea, că $x' < x < y < y'$. Atunci din ecuația : $x! + y! = x'! + y'!$ ar rezulta ecuația

$$1 + \frac{y!}{x!} = \frac{x'!}{x!} + \frac{y'!}{x!}$$

care conține o contradicție : $1\,;\ \frac{y'}{x'}\,;\ \frac{y'!}{x!}$ sînt numere întregi, iar $\frac{x'!}{x!}$ nu este un număr întreg.

Reprezentarea $z = x! + y!$, $(x \leqslant y)$ este deci unică.

Problema 6744

Pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$ se iau punctele A_1, B_1, C_1, D_1 așa fel încît $\frac{AB}{AA_1} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{CD}{CC_1} = \frac{DA}{DD_1} = n$. *Se cere :*

a) Să se determine în funcție de n, valoarea raportului S_1/S unde S_1 reprezintă aria patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$, iar S aria patrulaterului $ABCD$.

b) Să se determine valoarea lui n pentru care S_1 este minim.

Eugen Popa, elev Iași

Soluție dată de *Voiculescu Dan*, elev București și *Niculescu Const.*, elev Tîrgoviște. a) Avem :

$$S_1 = S - S_{D_1AA_1} - S_{A_1BB_1} - S_{B_1CC_1} - S_{C_1DD_1} = S - \frac{AD_1 \cdot AA_1}{AD \cdot AB} \cdot S_{DAB} -$$

$$- \frac{BA_1 \cdot BB_1}{BA \cdot BC} \cdot S_{ABC} - \frac{B_1C \cdot CC_1}{BC \cdot CD} \cdot S_{BCD} - \frac{DD_1 \cdot DC_1}{DC \cdot DA} \cdot S_{CDA} =$$

$$= S - \frac{(n-1)}{n^2}(S_{DAB} + S_{ABC} + S_{CDA}) = S - 2S \cdot \frac{n-1}{n^2} = S\left(1 - \frac{2n-2}{n^2}\right)$$

deci :

$$\frac{S_1}{S} = 1 - \frac{2n-2}{n^2}.$$

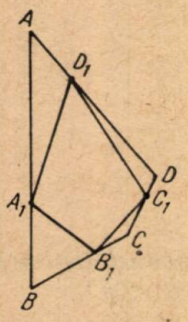


Fig. 2

b) S_1 își atinge minimul cînd $\frac{2n-2}{n^2}$ este maxim. Fie deci, m valoarea lui $\frac{2n-2}{n^2}$; avem :

$$mn^2 - 2n + 2 = 0$$

Cum n este real rezultă $0 \leqslant \Delta = 4 - 8m$, deci, valoarea maximă a lui m este $m = \frac{1}{2}$, căreia îi corespunde $n = 2$.

Problema 6746

O emisiune de radio de 30 minute poate să cuprindă : publicitate, teatru și muzică. Prețurile pe minut sînt : 25 lei pentru publicitate, 100 lei pentru teatru, 125 lei pentru muzică.

a) Să se stabilească alcătuirea unei emisiuni de preț minim, știind că : 1° nu trebie să aibă mai puțin de 3 minute nici mai mult de 15 minute de publicitate, 2° nu trebuie să aibă mai mult de 22 minute de teatru.

b) Să se rezolve problema presupunînd că prețul muzicii e nul, celelalte date rămînînd aceleași.

* * *

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, Sibiu și *Filipoiu Alexandru*, Buzău. Vom nota cu x, y, z minutele destinate publicității, teatrului și respectiv, muzicii.

a) $x + y + z = 30$ și $25x + 100y + 125z = \text{minim.}$,
de unde $x + 4y + 5z = \text{minim.}$

Deoarece nu se specifică numărul minutelor de muzică pentru a reduce prețul de cost al emisiunii, îl facem nul. Trebuie ca $x + 4y = \text{minim}$

şi cum $x + y = 30$, $(z = 0)$, trebuie ca $3y$ = minim, ceea ce în condiţiile problemei se realizează pentru $y = 15$, $x = 15$.

b) În acest caz vom pune cît mai multă muzică. Deoarece $x = 3$, şi despre y nu ni se dă nici o valoare minimă, vom alcătui emisiunea în modul următor : 3 minute publicitate şi 27 minute muzică.

CHESTIUNI DE EXAMEN

7167. Raportat la un sistem de axe ortogonal se dă cercul $x^2 + y^2 - 4y = 0$ şi dreapta variabilă (d) $y = \lambda$.

Dreapta (d) intersectează cercul în punctele A şi B care se proiectează pe axa ox în punctele A' şi B'. Notăm cu M mijlocul segmentului OA şi cu N mijlocul segmentului BM. Se cere :

a) Locul geometric al punctului M.

b) Pentru ce poziţii ale dreptei (d) avem $AN = ON$.

c) Să se calculeze aria dreptunghiului $AA'BB'$ în funcţie de λ, să se studieze variaţia acestei arii şi să se construiască graficul.

d) Să se discute (cu ajutorul teoremei lui Rolle) condiţia ca această arie să fie egală cu k $(k > 0)$.

Examen de maturitate, iunie 1965

7168. Se dă o sferă de rază R căreia i se circumscrie un con circular drept.

a) Dacă se notează cu x înălţimea conului, să se arate că volumul conului este :

$$\frac{\pi R^2 x^2}{3(x-2R)}$$

b) Să se studieze variaţia volumului conului în funcţie de x.

c) Să se determine x astfel ca volumul conului să fie de k ori volumul sferei. Discuţie.

d) Dacă se notează cu α unghiul pe care generatoarea conului îl face cu planul bazei, să se afle aria totală a conului în funcţie de R şi α.

Examen de maturitate, iunie 1965

7169. Se consideră fracţia $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$, unde n este un număr natural mai mare decît 1. Să se arate că divizorii comuni ai celor doi termeni ai acestei fracţii sînt divizori comuni şi pentru $n^2 - 1$ şi 2 şi reciproc. Să se facă următoarele deducţii :

a) Dacă n este par, fracţia este ireductibilă ; b) dacă n este impar, c.m.m.d.c. al celor doi termeni este egal cu 2.

Bacalaureat Maroc, iunie 1963

7170. Fie (C) şi (P) curbele de ecuaţii, respectiv, $y = a^x$ şi $y^2 = 2px$ (unde $a > 1, p > 0$).

a) Să se găsească relaţia (R) pe care trebuie să o satisfacă a şi p, pentru ca curbele (C), şi (P) să fie tangente.

b) Numerele a şi p variind aşa fel ca relaţia (R) să fie satisfăcută, să se determine locul geometric al punctului de contact A al celor două curbe.

c) Să se demonstreze că punctul S, în care tangenta comună în A la cele două curbe taie axa y-ilor, rămîne fix în timp ce a şi p variază ca mai sus.

Journal de Mathématiques Elémentaires, 1965

7171. Se notează respectiv prin a, b, c unghiurile xOy, yOz, zOx, ale unui triedru $Oxyz$ şi prin O măsura diedrului său de muchie Ox.

a) Să se calculeze $\cos\theta$ în funcţie de a, b, c.

b) Se presupune $a = b = c$. 1° Între ce limite poate să varieze a? 2° Punînd $\cos a = x$ şi $\cos\theta = y$, să se studieze variaţia funcţiei $y = f(x)$ cînd a variază în intervalul determinat mai sus. Schiţaţi curba reprezentativă.

Journal de Mathématiques Elémentaires, 1964

7172. Se raportează mişcarea unui punct M la două axe rectangulare Ox şi Oy. Coordonatele sale sînt exprimate în funcţie de timp prin $x = 2t - 1$ şi $y = 2t^2 - 2t + 1$ (în care unităţile sînt secunda şi centimetrul).

a) Să se determine şi să se construiască traiectoria punctului M.

b) Să se calculeze componentele vectorului viteză şi să se construiască acest vector la momentul $t = 1$. Să se calculeze componentele vectorului acceleraţie şi să se arate că acest vector rămîne echipolent unui vector fix, cînt t variază. Să se construiască vectorul acceleraţie la momentul $t = 1$.

c) Să se determine şi să se construiască hodograful mişcării privitor la punctul O.

d) Să se calculeze valoarea absolută a vitezei şi să se indice natura mişcării (accelerată sau întîrziată) cînd t variază de la 0 la $+\infty$.

Bacalaureat Maroc, iunie 1963

7173. Se dau în spaţiu, două puncte fixe distincte O şi A.

a) Să se arate că, mulţimea punctelor M în spaţiu astfel ca $\overline{OA}.\overline{OM} = R^2$ (unde R este o lungime dată), este un plan.

b) Să se precizeze poziţia acestui plan în raport cu sfera de centru O şi rază R, după valorile lui $OA = d$.

Bacalaureat, Réunion, iunie 1964

7174. Se consideră în spaţiu, un triunghi echilateral ABC, de latură a, şi un punct variabil M. Se notează cu D simetricul punctului A în raport cu dreapta BC.

a) Să se demonstreze egalitatea :

$$\overline{MB}.\overline{MC} = AM^2 - \overline{AM}.\overline{AD} + \frac{a^2}{2}\cdot$$

b) Să se găsească succesiv, ansamblul poziţiilor punctului M, aşa ca să avem :

1°) $\overline{MB}.\overline{MC} = AM^2 + \frac{a^2}{2}$; 2°) $\overline{MB}.\overline{MC} = AM^2$; 3°) $\overline{MB}.\overline{MC} = \frac{a^2}{2}$

(*Annales du Baccalauréat*, Franţa 1964)

7175. Un tren electric se compune dintr-un vagon cu motor de 30 tone şi o remorcă de 24 tone. Motorul funcţionează sub un voltaj de 500 V şi primeşte un curent de 250 amperi. El furnizează trenului (cu o pierdere de 20%), energia primită. Trenul urcă o pantă de $4{,}5^0/_{00}$ cu o viteză constantă de 4 m/s.

a) Să se calculeze valoarea forţei motrice şi a rezistenţelor pe care le suportă trenul.

b) În urma unui accident, curentul este întrerupt brusc. Ce mişcare va lua trenul? Se pun în mişcare frînele, care funcţionează numai două minute după întreruperea curentului. La ce distanţă de locul accidentului se găseşte în acest caz trenul? Se admite că rezistenţele pasive sînt independente de viteza trenului.

(*Annales du Baccalauréat*, Franţa 1964)

7176. Se consideră curba (C) de ecuaţie $y = \frac{x^2}{4}\cdot$

a) Să se determine focarul şi directoarea curbei (C); să se traseze această curbă într-un reper ortonormat.

b) Se consideră dreptele (D) de ecuaţie $y = mx + 1$, m fiind un parametru. Să se arate că fiecare dreaptă (D) taie curba (C) în două puncte A şi B, oricare ar fi m.

c) Ce relaţie independentă de m există între abscisele x' şi x'' ale punctelor A şi B? Să se deducă de aci, că tangentele în A şi B la curba (C) sînt rectangulare.

d) Să se dea o demonstraţie geometrică a proprietăţii de perpendicularitate a tangentelor A şi B.

e) Să se determine locul geometric al intersecţiei acestor tangente cînd m variază.

f) Se notează cu F punctul în care D taie axa $y'y$ şi cu E conjugatul armonic al lui F în raport cu A şi B. Să se afle mulţimea punctelor F cînd m variază.

Bacalaureat, Cambodgia, iunie 1964

7177. Să se studieze variaţia funcţiei $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$, perioadă, paritate etc. Să se deseneze curba într-un sistem de axe perpendiculare (vectori unitari : $\bar{i}$ de lungime $3/\pi$ cm pe Ox şi $\bar{j}$ de lungime 1 cm pe Oy).

Să se stabilească ecuațiile tangentelor în punctele acestei curbe de ordonată -1.

Bacalaureat, Tahiti, iunie 1963

Subiectele date la cea de-a 7-a olimpiadă internațională de matematică, ținută la Berlin (R.D.G.), iulie 1965

7178. Să se găsească toate numerele reale x din intervalul $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, care satisfac inegalitățile

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}$$

*R. S. F. Jugoslavia**

7179. Se dă sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ai cărui coeficienți satisfac condițiile :

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt pozitivi,

b) ceilalți coeficienți sînt negativi,

c) în fiecare ecuație, suma coeficienților este pozitivă.

Să se demonstreze că singura soluție a sistemului dat este

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

*R. P. Polonă**

7180. Se dă un tetraedru $ABCD$. Muchia AB are lungimea a, muchia CD are lungimea b. Distanța dintre dreptele AB și CD este d, măsura unui unghi dintre aceste drepte este ω. Tetraedrul este împărțit în 2 părți printr-un plan P, paralel cu muchiile AB și CD. Să se determine raportul volumelor acestor două părți dacă este cunoscut raportul k al distanțelor dreptelor AB și CD la planul P.

*R. S. Cehoslovacia**

7181. Să se găsească toate grupele de cîte 4 numere reale (x_1, x_2, x_3, x_4) care satisfac condiția : oricare dintre numere adunat cu produsul celorlalte trei numere dă suma 2.

*U.R.S.S.**

7182. Se dă un triunghi OAB, al cărui unghi O are măsura $\alpha < 90°$. Dintr-un punct oarecare M (diferit de O) din planul triunghiului OAB, se duc perpendicularele MP pe OA și MQ pe OB. Se notează cu H ortocentrul triunghiului OPQ. Care este locul geometric al punctului H dacă M parcurge :

a) latura AB,

b) interiorul triunghiului OAB.

*R. S. România**

7183. Într-un plan se dau $n \geqslant 3$ puncte astfel ca distanța cea mai mare dintre oricare două puncte, din cele date, este d. Se numesc

* Probleme propuse de profesori din această țară.

diametri ai sistemului de puncte date acele segmente de dreaptă care unesc două dintre punctele date și au lungimea d. Să se demonstreze că numărul acestor diametri nu este mai mare decît n.

*R. P. Polonă**

PROBLEME PROPUSE**)

7184. În triunghiul ABC notăm cu B' și C' respectiv proiecțiile punctelor B și C pe laturile opuse. Paralelele prin B' și C' respectiv la AB și AC se intersectează în A'. Să se afle locul geometric al punctului A' cînd A descrie cercul circumscris triunghiului.

Bucur Liliana, elevă Sibiu

7185. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = x + \frac{4x}{1-x^2} + \frac{16x(1-x^2)}{(1-x^2)^2 - 4x^2} + \\ + \frac{(1-2x-x^2)^2 \cdot (1+2x-x^2)^2 - 16x^2(1-x^2)^2}{x(1-x^2)\,[(1-x^2)^2 - 4x^2]}$$

Mihai Bogza, profesor București

7186. Să se determine: *a*) Locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența unghiurilor sub care se văd două din laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil este egal cu unghiul sub care se taie celelalte, iar suma acelorași unghiuri este egală cu unghiul format de diagonalele lui (se ia unghiul diagonalelor opus celui sub care se taie laturile).
b) Locul geometric al simetricelor vîrfului unghiului celor două laturi față de punctele locului geometric găsit la *a*).

Petrișor Cristu, Sibiu

7187. Să se arate că dacă:

$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \text{ și } (\alpha+\beta)\varphi^2 = A + \alpha\beta$$

atunci avem identitățile:

$$\frac{A-2\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)\varphi} - \frac{\alpha^2(A+2\alpha^2)}{2\beta(\alpha+\beta)^2} - \varphi\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\beta(\alpha+\beta)}\right] = \frac{A}{(\alpha+\beta)\varphi},$$

$$\alpha^2\left\{\frac{\beta(A-2\alpha\beta)}{2\alpha(\alpha+\beta)\varphi} + \varphi + \left[1 + \frac{\alpha(A+2\beta^2)}{2\beta^2(\alpha+\beta)}\right]\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)\varphi}\right\} +$$

$$+ \beta^2\left\{\varphi + \frac{\alpha(A-2\alpha\beta)}{2\beta(\alpha+\beta)\varphi} - \left[\frac{\alpha(A+2\alpha^2)}{2\beta^2(\alpha+\beta)} + 1\right]\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)\varphi}\right\} = \frac{2\alpha\beta A}{(\alpha+\beta)\varphi}.$$

D. R. Gheorghiu, elevă București

---

* Problemă propusă de profesori din această țară.
**) IX (7184–7189); X (7190–7198); XI (7199–7205); S (7206–7216). Soluțiile se primesc pînă la 30 ianuarie 1966.

7188. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2 + 3y^2 + 4xy = 72$$

Laura V. Constantinescu, prof. Sibiu

7189. Într-un triunghi oarecare ABC se înscriu triunghiuri dreptunghice cu ipotenuzele paralele cu baza triunghiului, iar vîrfurile unghiurilor drepte pe baza triunghiului dat. a) Să se determine triunghiul cu ipotenuza minimă; b) Dacă notăm cu i_1, i_2, i_3 ipotenuzele minime corespunzătoare celor trei laturi ale triunghiului, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right);$$

să se verifice relația în cazul $a = 9$, $h = 10$, $c = 17$.

Ion Candrea, Sibiu

7190. Să se afle mulțimea valorilor lui a, astfel ca numărul $N = 44^n + a$, (n — număr natural) să fie divizibil cu 473.

W. Maurer, Sighișoara

7191. Să dă un triunghi ABC înscris într-un cerc de rază R și un punct mobil M pe cercul O circumscris triunghiului ABC. Se duce mediatoarea laturii BC, care intersectează cercul O în punctele P și Q, ($P \in \widehat{BC}$ și $Q \in \widehat{BAC}$), iar laturile triunghiului ABC în punctele D, E, F, ($D \in BC$; $E \in AC$; $F \in AB$).

a) Să se arate că ME/MF = constant; b) Să se arate că există relația $QE \cdot PF/FE = R$.

Ioan Rădoi, Sibiu

7192. Să se demonstreze că pentru orice n întreg și impar, expresia $E(n) = n^7 - 2n^5 + 9n^3 - 8n$ este divizibilă cu 1920.

Mikloș Farkaș, Sighișoara

7193. Fie ABC un triunghi oarecare și D, E, F picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B, C. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{\frac{AF \cdot EC \cdot BF}{AE \cdot CD \cdot BD}} = \frac{AB + AC}{BC + AC} = \frac{S_{AFE}}{S_{CED}} \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{\frac{BD \cdot FA \cdot CD}{BF \cdot AE \cdot CE}} = \frac{BC + BA}{CA + BA} = \frac{S_{BDF}}{S_{AFE}} \cdot \frac{CA}{BC}$$

$$\sqrt{\frac{CE \cdot DB \cdot AE}{CD \cdot BF \cdot AF}} = \frac{CA + CB}{AB + CB} = \frac{S_{CED}}{S_{BDF}} \cdot \frac{AB}{CA}.$$

Albescu Ion, elev Sibiu

7194. Să se rezolve ecuația :

$$a^2 x^4 - 2a(a^2+1)x^3 + (a^2+1)^2 x^2 - (a^2-1)^2 = 0$$

Ion Candrea, Sibiu

7195. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului 7^{1965}

F. Kacsó, student Cluj

7196. Să se discute și să se rezolve ecuația :

$$4(\sin x + m\cos x) = m^2 + 5$$

m fiind un parametru real.

Iulius Ambrozius, Sighișoara

7197. Să se arate că suma puterilor a cincea a $6k-1$ și a $6k-5$ numere naturale consecutive este un multiplu de $6k-1$, respectiv $6k-5$ (și un multiplu al mediei aritmetice a celor $6k-1$, $6k-5$ numere date).

W. Maurer, Sighișoara

7198. Să se arate că dacă

$$f\left(\frac{2\cos x}{1+\cos^2 x}\right) = g(\cos x) \quad \text{atunci} \quad g\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) = f(\cos x).$$

C. Ionescu-Țiu

7199. Se dă $f(x) = \sqrt{8x+2}$. Să se determine x_1; x_2, x_3; ...; x_n astfel ca $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(x_3)$ ... ; $f(x_n)$ să fie numere naturale. Să se calculeze apoi, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Ilie Stănescu, Sibiu

7200. Fie AB o coardă într-un cerc de rază R și (T), (T') tangentele la cerc în A și B. Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct M al coardei AB pe (T) și (T'). Se cere :

a) În cazul cînd M este fix, iar AB variabilă să se arate că media armonică a segmentelor MP și MQ este constantă. b) În cazul cînd AB are lungime constantă și M este mobil pe AB se cere valoarea maximă a aceleiași medii armonice.

Maria Sîrbu, Sibiu

7201. Să se arate că elementele unui triunghi oarecare ABC verifică inegalitatea :

$$128\,R(a\sin A + b\sin B + c\sin C)\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2} <$$

$$< 9(a^2\sin A + b^2\sin B + c^2\sin C)(1 + \cos A\cos B\cos C).$$

Laura Constantinescu, Sibiu

7202. Să se afle regiunea din planul xOy în care se află punctele $M(x, y)$ ale căror coordonate satisfac relațiile

$$|y-2|+|y+2x| \leqslant 4 \quad \text{și} \quad y \geqslant 2|x|$$

Aurel Sîrbu, Sibiu

7203. Pe axele Ox, Oy ale sistemului rectangular xOy se consideră punctele A, respectiv B, variabile astfel încît $OB-OA = k$. Notăm cu M mijlocul segmentului AB. Pe paralela dusă prin M la o a doua bisectoare luăm punctul N, astfel ca $ON = MN$. Să se afle locul geometric al punctului N.

Ilie Stănescu, Sibiu

7204. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghi ABC există inegalitatea : $\cos A + \cos B + \cos C > \frac{7}{8}$.

Marinov Cornel, elev Brașov

7205. Să se deducă inegalitatea :

$$\frac{(p-a)}{c}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\frac{(p-c)}{b}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\frac{(p-b)}{a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}>\frac{\pi}{4}.$$

Laşilă Ileana, elevă Sibiu

7206. Fie MN o dreaptă variabilă paralelă cu baza BC a unui triunghi ABC (M pe AB și N pe AC). Să se arate că locul geometric al punctului P de intersecție ale cercurilor ABN și AMC este simediana din A a triunghiului ABC.

Vasile Vasu, Sibiu

7207. Fie O centrul de simetrie al lemniscatei lui Bernoulli. Considerăm două cercuri ortogonale, ambele trecînd prin O, ambele tangente lemniscatei. Există o infinitate de asemenea perechi de cercuri. Să se găsească locul geometric al centrelor acestor cercuri, cînd ele variază.

Vasile Vasu, Sibiu

7208. Pe cisoida cu vîrful în punctul O, avînd ca axă de simetrie dreapta Ox, se consideră un punct variabil M. Construim două cercuri, ambele trecînd prin punctele O și M, unul cu centrul pe axa Ox, altul cu centrul pe tangenta dusă în punctul M la cisoidă. Cele două cercuri mai taie axa Ox în punctele P și Q. Să se arate că

$$\frac{1}{OQ}-\frac{1}{OP}=\text{constant}.$$

Vasile Vasu, Sibiu

7209. Considerăm numerele reale p și q care care satisfac relațiile : $p + q = k$ și $0 < p < k$. Fie șirul infinit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ definit prin relațiile :

$$u_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}),$$

$$x_{(j+1)m} = \frac{p_j\, x_{jm} + q_j\, x_{j(m+1)}}{k}, \quad (j = 1,\ 2,\ 3, \ldots ;\ x_{j(n+1)} = 0),$$

$$u_i = (x_{i1},\ x_{i2}, \ldots,\ x_{in})\ (i = 2, 3, 4, \ldots).$$

Să se arate că șirul este convergent și are limita

$$u = y_1, y_2, \ldots, y_n$$

unde $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n})$

Dan Voiculescu, elev București

7210. Să se calculeze suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1}$$

a) direct.
b) prin metoda inducției matematice.

Turdășan Vasile, profesor, Cugir

7211. Să se calculeze :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$$

Szollosy Gheorghe, profesor, Sighet

7212. Să se arate că ecuația exponențială

$$e^{\frac{b}{a + bx}} = 1 + \frac{b}{a} \quad (a > 0,\ b > 0)$$

are rădăcina cuprinsă în intervalul (0,1).

Szollosy Gheorghe, profesor, Sighet

7213. Se dă ecuația $x^3 - mx^2 + nx - p = 0$

a) Să se calculeze razele cercurilor circumscris și înscris în triunghiul în care lungimile laturilor triunghiului sînt rădăcinile ecuației date.

b) Să se calculeze raza cercului înscris în cazul cînd rădăcinile ecuației sînt lungimile înălțimilor triunghiului.

Turdășan Vasile, profesor, Cugir

7214. Știind că z_1, z_2, z_3 sînt afixele punctelor M_1, M_2, M_3 să se exprime raza cercului circumscris triunghiului $M_1 M_2 M_3$ cu ajutorul numerelor complexe z_1, z_2, z_3. (În legătură cu articolul din G.M.-B. 1965—p. 391).

O. Sacter

7215. Să se demonstreze că dreptele, care trec prin vîrfurile unui triunghi oarecare și respectiv prin picioarele înălțimilor triunghiului median, sînt concurente.

C. Ionescu-Țiu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII *)

E : **2381.** Într-o magazie s-au depozitat 360 t grîu, iar în alta 90 t grîu. Grîul din prima magazie a fost transportat de un camion în 120 ore, iar grîul din a doua, a fost transportat de alt camion în 36 ore. În cîte ore va fi transportat grîul într-o magazie în care trebuie depozitate 440 t grîu, dacă ambele camioane lucrează împreună?

Filip Cornea, Caransebeș

E : **2382.** Trei persoane iau masa la restaurant și plătesc împreună în total 54 lei. Știind că a doua persoană a consumat cu $\frac{1}{5}$ mai mult decît prima, iar a treia persoană a consumat cît $\frac{7}{11}$ din ce au consumat celelalte două persoane împreună, să se afle cît plătește fiecare persoană.

Al. Tigănoiu, Timișoara

E : **2383.** Un elev a depus la CEC de patru ori mai multe bancnote de 10 lei decît de 100 lei, în total are 700 lei. Cîte bancnote are acel elev, din fiecare categorie?

B. Baieră, Păunești

E : **2384.** O cooperativă agricolă de producție posedă 1014 ha teren. Aria însămînțată cu porumb este de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît cea însămînțată cu grîu; aria însămînțată cu cartofi este de două ori mai mică decît cea însămînțată cu porumb, iar cea însămînțată cu floarea soarelui este cu 84 ha mai mare decît $\frac{2}{3}$ din aria însămînțată cu cartofi. Să se afle aria însămînțată cu fiecare cultură.

B. Mîrzan, Bujoreni

E : **2385.** Să se arate că :

$$(3423_5 - 1542_6)\,(100\,111_2 + 2011_3 - 165_7) = 1002_4$$

unde indicii indică bazele de numerație în care sînt scrise numerele respective.

Vanea Adrian, elev Mediaș

---

*) V (E: 2381—2384); VI (E: 2385—2388); VII (2389—2390); VIII (2391—2393). Soluțiile se primesc pînă la 30 ianuarie 1966.

E : **2386.** La o cantină au fost procurate 144 farfurii mari, 96 farfurii mici, 120 linguri şi 80 linguriţe, pentru care s-a plătit suma de 3536 lei. Altă dată au fost cumpărate 68 farfurii mari, 72 farfurii mici, 84 linguri şi 75 linguriţe şi s-a plăcit 2196 lei. A treia oară s-au cumpărat 134 farfurii mari, 111 farfurii mici, 90 linguri şi 125 linguriţe şi s-a plătit suma de 3536 lei. Ştiind că de fiecare dată preţurile au fost aceleaşi, să se afle costul unei farfurii mari, al unei farfurii mici, al unei linguri şi a unei linguriţe.

Ilie Ludoşan, Braşov

E : **2387.** La o întreprindere a fost distribuită ca premii suma de lei 16 350, astfel : 18 muncitori au primit premiul I, 15 muncitori premiul II şi 12 au primit premiul III. Ştiind că un muncitor prepus pentru premiul II primeşte 7/8 din suma primită de un muncitor propus pentru premiul I, iar un muncitor din categoria III primeşte 5/7 din suma primită de un muncitor propus pentru premiul II, să se afle ce sumă a primit un muncitor propus pentru premiul I, pentru II şi pentru III ?

Iilie Ludoşan, Braşov

E : **2388.** Dintr-un sat au plecat la oraş în acelaş timp un pieton şi un biciclist. Biciclistul ajunge la oraş, îşi face cumpărăturile necesare şi după 1 oră şi 15 min. de la sosire, pleacă înapoi spre sat, întîlnindu-se cu pietonul în punctul C situat la $3\frac{3}{4}$ km de oraş. Să se afle distanţa de la sat la oraş, precum şi vitezele pietonului şi biciclistului, ştiind că la sosirea pietonului în oraş biciclistul a ajuns în sat şi că de la plecare pînă la sosire biciclistul a făcut $3\frac{3}{4}$ ore.

Ilie Ludoşan, Braşov

E : **2389.** Industria constructoare de maşini din ţara noastră în anul 1963 a produs cu 2174 maşini-unelte pentru aşchierea metalelor mai mult decît în 1959. Jumătate din producţia anului 1963 este cu 471 maşini unelte mai mică decît cea din 1959. Să se afle cîte maşini unelte s-au produs în cei doi ani şi cu cît la sută a crescut producţia acestora în intervalul 1959—1963.

Ilie Purece, Sibiu

E : **2390.** Numărul autovehiculelor, tractoarelor şi locomotivelor Diesel electrice luate la un loc produse în 1963 în ţara noastră este de 33523 bucăţi. Numărul autovehiculelor întrece pe cel al tractoarelor cu 6884, iar dacă numărul locomotivelor Diesel electrice ar fi mai mare cu o bucată, raportul dintre numărul tractoarelor şi numărul locomotivelor Diesel electrice astfel obţinut ar fi 221, 5. Cîte tractoare, autovehicule şi locomotive Diesel electrice s-au produs în 1963 în ţara noastră ?

Ilie Purece, Sibiu

E : **2391.** Petru îi spune lui Ion : în prezent eu sînt de trei ori mai în vîrstă de cît ai fost tu cînd eu eram la vîrsta ta. Dacă aşi avea cu 5

ani mai puțin, atunci aș fi de cinci ori mai în vîrstă decît erai tu atunci, cînd eu eram de trei ori mai în vîrstă decît tine. Cîți ani are Petre și Ion?

Mikloș Farkaș, Sighișoara

E : **2392.** Să se descompună în factori expresia :

$$F = (a + b)(b + c)(c - a) + (b + c)(c + a)(a - b) + (c + a)(a + b)(b - c)$$

V. V. Pravăț, student Iași

E : **2393.** Să se construiască un cerc de rază dată care să fie tangent la o dreaptă dată și să treacă printr-un punct fix.

D. Mîrzan, Bujoreni

DIN ACTIVITATEA CERCURILOR DE ELEVI AI CLASELOR A VII-A DIN ORAȘUL BRAȘOV

de *Al. Corniciuc*, profesor Brașov

Dat fiind că interesul elevilor pentru matematică se manifestă încă din clasele mici, Filiala Brașov a S.S.M. organizează de trei ani cercuri de matematică pentru elevii cl. VIII-a (în anul școlar 1964/65 s-au organizat cercuri cu elevii cl. VII-a și cu elevii cl. VIII-a separat). Scopul urmărit de aceste cercuri este multiplu. Mai întîi sînt cunoscuți elevii care manifestă interes pentru matematică încă de mici, apoi ei sînt atrași pe linia activității de formare : își dezvoltă gîndirea logică, atenția, imaginația spațială, perseverența și își formează deprinderi de calcul corect și rapid — toate acestea sub îndrumarea profesorilor de specialitate.

Rezultatele obținute în activitatea cercurilor elevilor cl. VIII-a au confirmat faptul că formarea interesului pentru matematică trebuie începută din timp și că în raport cu vîrsta și cunoștiințele teoretice acumulate, elevul trebuie să lucreze ; lucrînd să aplice aceea ce a învățat și să învețe în același timp ceea ce apare nou în problemă, să se formeze treptat pentru a putea asimila chestiuni din ce în ce mai grele. Rezultatele au mai confirmat faptul că elevii care au lucrat cu interes în cercul cl. VII-a, lucrează cu rezultate mai bune în cercurile de elevi ale claselor următoare. Filiala Brașov și-a propus să urmărească rezultatele acestor elevi pînă în cercurile studențești de pe lîngă institutele de învățămînt superior, unde unii dintre ei își vor continua studiile.

În cele ce urmează ne ocupăm numai de organizarea și activitatea cercurilor de elevi ai claselor a VII-a, prezentînd aspecte concrete de organizare, desfășurarea unei ședințe, atmosfera de lucru în ședințe și activitatea membrilor cercurilor la *Gazeta Matematică seria B*.

Înscrierea elevilor în cercurile de matematică s-a făcut respectîndu-se pregătirea lor la matematică și dorința elevului. Astfel, în cercurile pe oraș au fost înscriși elevii cei mai buni la matematică, cu media anuală în cl. VI-a de 9 și 10 și care au manifestat dorința de a lucra în cerc, în cercurile pe școală media anuală fiind 8. Înscrierea s-a făcut cu recomandarea profesorului școlii și a conducerii școlii căreia aparținea elevul.

În oraș, în cei trei ani despre care vorbim au existat pentru elevii cl. VII-a patru cercuri : două cu limba de predare romînă, unul pentru elevii germani și unul pentru cei maghiari.

Conducerea cercurilor a fost atribuită de către Filiala S.S.M. a regiunii Brașov și Secția de învățămînt a orașului, profesorilor cu experiență, în cadrul cercurilor lucrînd și profesorii școlilor de la care proveneau elevii.

Activitatea cercurilor s-a desfășurat după un plan de muncă întocmit de colectivul de profesori ai cercului, la începutul anului, în plan fiind cuprinse : datele ședințelor cercului, tema cercului, numele profesorului care conduce ședința și numele profesorului care propune probleme pentru cercul următor.

Planurile de muncă au fost aprobate la începutul anului, de către filială și secția de învățămînt a orașului.

Planurile de muncă ale altor şedinţe au mai cuprins : rezolvarea problemelor distractive de aritmetică şi geometrie, discuţii asupra aspectului neştiinţific al unor credinţe şi lupta împotriva misticismului, precum şi lucrări practice de confecţionarea materialului didactic.

Fiecare cerc are un caiet în care se consemnează activitatea. Caietul cuprinde : organizarea cercului, evidenţa participării elevilor la cerc, planul de muncă al cercului, procesele verbale de desfăşurarea şedinţelor care cuprind : textul problemelor rezolvate, numele rezolvitorilor (fiecare cu soluţia lui), soluţiile date, discuţiile purtate şi soluţia cea mai bună adoptată de şedinţă.

Pentru ilustrarea activităţii prezentăm o şedinţă completă de la cercul nr. 1 (9.II. 964 din planul de mai sus).

În sprijinul temelor din plan, cu o lună înainte au fost propuse un exerciţiu şi două probleme, pe care elevii le-au prezentat la tablă. Înainte însă, de aceasta, s-a rezolvat o problemă de aritmetică cu fracţii şi capacitatea unui vas (problema: E2075 din G.M.F.—B nr. 12/1963) :

Dintr-un vas cu capacitate de 90 litri se scoate $\frac{1}{6}$ *din alcool completîndu-se cu apă. Din amestec se scoate iar* $\frac{1}{5}$ *completîndu-se cu apă. Din noul amestecul se mai scoate* $\frac{1}{4}$ *completîndu-se cu apă. Cît alcool există în vas după aceste operaţii, dar apă?*

Problema a fost rezolvată de aproape toţi elevii din cerc.

S-a rezolvat apoi exerciţiul E : 1922 din G.M.F.—B nr. 12/1962, autor prof. C. Ionescu-Ţiu.

Să se arate că: $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{200}=\sqrt{722}$

$$\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{50}-\sqrt{32}=\sqrt{200}-\sqrt{162}=\sqrt{2}$$

În legătură cu acest exerciţiu s-au purtat discuţii privind forma de redactare a rezolvării. Unii elevi au lucrat descompus, iar alţii direct, precum şi în legătură cu $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+10\sqrt{2}=19\sqrt{2}$ şi în legătură cu $3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. S-a ajuns la aprofundarea regulii de scoatere a factorului comun, $\sqrt{2}$ fiind factor comun în produsele care s-au adunat şi scăzut.

Ca aplicaţie a teoremei lui Thales s-a lucrat o problemă cu linia mijlocie a triunghiului, problema nr. E : 2049 din G.M.F. B nr. 10 din 1963 :

Fie M *un punct în planul unui triunghi. Să se demonstreze că simetricele lui* M *faţă de mijloacele laturilor triunghiului formează un triunghi egal cu cel dat.*

Toţi membrii cercului au rezolvat problema în acelaşi mod.

Ultima problemă rezolvată în cerc a fost o aplicaţie a cunoştinţelor elevilor cu privire la asemănarea triunghiurilor şi a teoremei lui Thales. (S-a rezolvat problema nr. 130 pag. 94 vol. I din „Geometrie plană" de Jacques Hadamard).

Fie $a = AB$, $b = CD$ *bazele unui trapez. Împărţim una dintre laturile neparalele în raportul* $\frac{EA}{EC}=\frac{m}{n}$ *iar prin punctul E ducem o paralelă la baze. Să se arate că segmentul de pe această paralelă cuprins în interiorul trapezului este egal cu* $\frac{m.CD+n.AB}{m+n}$. *Să se considere cazul în care E este mijlocul lui AC.*

După ce şi ultima problemă a fost rezolvată şi discutată, profesorii care urmau să lucreze în şedinţa următoare a cercului au propus problemele :

1°. *Ce cantităţi de acid cu concentraţia de 80% şi acid cu concentraţie 15% trebuie să se amestece pentru a prepara 4 kg acid cu concentraţie de 20%.*

2°. *Avem un triunghi ABC oarecare înscris într-un cerc O. Paralele duse prin B şi C la AC şi AB intersectează tangenta în A la cercul O, respectiv în M şi N. Să se arate că există relaţiile :* $AM \cdot AC = BC \cdot AB$ şi $AN \cdot AB = BC \cdot AC$.

3° *Un patrulater ABCD are diagonalele perpendiculare şi unghiul* $A = 90°$. *Se cunosc lungimile diagonalelor :* $AC = 8{,}4$ *m,* $BD = 12{,}5$ *m, lungimea laturii* $AB = 7{,}5$ *m. Să se calculeze perimetrul patrulaterului.*

Prezentarea de mai sus este o copie fidelă a felului în care s-a lucrat şi se lucrează într-un cerc al elevilor cl. VII-a, în prezent cl. VIII-a, la care adăugăm că atmosfera de lucru creată deja în cercuri diferă de aceea din orele de curs. Elevii rezolvă acasă independent problemele propuse, iar în şedinţa cercului se prezintă metode diferite de rezolvare, adoptîndu-se metoda cea mai bună. Profesorul conducător, intervine doar cînd este nevoie, intervenţia fiind de natură să îndrumeze.

În general, în cercuri există o atmosferă de încredere în puterile proprii, în acelaşi timp de autocritică şi de autocontrol. Soluţia problemei obţinută pe o cale mai directă, prin calcule mai simple este împărtăşită în şedinţă prin discuţii.

La multe probleme rezolvate de colegi, membrii cercului își apreciază cu severitate metoda de lucru, adoptînd ceea ce este superior și retușînd ceea ce nu corespunde. A început astfel, să dispară din rîndul membrilor cercului, individualismul îngust și își face treptat loc interesul sănătos al căutării, al cercetării colective.

În intervalul dintre ședințe, precum și în timpul vacanțelor membrii cercului de elevi al cl. VII-a lucrează și alte probleme decît cele propuse în cerc. Parte din mebrii celor patru cercuri au devenit rezolvitori la „*Gazeta Matematică seria B* (În anul 1963 și 1964 pînă la 1 iulie, 57 elevi au trimis la Gazetă, 635 probleme rezolvate) Începutul modest pare promițător. Dacă după 3 ani rezultatele cercului de elevi sînt mulțumitoare, sperăm ca ele să devină bune și foarte bune în anii ce vor urma.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare, soluții bune primite pînă la 15 iunie 1965)

OR. Dr. Petru Groza. Cl. XI. Lazăr Nicolae (6751, 2, 5—7, 61, 3, 91, 5, 7, 9, 802).

ORAȘUL Gh. GHEORGHIU DEJ. *S. m. 1* cl. VIII. Galaski Peter (E : 2300, 7—14, 6, 9, 20, 1 ; 6781—3, 6, 8, 90, 1, 3—9, 847, 8, 62, 4, 6, 79—81), Köpesiri Andrei (E : 2281, 2, 8, 90, 1, 4—6, 9, 301, 2, 7, 864) Cl. XI. Șerban Nicolae (6666, 7, 70, 2, 4—6, 8, 80, 2, 5, 98, 709). *S. m. 2* cl. XI. Ganea Gabriel (6751, 2, 5—7, 61, 3, 4, 6, 7, 802, 3).

ORAȘUL VICTORIA Cl. IX. Moisin Mihai (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 3, 5, 95, 8, 710, 2, 56, 6, 20, 2, 3, 4, 6, 8, 35).

ORAVIȚA. *S. g. 1* cl. VIII. Jana Rodica (E : 2281, 94—6, 307, 8, 11, 26). S. m. cl. X. Florescu Florian (6667, 70, 1, 3, 4, 6—8, 80—3, 5, 6, 95, 8, 710, 1, 5, 20, 2, 4).

ORLEȘTI (Argeș). *S. g.* cl. VI. Florescu Constantin (E : 2265, 8, 9, 71, 80, 94, 5, 301), Preoteasa Valentin (E : 2282, 3, 93—6, 9, 301, 2, 7, 8). Cl. VIII. Jitianu Maria (E : 2248, 52, 4, 63, 5, 6, 8, 70—2, 9, 80), Mazilu Maria (E : 2248, 50, 2—4, 63, 5, 6, 8, 70—2, 80), Stănculescu Filofteia (E : 2248, 52, 4, 63, 5, 6, 8, 70—2, 80).

ORȘOVA. *S. m.* cl. VI. Beck. Walter (E : 2248, 9, 50, 4, 5, 8—70), Coșovei Vasilica (E : 2248, 9, 50 4, 65, 6, 8, 9), Mustocilă Doina (E : 2248—50, 65, 6, 8—70), Petrescu Nicolae (E : 2248—50, 65, 6, 8—70). Cl. VII. Laub Eleonora (E : 2248, 50, 7, 8, 65, 6, 8, 80), Marincovici Nicolae (E : 2248, 54, 65, 8, 72, 86, 7, 301), Miloș Tatiana (E : 2265, 8, 86, 7, 8, 94, 6 300), Sperdea Rodica (E : 2248, 54, 8, 65, 8, 86—8, 300). Cl. VIII. Mageriu Oana (E : 2248, 50, 8. 61, 3, 6, 8, 75), Stoișici Miodlog (E : 2289, 90, 7, 300—3, 5, 6, 19—21, 47, 8, 50, 62, 4, 79, 81), Cl. IX *serală*. Erimescu Ion (6812, 41, 8, 50- 1, 62, 4, 5). Cl. X. Cercel Remus (6752, 7, 812, 48—50, 2, 4, 7, 62—5, 7—9, 79), Croiciu Dan (6796, 7, 803, 47—50, 2, 4, 7, 9, 67), Frumosu Nicolae (6747, 50, 2, 3, 7, 62—4, 97, 9, 879, 81), Moescu Pavel (6752, 7, 63, 97, 9, 812, 47—9, 52, 9, 62, 4, 5, 7—9).

OȚELUL ROȘU. Cl. VII. Neicu Cezar (E : 2282, 3, 6, 9, 300). Cl. IX. Tuican Floare (6720—2, 5, 50, 7, 8, 60, 4, 5, 76, 802, 11, 4, 5, 40, 7—51, 5, 6, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 2, 9, 81, 4). Cl. XI. *Năvligu Ioan* (6666, 7, 70—82, 4, 9, 90—8, 700, 1, 3, 6, 7, 9—11, 3—6, 20, 2, 6, 35, 7, 48).

PANCIU. *S. m.* cl. VII. Ioniță Marin (E : 2265—8, 74, 6, 81, 6—8), Luca Georgeta (E : 2281, 6, 8, 91, 4, 6, 7, 9, 300, 2), Popa Dan (E : 2265—73, 5—7, 80, 6, 7), Popa Marcel (E : 2265—71, 3, 4, 7, 8, 80, 1, 6, 7), Vidrașcu Dorina (E : 2266, 9, 75, 7, 80, 1, 3, 6—8). Cl. X. Fătu Ion (6667, 50—3, 5—7, 9, 61, 3, 4). Cl. XI. Tudorache Ion (6666, 7, 70—8, 80, 2, 4, 5, 91, 2, 5, 706, 10, 1, 3, 5, 12, 4).

PARVA (Cluj). *S. g.* cl. VIII. Pop Teodora (E : 2248, 65, 6, 71, 81, 3, 94, 6, 9 ; 6720, 2). Rus Anton (E : 2258, 65, 6, 71, 81, 3, 94, 6, 9 ; 6720, 2), Scurtu Vasile (E : 2258, 65, 6, 71, 5, 8, 81, 3, 720, 2).

PĂTÎRLAGELE (Ploiești). *S. m.* cl. VI. Popescu Cornel (E : 2265, 8, 80, 2, 91, 3—5, 9, 300—2). Cl. IX. Mirică Nicolae (6649, 84, 93, 715, 20, 2, 3, 5, 6, 87, 91), Neacșu Dumitru (6677, 80, 710, 5, 20, 2, 35, 50, 9, 76, 87, 9, 80, 90). Cl. X. Bîrjoveanu Constantin (6750—2, 5—7, 9, 61 3, 82, 7, 8), Popa Dumitru (6670—7, 80, 5, 715, 20, 2, 4, 36), Pașoiu Constantin (6710—6, 20, 2—5, 32, 3, 5—7, 41, 8), Toma Florin (6710, 5, 6, 20, 1, 2, 4, 6, 33, 5, 6, 48). Cl. XI. *Andrei Titus* (6678, 84, 89, 92, 3, 703, 11, 5, 6, 20—5, 32, 3, 5—9, 45, 8, 50, 1, 3—7, 59, 61—4, 76, 82, 3, 8, 90, 1, 4), Georgescu Gh. (6670, 1—3, 5—7, 95, 711, 5, 20, 2, 4, 6, 35), Pavel Dumitru (6684, 92, 3, 8, 709—11, 3, 5, 6, 20—2, 4, 6, 32, 3, 5—8, 41, 5, 7, 8, 50, 1, 3—5, 7, 9, 61—4, 76, 80, 2, 6, 8, 90, 1, 4).

PĂUNEȘTI (Bacău). S. g. cl. VI. Anghel N. Aneta (E : 2250, 4, 65, 6, 8, 70, 1, 4—8, 80, 2, 3, 6—8), Conduraru Maria (E : 2252, 4, 8, 65, 6, 9—71, 8, 82, 3, 6—8, 91, 7), Ignat Viorica (E : 2250, 2, 5, 8, 66, 9, 70, 5, 6, 80, 2, 3, 6—8, 97, 9), Neagu Viorica (E : 2249, 60, 2, 6, 9—72, 4, 6, 81, 2, 6—8, 91—5), Nica Lucica (E : 2260, 6, 8, 71, 4, 5, 80, 3, 6, 8, 11, 3—5, 9), Novac Maria (E : 2260, 4, 6, 70, 1, 4, 7, 8, 82, 3, 6, 8, 91—4, 6, 9), Sandu Mariana (E : 2250, 4, 8, 60, 6, 70, 1—4, 6, 83, 92). Cl. VII. Berbece Maria (E : 2251, 2, 4, 6, 7, 62, 6, 70, 1, 3, 5—7, 82, 3), Gheorghiu Gabriela (E : 2252, 5, 7, 9, 60, 5, 6, 8, 74—8, 80, 2, 3, 6, 7, 91, 2), Novac Maria (E : 2251, 6, 7, 60, 4—7, 9—71, 4—7, 80—3, 6, 8), Rizuc Rodica (E : 2256, 7, 60, 6, 70, 1, 4, 7, 80—3, 6—8, 91, 2, 4—6). Cl. VIII. Bacalu Lucica (E : 2252, 60, 6, 70, 1, 4—7, 9, 80, 1—3, 7, 90, 1, 4), Banciu Virginica (E : 2254, 7, 60, 6, 9, 71, 6, 81, 6—8, 90—2, 4), Berbece Maria (E : 2249, 50, 6, 61, 5, 6, 8, 71, 6—8), Gîdea Otilia (E : 2252, 6, 64, 7, 9, 75, 6, 9, 80), Neagu Elena (E : 2252, 5, 7, 66, 70, 1, 4, 79—83, 6, 8, 90, 1, 6), Popa Ionel (E : 2254, 7, 8, 70, 5, 7, 80), Sandu T. Victorița (E : 2256, 7, 60, 9, 1, 6, 7, 9, 81, 2, 6—8, 90, 1, 2, 6), Vișan Ștefan (E : 2254, 60, 6, 70, 1, 4—7, 81—3, 6, 8, 90—4).

PECIU NOU (Banat). Cl. X. Stoianovici Radislav (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 32, 5, 6, 99, 824).

PEȘTEANA JIU (Oltenia). Cl. X. Munteanu Victor (6755, 97, 847, 9, 52, 4, 9, 62, 4, 6, 8, 9, 79—81, 8).

PETRILA (Hunedoara). Cl. IX. Cețan Nicolae (6667, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 92, 710, 1, 20, 35, 42).

PETROȘANI. *S. g.* cl. VI. Duda Iordan (E : 2250, 2, 4, 9, 65, 6, 74, 8). Cl. VIII. Alexandrescu Emil (E : 2265, 6, 8, 9, 80—3, 5, 90, 1, 4—6, 9, 300—2), Cantacuzino Smaranda (E : 2247, 8, 86, 93, 6, 307, 9, 11, 3, 6), Făină Mihail (E : 2280, 91—6, 301), Lazăr Lucia (E : 2265, 8, 9, 73, 7, 80, 91—6, 300—2, 4; 6787), Ronai Adrian (E : 2269, 71, 80, 2, 7, 91—6, 301, 2, 724, 87), Strochi Lucian (E : 2265, 9, 80, 1, 3, 91—6, 9, 300—2), Ștefan Mircea (E : 2265, 8, 9, 76, 8, 80, 3, 90, 3, 4, 6, 9, 301, 2, 720, 2), Victoria Maria (E : 2249,50, 6, 7, 63, 7, 8, 70, 8, 720, 2), Volintiru Cleopatra (E : 2261, 3, 5, 8, 77, 9, 81, 720, 2, 4, 9, 42). Cl. IX. Onciu Teodora (6670, 1, 3, 6, 7, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 51, 6—8, 64, 76), Paicu Nicolae (6710, 4—6, 20—2, 4—6, 33, 5, 6, 50, 1, 5—61, 3, 4, 82, 6, 9, 93, 5, 7, 9, 802, 11—3), Pîrîianu Sorin (6750, 8, 64, 80, 7, 9, 91, 4, 802, 11, 35, 40, 1, 7—52, 5, 6, 62—70, 8—81, 3, 4, 8, 916, 8), Cherciu Valeriu (6751, 2, 7, 63, 76, 97, 8, 803, 47, 9, 54, 64, 79, 81, 4), Joni Nicolae (6666, 7, 70, 710, 5, 6, 20, 2, 35, 51, 4, 6), Martinovici Mihai (6670—8, 80, 95, 6, 8, 710, 1, 5, 6, 720, 2, 4, 35, 51, 2, 5, 7, 61, 3). Cl. XI. *Boulescu Titel* (6670, 1, 3—6, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35, 56, 7, 62, 97, 847—50, 62, 4, 5, 9, 79, 81, 4, 8, 96, 927, 31, 4, 7, 9, 41, 4, 6, 9, 50, 1).

PIATRA NEAMȚ. Cl. VI. Nechită Neculai (E : 2248—54, 68, 74). Cl. VIII. Ioinovici Adrian (E : 2281—3, 8, 90, 2,6, 9—303, 5, 6; 6847, 62, 4, 8, 79, 81, 927, 31—4).

PÎNCOTA (Banat). *S. m.* cl. VII. Chebeleu Rodica (E : 2248, 50, 9, 68, 70, 8, 82, 3), Iormoș Constantin (E : 2248—50, 4, 7, 8, 68, 77), Cl. IX. Cheneleu Petru (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 715, 35, 50, 7, 60, 4, 88, 91, 5, 802, 40, 7—51, 6, 62—70, 8, 9, 81, 3, 4, 8). Cl. XI. Ardelean Vasile (6666, 70—7, 80, 2, 92, 3, 5, 7, 8, 701, 11, 5, 20, 2, 35).

PISCHIA (Banat). *S. m. 2* cl. X. Junkert Erna (6795, 7, 9, 801—3, 47, 9, 53, 4, 9, 62, 5, 89, 70, 81, 4, 7).

PITEȘTI. *S. g. nr. 10* cl. VI. Mînduțeanu Dan (E : 2265, 8, 73—8, 80). *S. g. nr. 17* cl. VII. Patriche Dorinel (E : 2283, 92, 4—7, 307—9). *S. m. 1* cl. IX. Lazăr Mircea (6683, 5, 7—10, 1, 5, 6, 20—2, 6, 35, 50, 8, 61, 4, 76, 8, 62, 7, 94, 802). *Rubinstein Magda* (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 6, 720—2, 4, 5, 33, 5, 50, 8—60, 4, 88, 96, 802, 11, 4, 40, 7—51, 6, 62, 4, 5, 7, 70, 9, 81, 4, 8), Stoica Vasile (6750, 2, 7,—61, 4, 5, 8, 83, 91, 4), Somîndroiu Elena (6671, 4, 7, 80, 1, 4, 710, 5, 6, 21, 6). Cl. X. Ancăr Simona (6670, 1, 3—7, 80, 2, 95, 7, 715, 6, 20—2, 4, 35, 63), Bulat Alina (6711, 6, 20, 2, 51—3, 5—7, 63, 4, 82, 96, 7, 9, 801—3, 17, 47, 50, 4), Butoianu Vasile (6755—61, 3, 4, 90, 6, 7, 9, 801—3, 8, 11—3, 7, 8), Dobrescu Eugen (6670—4, 6, 10, 5, 22, 35, 55—7, 63, 97, 847, 8, 50), *Minasian Eduard* (6680, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 5, 35, 6, 48, 50—3, 5, 6, 8, 63, 4, 82, 96—7, 801—3, 11, 24, 9, 40, 7—54, 6, 9, 62, 5, 7—70, 8—81, 4), Neacșu Marioara (6711, 4, 20, 2, 35, 52, 4, 5, 8, 61, 3, 4), Nicolescu Cornel (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 50—2, 5—61, 3, 96, 7, 9, 801—3, 11, 51, 2, 4), Opran Ștefan (6670, 1, 4, 6, 80, 3, 710, 1, 22, 51, 5—7, 61—4, 97, 9, 84, 7, 54, 71), Pătru D. Elena (6670, 1, 3—7, 80, 2, 710, 1, 3, 6, 20, 2, 35, 48, 51—3, 5—7, 9, 61, 3, 88, 91, 5, 7, 802, 3), Pietreanu Cristian (6750—2, 5—7, 60, 1, 3, 91, 7, 9, 802, 29, 31), Popescu Florea (6710, 1, 6, 26, 35, 5, 51, 5, 7, 60, 3, 4, 6, 91), Rădulescu Virginia (6710, 1, 5, 20, 2, 35, 51, 2, 5, 7, 9, 63), Șterian Marian (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 715, 6, 20, 4), Tănăsescu Nicolae (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 7, 10, 1, 5, 6, 20, 2, 35), Topologeanu Marian (6670, 1, 3—7, 85, 6, 710, 5, 35). Cl. XI. Barbu Gheorghe (6670, 1, 3, 5, 10, 1, 3, 5, 754, 7, 62, 3, 74, 6), Tănăsescu Didona (6674, 713, 5, 6, 20, 2, 50, 1, 3—5, 9, 61, 3). *S. m. 2* cl. X. Grigore Mihai (6750, 2, 7—61, 3, 4, 96, 9, 802), Preda Vasile (6711, 21, 6, 32, 50 ,1, 2, 5—9, 61, 3, 4, 70, 82, 8, 90, 1, 5, 7—9, 801, 2, 8). Cl. XI. Negoescu Ana (6670, 2—5, 7, 711, 3, 5, 20, 2, 6, 51, 6, 63). *S. m. 3* cl. X. *Nistorescu Constantin* (6750—

—3, 5—60, 1, 3—5, 71, 4, 8, 82, 3, 8, 93, 5—8, 80—13, 9—11, 3, 5,7—9, 23—5, 9). Absolvent Florea Anton (6715, 5—7, 62—4, 800, 2, 47, 50, 62, 4, 5, 79, 81, 4, 927, 31, 46).

PLOIEȘTI. *Ș. g. 1* cl. V. Miu Gabriela (E : 2235, 8, 47, 8, 50, 65, 8, 70). S. g. 9 cl. VII. Vasilescu Ileana (E : 2265, 8, 80, 93, 4, 6, 9, 301). Cl. VIII. Moisescu Valeria (E : 2248, 52, 4, 5, 7, 8, 65, 70, 6, 20). Ș. g. 10. Vișan George (E : 2282, 3, 91, 3—6, 9, 301, 2). Ș. g. 13. Tiprigan Carmen (E : 2282, 3, 91, 4—6, 301, 2, 7, 8). *Ș. g. 21* cl. VII. Turțudan Florin (E : 2294, 6, 7, 9, 301—3, 5). Cl. VIII. Andrei Dorina (E : 2266, 76, 83, 94—6, 9, 301, 2), Circioagă Teodora (E : 2275, 6, 93—6, 300, 1, 2, 7, 12, 9, 21 ; 6783, 7, 50), Cristea Dobrița (E 2268, 9, 76, 7, 80, 91 ; 6720, 2), Nicolescu Laurențiu (E : 2282, 3, 91, 4—7, 25), Stoica Georgeta (E : 2293—6, 9, 300, 3, 5), Șerban Sonia (E : 2254, 8, 76, 82—3, 67), Toma Liviu (E : 2273, 5, 93—6, 9, 30—2), Vlad Nicolae (E : 2248, 50, 1, 7, 63, 5, 8, 74, 5, 8, 80). *Ș. m. 1* cl. VI. Costache Dorin (E : 2282, 8, 99, 301, 2, 25, 7, 8, 33), Nicolescu Rucsandra (E : 2282, 3, 93, 6, 7, 9, 301, 2, 7). Cl. VII. Grigorescu Nicolae (E : 2282, 3, 91, 2, 4—6, 9, 301, 2), Olteanu Gheorghe (E : 2281—3, 6, 92, 4—6, 9), Petra Cristina (E : 2234, 40, 3, 8, 50, 6, 8, 77). Cl. VIII. Dobrescu Laurențiu (E : 2282, 3, 91, 4—6, 301, 2), Grünberg Ianos (E : 2266—9, 71, 8, 80, 90), Iordache Sorin (E : 2281—3, 91, 3—6), *Popescu Mariana* (E : 2249—55, 7, 9, 61, 4, 6, 9, 70, 1, 3, 4, 7, 8, 81—6, 91, 2 ; 6670, 3, 4, 6, 715, 16, 20, 2, 6, 54). Cl. IX. Dinescu Iulian 6715, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 50, 7, 8, 64, 82, 95, 812), Dragomirescu Cezar (6750, 2, 7, 8, 60, 3, 88, 91, 8, 9, 802, 13, 5), Ionescu Lucian (E : 2280, 710, 5, 6, 20, 2, 35, 50, 7, 8, 64, 82, 91, 9, 802, 12, 8, 9), Neguț Gheorghe (6714, 27, 44, 50, 1, 5, 7—61, 3, 80, 2, 9, 95, 802, 12, 47—9, 62, 4—70, 9, 81, 7, 90), *Nicolescu Aurelia* (6757, 64, 82, 802, 12, 3, 5, 8, 9, 40, 7—50, 62, 4, 7—71, 9, 81, 3, 4, 920, 7, 31, 2, 4, 8, 42, 6, 9, 57), Olteanu Raluca) (6757, 64, 78, 87, 91, 847, 8, 62, 4, 7, 79, 81), Petrescu Florian (6757, 64, 82, 91, 812, 8, 62, 4, 9, 71, 81, 8). Roman Dan (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81—6, 720, 2, 4, 8), State Adrian (6670, 1, 3, 6, 80—2, 5, 715, 20, 2, 4, 6, 9, 35), Topciu Anca (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 716, 20, 2). Cl. X. Aldea Maria (6710—2, 5, 47, 8, 51, 3, 5, 78, 63, 4, 76, 80, 3, 6, 90, 1, 3), Alboteanu Radu (6670—85, 98, 710, 5, 6, 20, 2, 33, 5, 50—2, 5, 7, 9, 61, 3), Apostolescu Dan (6672, 81, 91, 6, 710, 1, 5, 6, 20—2, 4, 9, 35, 6), Atofanei Ramiro (6670—85, 93, 5—7, 700, 10, 5, 6, 20—2, 4—6, 33, 5, 6, 8, 51, 5, 7, 8), Bărbulescu Teodora (6670—4, 8, 9, 85, 711, 5, 20, 2, 6, 48), Bizu Marius (6582, 7, 97, 609, 22, 32, 66, 7, 70—83, 5, 9, 91, 2, 4, 6, 7, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 51, 3, 5—7, 63, 76), Bogdan Rocsana (6670—8, 80, 1, 710, 5, 20, 2, 35), Cerchez Mihaela (6670—7, 80, 1, 715, 20, 35, 55, 6), Ciobanu Constantin (6670—4 „ 6, 8, 9, 85, 715, 20, 2, 6, 33, 48, 50, 2), Dinu Marian (6750—61, 8, 73, 4, 80, 2, 3, 6, 8, 90, 3—7, 801, 5, 15, 21, 4, 7), Dumitrescu Gheorghe (6670—8, 80, 5, 97, 711, 20, 2, 6, 48), Dumitrescu Marcel (5671, 5, 7, 80, 2, 3, 710, 5, 20, 35, 51, 5, 7, 63), Gheorghe Ioana (6648, 70—2, 8, 85, 8, 711, 20, 2, 6, 33), Ghioldiș Gheorghe (6670—3, 5, 6, 8, 82, 5, 711, 20, 2, 6, 33, 48), Chiru Dorian (6670, 1, 3—7, 80, 1, 5, 90, 5, 720, 2, 51, 7), Grecicosei Alex. (6720, 2—4, 31—5, 47, 8, 50, 1, 5—7, 63, 4, 88), Grigorescu Mariana (6710, 5, 20, 2—4, 6, 31, 3, 5, 47, 8, 54, 5—7, 63, 4, 88, 90), Ilie Aurel (6680, 5, 720, 2, 33, 50, 2, 5—9, 61, 3, 4, 82, 8, 90, 7), Ionaș Tudor (6720, 2, 4, 6, 31, 3, 45, 51, 64, 72, 3, 82), Ionescu Constanța (6670—6, 15, 720, 35, 52, 7, 63, 4, 99), Ionescu Constantin (6670—7, 95, 81, 91, 710, 1, 5, 6, 35, 57, 63), Ionescu Gabriela (6710, 5, 20, 2—4, 6, 31, 3, 5, 47, 8, 51, 5—7, 63, 4, 88, 90), Ionescu Viorel (6670, 1, 3, 6, 7, 80, 1, 5, 93, 710, 5, 6, 20, 2), Iordan Niculina (6670—4, 6, 9, 85, 711, 5, 20, 2, 6, 33), Istrate Constantin (6670—6, 8, 82, 5, 711, 20, 2, 6, 33, 5, 48, 58, 9), Luca Vasile (6670—8, 80, 1, 4, 5, 96, 722, 4, 6, 33, 48, 51, 5, 7—9), Minculescu Octavian (6667, 70, 1, 3—6, 80, 5, 93, 6, 707), Nicolaescu Cristina (6710, 5, 20, 2—4, 6, 31, 3, 5, 47, 8, 51, 5—7, 63, 4), Nicolescu Eugen (6670, 3, 84, 5, 720, 2, 33, 5, 47, 8, 51, 5, 7, 8, 63, 4, 82, 8, 90, 4), Oprescu Teodor (6670, 1, 3—7, 80, 95, 8, 710, 5, 20, 2, 4), Pădure Nicolae (6670—8, 80, 2, 3, 5, 710, 1, 5, 20, 2, 35, 51), Pană Constantin (6710, 5, 20, 2—4, 6, 31, 3—5, 47, 8, 70, 1, 5—7, 63, 4, 88, 90), Putzlocher Vica (6670—8, 80, 5, 95, 710, 5, 20, 2, 35, 55), Pavelescu Ion (6750, 2, 8—61, 848, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 81), Petrescu Mircea (6670—6, 8, 80, 5, 97, 711, 20, 2, 6, 48, 63, 4, 88), Petru Stelian (6710, 2, 5, 23, 48, 50, 2, 7, 63, 8, 96), Predescu Elena (6670, 3, 5—8, 81, 5, 710, 5, 20, 2, 35, 55, 7), Rădulescu Natalia (6626, 72, 5, 8, 80, 5, 710, 5, 35, 6, 51, 2, 5—7), Silvestru Stela (6670—7, 715, 20, 55), *Simion Gheorghe* (6712, 3, 5, 20, 2, 32, 41, 4, 7, 8, 55—61, 3—5, 78, 73, 6, 82, 8—99, 801—3, 8—15, 3—5, 8, 40—4, 7—55, 67—9, 2, 74, 7—9, 93, 5, 6, 91, 9, 16), Solovăstru Violeta (6670, 1, 3, 5, 6, 8, 710, 5, 20, 2, 33, 51, 7, 63), *Stan Ion* (6666, 7, 70—7, 9, 80, 1, 3—5, 89, 91—8, 700, 1, 7, 710, 1, 2, 4, 5, 20—7, 9—33, 5—8), Stanciu Grigore (6670—6, 8, 80—2, 4, 5, 711, 20, 6, 48, 58, 88, 61, 97), *Stănescu Dan* (6714, 20—9, 31—8, 44—65, 7, 8, 73, 5, 82—4, 6, 8—91, 3, 4), Ștefănescu Doru (6670—4, 6, 8, 9, 85, 715, 20, 2, 6, 33, 48, 50, 2, 8, 63), Ștefănescu Elena (6626, 70—8, 80, 1, 5, 95, 710, 5, 20, 2, 35, 6, 51, 6, 7), Tănăsescu Octavian (6666, 70, 2, 5, 8, 80, 1, 5, 98, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 9, 33), *Vasiliu Constantin* (6668, 79, 82, 3, 6, 94, 700, 1, 3, 10, 1, 4, 5, 6, 720—6, 9, 31—3, 5—7, 41, 4, 8, 50—3, 5—61, 3—5, 7, 80, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 801, 2, 9, 13, 24, 6, 7, 9, 31, 5, 8, 41—3, 7—52, 4, 9, 61, 2, 4—7, 9, 70, 8, 9, 81, 4), Vijoli Sorin (6644, 66, 70—8, 80, 1, 3, 5, 91, 5 722, 7, 35), Vișan Nicolae (6670—8, 80 80, 5, 95, 710, 5, 20, 2,

35, 6, 51, 5—7, 63), Vişoianu Mihai (6710—2, 5, 6, 21, 2, 4, 33, 5, 8, 52, 6, 8, 63, 4, 82), Vlădăceanu Anela (6710, 5, 20, 2—4, 6, 31, 3, 5, 47, 8, 51, 5—7, 63, 4, 88, 90). Cl. XI. *Cosma Tudor* (6751—64, 56, 63—70, 88, 97, 801, 2, 35, 6, 47—54, 9, 62—8, 79—81, 84, 8, 96), Davidescu Radu (6666, 7, 70—8, 80—3, 5, 96, 700, 6, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 35, 6), *Oproescu Gabriel* (6666—78, 80, 1, 5, 92, 6—8, 700, 3, 8—16, 20—2, 4—8, 31—3, 5—8, 42, 5, 4, 8), Pîrvu Constantin (6751, 3, 5—7, 9, 60, 1, 3, 4, 97, 847, 9, 64), *Reghină Vasile* (6710, 1, 5, 6, 20, 2—6, 32, 3, 5—7, 41, 50—3, 5—8, 60, 1, 3, 4, 76, 8, 90, 1, 3, 7, 801—3, 12, 3, 7, 24), Stan Dan (6750—3, 5—61, 3—5, 7, 8, 73, 4, 6, 8, 80, 2, 3, 7, 80, 9, 90, 1, 3, 7, 808, 9, 11—4, 8, 24, 9, 31), Stere Cornelia (6671—7, 83, 711, 3, 20, 2, 35), Ştefănescu Viorel (6710, 5, 20, 2, 4, 35—7, 45, 52, 4—7, 62, 3), Ungencanu Doru (6710, 5, 20, 2, 4, 35—7, 45, 52, 5—8, 62, 3), Tudor Dumitriu (6710, 1, 4—6, 20, 2, 32, 5, 48, 50—3, 5, 7, 9, 61, 3, 76, 95, 7, 99, 801—3, 11, 3), Vasilescu Mihai (6710, 1, 5, 20, 2, 4, 45, 52, 5—7, 63), *Ş. m. 2* cl. V. Kluger (E : 2248, 50, 65, 8, 73, 80, 6, 91). Cl. VI. Lupulenco Livia (E : 2265, 6, 8, 77, 8, 80, 2, 3). C.—VII. Aleonte Ştefan (E : 2248, 50, 7—9, 65, 6, 8, 70, 6), Anastasiu Răzvan (E : 2248—50, 5, 8, 9, 65, 8, 70, 6), Cososchi Adrian (E : 2251, 3, 8, 65, 6, 8, 70, 6, 8), Damian Alice (E : 2210, 5—8, 20, 32, 40), Hotăranu Ion (E : 2265, 6, 8, 70, 4, 6, 8, 86, 7, 8). Cl. VIII. Vişan Marian (E : 2248, 50, 2, 4—6, 8—61, 3—5, 7, 8, 74, 5—80, 2, 3, 5, 9, 90—2). Cl. IX. Beldescu Petre (6670—3, 5, 95, 7, 710, 5, 6, 20, 2—6, 35, 6, 9, 5, 7—60, 4, 5, 8, 80, 6, 8, 9, 91), Copoiu Florin (6714—6, 20—4, 6, 7, 9, 31, 5, 6, 44, 50, 1, 5, 7—61, 3, 5, 82, 6, 8—91), Dănică Rozalia (6720, 2, 35, 50, 60, 4—6, 82), Mazăre Alexandru (6710, 4—6, 20—2, 4—6, 31, 5, 6, 44, 50, 2, 7—61, 4, 82, 8, 9, 91 , Mîndrilă Dumitru (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 716, 20, 2, 35), *Orăşanu Laurenţiu* (6672, 84, 714, 27, 9, 31, 7, 44, 5, 8—53, 5—61, 3—5, 76, 80, 2, 3, 6, 8—92, 5—803, 10—3, 8, 9, 24, 40, 1, 7—53, 6, 62—72, 8—85), Petrescu Nicolae (6786, 91, 847—9, 62, 4, 7, 9, 79, 80, 1, 4, 8), Popic Mişa (6684, 721, 3, 4, 6, 50, 8, 64, 82, 6, 91), Seremet Rodica (E : 2290 : 6720, 2, 4, 35, 50, 60, 4, 5, 76, 91), Spiridon Maria (6750, 8, 60, 4, 86, 91, 5, 8, 802, 12, 3, 5), Sorescu George (6847—9, 62, 4, 5, 7, 9, 79—81, 4, 8). Cl. X. Băltăceanu Romeo (6710, 5, 20, 2, 35, 48, 55, 63, 4, 96, 7, 802, 29), Buduroiu Doina (6670, 1, 3—6, 710, 1, 5, 20, 2, 35), *Dinu Cornel* (6666—8, 5, 710, 1, 6, 20—9, 36, 4, 5, 8, 43, 5, 6), Manolescu Cristina (6666—85, 710, 1), Moisescu Ana (6670—2, 5, 6, 73, 710, 5, 20, 2, 35, 63), Pispiris Cristian (6666—8, 70—7, 80, 2, 95, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 6, 35), *Stan Emil* (6728, 31, 2, 44, 5, 8, 9, 51—3, 5—61, 3—5, 7, 8, 70—8, 82, 3, 6, 8—90, 92—9, 801—4, 8, 12, 3, 5, 7, 9, 24, 9, 31, 3, 5, 40, 1—2, 5, 54, 88, 9, 90, 5, 6), *Steriu Dan* (6639, 42, 4, 8, 53, 61—3, 6, 86, 8, 9, 92, 3, 5—8, 700, 7, 10—2, 5, 6, 20, 2), Tilimpea Viorel (6666—98, 703, 4, 7), Tudor Matilda (6751, 7, 63, 47, 8, 52—4, 62, 4, 5, 8, 79, 81), *Ţintă Mircea* (6666, 7, 70—87, 91—8, 704, 7, 10, 1, 2, 5, 20—4, 50—61, 3, 4, 8, 71, 80, 2—4, 6—91, 3—9, 801—3, 15, 8), *Vişan Ştefan* (6666—8, 70—81, 4—6, 9, 91—3, 5—8, 700, 7, 10, 1, 5, 6, 20—2, 4, 31, 42, 3, 5, 6, 50—3, 5—61, 3—5, 73, 6, 7, 80, 2, 5, 6, 8, 90, 2—8, 801—3, 5, 8, 11—3, 5, 7, 8, 20, 1), Voinea Iulian (6666, 7, 70, 1—3, 4—8, 80, 1, 5). Cl. XI. Dinu Cornel (6750—64, 70, 6, 9). *Ş. m. 3* cl. IX Spiegel Wilhelmina (6710, 4—6, 20—2, 4, 35, 50, 7—61, 4, 5, 82, 91, 4). Cl. X. Georgescu Elidia (6752, 5, 7, 60, 1, 4, 96, 7, 802, 3, 47—9, 51, 62, 79, 84, 7, 8). *Ş. m. 4* cl. VIII. Dumitrache Ion (E : 2282, 3, 6—8, 91, 2, 4—6, 8, 9), Ionescu Mihai (E : 2248, 50, 2, 4, 5, 8, 61, 3 ; 6670, 6), Vasilache Dan (E : 2250, 2, 5, 7, 8, 61, 80, 74, 7 ; 6720, 2, 70, 1, 3, 6), Weinberg Mihai (E : 2248, 50, 2, 4, 5, 8, 63, 70, 6). Cl. IX. Albulescu Mircea (6710, 5, 20, 4, 35, 78, 87, 8), Ionescu Georgeta (6670, 1, 3, 4, 6, 80, 710, 5, 20, 2, 4), Oroviceanu Maria (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 710, 5), Stanciu Fabiola (E : 2261, 3, 4, 6670, 1, 3, 4, 6, 80, 720, 2), Ştefan Romeo (E : 2280 ; 6710, 5, 7, 8, 20, 2, 78, 35). Cl. X. Pascu Vasile (6710—2, 4, 6, 23, 4, 38, 9, 42, 51, 97), *Rădulescu Nicolae* (6670, 3—7, 90, 1, 710, 5, 20, 2, 36, 750—2, 5, 6, 8, 9, 61, 3, 4, 82, 8, 91, 5—7, 9, 801—3, 47, 9, 52—4, 9, 62, 4, 6, 9, 78, 80, 8), *Sachelarie Dan* (6666, 7, 70—8, 80—3, 5, 7, 8, 701, 7, 10—2, 5, 6, 20—6, 31, 5, 6, 41, 7, 8, 750—65, 73, 4, 6, 8, 80, 2, 3, 6—9, 93—9, 801—27, 9—32, 4, 35), Nicolae Florea (6750, 2, 7—61, 4, 5, 83, 8, 95—7, 802, 3, 68, 13, 5, 8, 9, 24, 40, 1, 7—9, 50, 2, 3, 9), Stăniceanu Stelian (6716, 21—2, 4, 8, 68, 86, 811, 3), Voicilaş Cornelia (6710, 1, 4—6, 20—2, 4—8, 31—7, 50—3, 5—61, 3—5, 6, 8, 90, 2, 3), *Lungu Valeria* (6666, 7, 70—86, 9, 91, 5, 7, 710, 1, 5—7, 20, 3—8, 30, 5, 6, 50—67, 82—3, 6—9, 815, 50), Teodorescu Ştefan (6750, 1, 6, 7, 9, 61, 3, 4, 8, 93, 6, 7, 9, 803, 12, 3). *Ş. m. 6* cl. VI. Stoica Valentin (E : 2253, 4, 8, 9, 60, 5—8, 70, 3, 4, 6—8, 81—3, 5, 8, 91—3). Cl. VII. Angelescu Simona (E : 2294, 6, 300, 1, 7—9, 11), Anton Costel (E : 2283, 93, 5, 301, 2, 7, 8, 10, 2, 4, 9), Antonescu Luiza (E : 2281, 7, 8, 91, 4—6, 9, 307, 13), Avramescu Mircea (E : 2265, 8, 76, 82, 3, 91, 3, 9, 301, 2), Badea Janeta (E : 2293, 4, 6, 9, 301, 7, 8, 11), Calotă Dumitru (E : 2287, 94—6, 99, 301, 11, 2 ; 6849), Goicea Ana (E : 2282, 3, 7, 91, 4—6, 9, 301, 7, 8, 12), Beffa Mihail (E : 2293—6, 9, 301, 2, 7, 10, 2), Bauxbaum Constantin (E : 2283, 6, 93, 4, 6, 9, 301, 2, 16), Dobre Doru (E : 2291, 3—6, 301, 2, 7, 12, 4), Dragomir Valerică (E : 2294—6, 9, 301, 8, 9, 15), Gănescu Mihaela (E : 2282, 3, 91, 4—6, 9, 301, 2, 7, 8), Ghenovici Viorica (E : 2286, 95, 6, 301, 7, 11, 2, 6), Iordache Mihai (E : 2283, 6, 94, 5, 9, 301, 2, 16), Nicolae Daniela (E : 2248, 54, 7—9, 68, 70, 80, 3), Teodorescu Petre (E : 2282,

6, 7, 91, 4—6, 301), Petreanu Traian (E : 2281—3, 96, 301, 2, 11, 36), Popescu Maria (E : 2282, 92, 4, 9, 301, 2, 7, 8, 15), Preoteasa Mariana (E : 2294—6, 300—2, 7, 18), Pupu Marina (E : 2283, 94—6, 302, 7—9, 13), Rădulescu Georgeta (E : 2282, 3, 93—6, 301, 2), Rădulescu Traian (E : 2282, 3, 6, 94—6, 9, 312), Rădăuţă Viorel (E : 2265, 6, 74, 82, 3, 93, 5, 6), Rotaru Paula (E : 2287, 93—6, 9—301, 7), Serpoianu Iulia (E : 2292, 4—6, 9, 301, 2, 8, 11, 3), Tudor Mihai (E : 2282, 91, 5, 6, 9, 301, 2, 8, 14, 5). Cl. VIII. Anton Ana (E : 2282, 3, 9, 301, 2, 7, 8, 10, 2, 9, 64, 81), Avramescu Mircea (E : 2300, 6, 9, 13—6, 8, 23, 5—7; 6887), Stan Constantin (E : 2281—3, 5, 8—303, 5—8, 14—6, 47—50, 62—4, 6—8, 79, 81, 927, 8). Cl. IX. Steinacher Gabriel (6847, 62, 4, 8, 79—81, 4, 927, 8, 31, 2). Cl. X. Geană Maria (6710, 5, 20, 2, 33, 5, 57, 63, 76, 97, 847, 8, 62, 4, 7, 9, 81, 916). Absolvent Minculescu Gheorghe (6656, 61—4, 71, 91, 2, 5, 6, 8, 701, 6, 31, 6, 9, 50, 4, 6, 80, 2, 8).

PLOPENI. Cl. X. Olaru Ion (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 82, 5, 710, 5, 20, 2, 4).

POCALA (Crişana). Leuca Gheorghe (6628, 32, 40, 6, 4, 58, 60, 70, 5, 7, 80, 3, 715, 20).

POPEŞTI (Ploieşti). *S. g.* cl. VIII. Ion Constantin (F : 2202, 61, 2—4, 79—81).

POTCOAVA (Argeş). *S. g.* cl. VIII. Bălănescu Marin (E : 2265, 8, 81, 9, 93, 4, 6, 301, 7, 8, 12, 20, 62, 4, 7, 79, 81). *S. m.* cl. X. *Bălănescu Tudor* (6670, 1, 3—7, 80, 6, 97, 711, 20, 2, 35, 6, 55—7, 9, 60, 4, 8, 86, 8, 93, 5—9, 803, 13, 8, 9, 24, 41—3, 52—4, 7, 9, 62, 4, 7, 73, 4, 9, 81, 4, 8, 93), Stancu Ion (6710, 1, 5, 20, 2, 36, 51, 4, 5, 7, 63, 4, 8, 88).

PREDEAL. Cl. XI. *Ioniţă Maria* (6666—81, 5, 6, 91, 3, 5, 7, 8, 702, 3, 6—16, 20, 2—4, 6, 35, 6, 45, 51—64).

PRUNDUL BÎRGĂULUI (Cluj). *S. g.* cl. V. Gollcu Adriana (E : 2293—6, 307, 8, 11, 2, 24—6). *S. m.* cl. X. *Boieriu* Octavian (6670, 1, 3—7, 710, 5, 6, 20, 2, 55, 63, 91), Dragotă Dinu (6670, 1, 2—7, 710, 5, 20, 2, 51, 7, 63). Cl. IX. Vrînceanu Andrei (6670, 4, 6, 712, 20, 2, 50, 76, 81, 7, 847—9, 62, 4—6, 9, 79—81, 3, 4, 8, 927—9, 32—4, 46).

PUCIOASA (Ploieşti). *S. g.* cl. V. Căprăruş Simona (E : 2265—8, 70, 6, 80). *S. m.* cl. IX. Cimpoca Gheorghe (6768, 76, 88, 715, 41, 7—50, 62, 4, 5, 8, 9, 81, 4), Comănoiu Maria (6758, 68, 86, 95, 802, 4, 48, 9, 64, 9), Diaconu Gheorghe (6671, 82, 3, 5, 95, 710, 2, 5, 6, 24, 5, 50, 2, 7, 9—61, 80, 2, 91), Folea Vasilica (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 4, 42), Lăzărescu Maria (6671, 7, 81, 2, 4, 720, 2, 4, 847—9, 62, 4, 9, 79, 81, 3, 4). Cl. X. Iacobescu Mihai (6670, 1, 3—7, 80, 2, 710, 1, 5, 20, 1, 4, 9, 35, 6, 55, 7, 85), Moc Nicolae (6751, 6, 61 3, 4, 7, 9, 847, 52, 4, 69, 79, 81, 946, 9, 50), *Pascale Doina* (6753, 5—7, 63, 4, 8, 82, 91, 6, 7, 801—3, 17, 21, 35, 47—9, 52—4, 7—9, 73, 4, 8—85, 8, 93, 6), *Vasilescu Nicolae* (6751—64, 6, 8, 70, 3—6, 8—83, 6—80, 7—10, 2, 5, 7, 21, 2, 4, 7, 9, 31, 5). Cl. XI. *Aron Constantin* (6666—82, 5, 92, 6, 700, 3, 6, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 6, 31), *Bîrlog Corneliu* (6710, 1, 3—6, 20—2, 4—7, 31, 5, 7, 8, 41, 4—64, 7, 8, 73, 6, 8, 80, 2, 6—8, 91, 3), Brezeanu Ion (6670, 1, 3—6, 10, 1, 5, 20, 2, 35, 54, 7, 64), Niţescu Ştefan (6672, 714, 24, 32, 45, 51, 2, 4, 5, 7, 8, 66, 9, 76, 82, 95—803), *Vasilescu Ana* (6666—8, 70—80, 3, 5, 95, 7, 701, 6, 9—13, 5, 6, 20, 4, 9, 31—42, 6, 8, 9, 51, 4—6, 62, 3, 6, 76, 82, 6, 95—803, 7—10, 5, 21, 2, 4, 5, 7, 9, 31, 5, 41—50, 81, 3—5, 7, 8, 92—6, 9, 915).

PUCHENI MOŞNENI (Ploieşti). *S. g.* cl. VIII. Stan Stelian (E : 2248, 50, 2—4, 7—9, 61, 3, 5, 6, 8—70, 4, 6).

RĂCARI (BUCUREŞTI). Cl. IX. Alexandru Ion (6670, 3, 6, 7, 9, 81, 2, 716, 20, 3—5, 8), Niculescu Ion (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 715, 20—2, 35). Cl. X. Andrei Ion (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 93, 710, 5, 6, 20, 2, 35, 6), Călinescu Liviu (6755, 7, 63, 97, 847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 79, 81), Catană Gheorghe (6670—7, 93, 5, 7, 10, 5, 20, 2, 3, 5, 6), Dincă Gheorghe 6667, 70—8, 80, 15, 9, 93, 5, 7, 8, 707), Duţu Ioana (6752, 5—7, 63, 97, 801, 3, 11, 47—52, 4, 62, 4, 7, 79, 81), Ene Gheorghe (6711, 5, 6, 35, 6, 51, 6, 7, 63, 96, 7, 9, 801—3, 11), Ghiţă Ion (6752, 5—7, 63, 97, 802, 3, 4, 7, 9, 52, 4, 9, 62, 79, 81, 816), Marcu Ioana (6752, 5—7, 63, 4, 96, 7, 9, 801—3, 47—9, 52, 4, 62, 7, 9, 81), *Miulescu Cecilia* (6666, 8, 9, 82, 96, 710, 1, 3—6, 20—35, 6, 8, 32, 3, 5, 6, 45, 8, 50, 7—64, 767, 82, 6, 8, 90, 1, 4), Neacşu Elena (6752, 5, 7, 63, 97, 801, 47—9, 52, 4, 62, 4, 7, 9, 81), Puşcaşu Gheorghe (6797, 9, 902, 43, 7—50, 4, 62, 4—9, 79, 81), Dragnea Elena (6670—71, 85, 7, 20, 2, 6, 35), Ionescu Marian 6666, 7, 70, 1, 3—7, 80, 710, 3, 5, 20, 2, 6, 49, 54, 7, 82, 4,), *Ştefan Alexandru* (6628, 32, 4, 8, 44, 6, 8, 66, 7, 9, 70, 1, 2—8, 80, 2, 5, 96, 700, 3, 9, 10, 1, 5, 6, 20, 2, 32, 6, 45).

RADOŞI (Oltenia). Cl. VIII. Rădulea Angela (E : 2265, 6, 8, 70, 1, 4, 6, 80).

ROMNA (Banat). Dragoş Simion (E :. 2248, 53, 8, 9, 68, 70, 4—8).

RĂDĂUŢI. *S. m. a* cl. IX. Guşetu Dorin (6639, 65, 70, 4, 6, 7, 9, 80, 2, 3, 716, 20—2). *S. m. 2* cl. VI. Harard Ana (E : 2248, 58, 65, 6, 80, 6, 91, 2), Weinstein Bertha (E : 2265, 8, 70, 82, 93—5, 9), Luthan Dragoş (6755, 7—9, 63, 4, 73, 82, 8, 93, 9, 810, 25, 25, 9, 35,), Cl. XI. *Weinstein Jack* 6666, 8—77, 81, 1, 3—5, 95, 7, 8, 700, 2, 3, 6—12, 5, 20, 2, 4, 6, 31, 5, 6, 48, 6795—7, 9, 801—3, 9, 8, 11—21, 4, 7, 9, 31, 6, 8, 9).

REGHIN. *S. m. 2* cl. VI. Costea Vasile (E : 2248, 50, 2—4, 8, 9, 68, 9), Kovacs Ibolya (E : 2248, 50, 2, 4, 8, 9, 68, 9), Morariu Ion (E : 2248, 50, 2—4, 8, 9, 70), Panea Eugenia (E : 2248, 50, 4, 8, 9, 68, 9, 70). Cl. VIII. Bucur Ovidiu (E : 2248, 58, 61, 3—5, 8, 74, 7, 80, 1,

6, 90, 3—5), Moldovan Ioana (E : 2248, 50, 7, 60, 1, 3, 5, 8, 70, 8), Moldovan Teofil (E : 2248, 50 8—61, 3, 4), Panea Petru (E : 2248, 50, 4, 7—9, 61, 3, 4).

REŞIŢA. *S. g. 1* cl. VIII. Andrei Radu (E : 2248, 50, 1—4, 6—9, 61, 3, 5, 6, 8, 70—4, 6—80 ; 6720, 4, 42, 70, 3, 6, 81). *S. g. 3.* Ciolănescu Ion (E : 2248, 50, 5, 61, 3, 5, 68, 78, 80), Hotak Margareta (E : 2248, 50 5, 61, 3, 5, 8, 70, 80, 720, 2), Stanca Nicolae (E : 2259, 61, 3, 5, 8, 70, 8, 80, 722). *S. g. 6.* Jumanca Octavian (E : 2248, 51, 2, 4—8, 60, 1, 3, 79). *S. m. 1. S. m. 1.* Maldet Josefina (6716, 20, 2, 3, 5, 847—9, 62, 4, 79, 81, 4, 927, 8, 31—3, 5). Cl. X. Ioiart Ion (6670, 1, 3—7, 82, 710, 1, 5, 6, 20, 6, 9). Cl. XI. Buţă Viorel (6666—8, 80, 2—5, 7, 8, 700, 7—11, 3, 5, 20—2, 4—6), Ioiert Ion (6750—2, 5, 7, 9, 61, 3, 4, 9, 803, 15), Schmide Hotiana (6712, 3, 6, 21, 4, 51, 2, 4—7, 60, 2—4, 7).

RÎMNICUL SĂRAT. *S. m. 1.* cl. IX. Anonim (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 63, 4, 83), Ghiţă Mircea 6750—8, 60, 1, 3, 4, 83, 6, 7, 91), Motaş Emil 6750, 5, 7, 8, 58, 64, 8, 78, 83, 91, 7, 80, 11, 2, 47—51, 62, 4—7, 9, 79, 81), Teşilă Vasile (E : 2305, 6, 19, 80—5, 64, 91, 8, 847—9, 62, 4, 5, 7, 9, 79—81, 3, 927—34, 46), Voicu Aurel (6751, 2, 5—7, 842, 3, 7, 8, 52, 3, 62, 4, 5, , 70, 9, 81), *Vraciu Constantin* (6666—8, 70—8, 80, 1, 4, 92, 3, 5, 6, 8, 710, 1, 5, 20—2, 4, 36—8, 50, 3, 5—61, 3—5, 8, 73, 80, 2, 3, 7—90, 3, 5—7, 801—3, 9—14, 6, 8, 24, 5, 7, 9, 31, 4, 5, 40—4, 7—57, 9, 62, 7).

RÎMNICUL VÎLCEA *S. g. 4.* Marineascu Nicolae (E : 2248, 52, 61, 3, 5, 8, 70, 4, 82, 7). *S. g. 5* cl. VIII. Tilirea Mihai (E : 2248, 50, 4, 5, 8, 63, 5, 8, 74, 81, 8, 90, 1). *S. m. 1* cl. IX. Aspricioiu Nicolae (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 720—2, 4), Bădeascu Adrian (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 720, 2, 61, 3, 7, 9, 80). Morariu Liviu (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 7, 20, 2, 4). Cl. X. Buliga Maria (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 31, 5, 51, 2, 7, 97, 63), Droaşcă Florin (6639, 44, 70, 70, 2—8, 84, 5, 716, 35), Gheorghinescu Fănică (6670—2, 6, 710, 1, 4, 20, 3, 35, 57, 64), Marinescu Alexandru (6752, 6, 63, 4, 47, 9, 802, 11, 48—50, 4, 62, 4, 8, 9). Popescu Constantin (6695, 710, 1, 5, 6, 20—4, 6, 35, 6, 8, 9). Cl. XI. Constantinescu Nicolae (6671, 2, 4, 5, 710, 1, 5, 20, 2, 51, 2, 5, 9, 61, 3), Nicilicioiu Gheorghe (6678, 82, 3, 5, 9, 92, 7, 8, 706, 8, 21, 3, 4, 7, 8, 32, 3, 50—9), Droaşcă Florin (6710, 5, 20, 2, 50, 1, 5—9, 63, 4, 91, 3, 6, 7, 802, 3, 8, 13, 9, 24, 31), Popescu Lucian (6710—3, 5, 6, 8, 20, 2, 4, 6, 35, 7, 8, 74), Stîrbu Mihai (6628, 31, 59, 60, 70, 1, 3, 6, 7, 80, 700, 10, 1, 50, 20, 2), Stoica Ieronim (6670—7, 80, 1, 10, 2, 5, 6, 8, 20, 2), Sogorescu Vasile (6670—7, 80, 703, 10, 3, 5, 6, 20, 2), Tănase Constantin (6628, 44, 62, 6, 70—8, 80, 95, 700, 7, 10, 5, 20, 2). *S. m.* „Vasile Roaită" cl. X. Buricea Mihai (6666, 7, 81, 3, 5, 91, 2, 5, 7, 8, 710—2, 4, 5), Catargiu Virginia (6750, 2, 5, 61, 3, 4, 8, 95, 7, 9, 801, 3, 8, 47, 9 59, 62, 4, 8), Crudu Valentin (6667, 85, 81, 2, 5, 7, 710, 5, 50—3, 6—60, 3, 82, 8, 91), Dănescu Emilia (6670, 1, 3—7, 85, 710, 1, 5, 6, 2, 6, 35), Diaconescu Elena (6670, 1, 43—7, 710, 1, 5, 20, 2, 5, 35), Georgescu Măcinic (6670, 1, 3, 4, 5, 7, 82, 5, 710, 1, 5, 20, 2), Gheorghiu Sotin (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 710, 1, 5, 20, 2, 6), Lazăr Iulia (6666, 70—7, 80—3, 5, 86, 92, 3, 710, 1, 5, 6, 20—2, 5, 6, 50, 1, 5—7), Mălăiani Emil (6755, 7, 9, 63, 4, 97, 847—50, 2, 62, 7, 79,), Moldoveanu Floriana (6666, 70 1, 3, 4, 6, 7, 85, 6, 711, 5, 6, 20, 2, 35, 6), Popescu Constantin (6750—3, 5—61, 3, 4, 83), Sireţchi Roman (6751, 2, 5, 6, 8, 60, 3, 82, 8, 96, 7, 9, 801, 2, 3, 8, 13, 24, 35, 47—50, 2—4, 63, 4—6, 8, 80, 3, 4), Voinescu Rodica (6670, 1, 3, 4, 6, 82, 92, 720—2, 6, 35). Cl XI. Buricescu Mihai (6750—2, 5—61, 3, 4, 82, 95, 7, 9, 801—3, 8, 13, 8, 24, 5, 31, 48—50), Crudu Valentin (6761, 96—7, 9, 801, 3, 29, 41, 7—9), Văduva Vasile (6751, 2, 5—7, 9, 61, 3, 4, 88, 97, 9, 824, 47—9, 52, 4, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 8), Voinescu Dumitru (6750—2, 5—60, 3, 91, 7, 9, 801, 8, 24, 43, 7—50, 2, 4, 9, 62, 5—70, 9).

RODOVEANU (reg. Bucureşti). *S. m. 2* cl. X. *Vlăsceanu Stan* (6750, 8, 9, 68, 73, 3, 6, 90, 2, 3, 7, 9, 801, 2, 3, 7—9, 24, 42, 5—9, 52, 4, 9, 62, 4—9, 73, 9).

ROMAN. *S. g. 7* cl. VI. Segal Bruno (E : 2268, 70, 4, 5, 8, 82, 3). *S. m.* cl. X. Bercovici Nelu (6676, 80, 92, 3, 817, 23, 41, 7—54, 6, 9, 62—70, 2, 8, 9, 80, 1,), *Căpăţînă Valeriu* (6682, 700, 10, 5, 8, 31, 3, 44, 50—3, 5—61, 3, 4, 82, 6, 8, 91, 2, 6—9, 801—3, 8—15, 21, 3—5, 7—9, 31, 2, 4, 5), Dumintru Gh. (6670, 1, 3—6, 10, 1, 5, 20, 2, 802, 2, 802, 47, 8, 50, 4, 7, 9, 62, 4, 7, 79, 80, 1), Haret Janeta (6750—2, 5—7, 9—16, 3, 4, 847—9, 52—4), Pădurariu Ioan (6666, 7, 70—7, 82, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 50—2, 5—9,), *Smit Petru* (6764, 82, 96—9, 802, 41, 3, 7—54, 8, 9, 62—73, 8—81, 3—5, 927—32), *Rugină Andrei* (6631, 2, 41, 2, 66—8, 70—85, 92, 3, 5—8, 700, 7, 10, 10, 1, 5, 6, 20—6, 31—3, 5, 6, 8, 41, 4, 51, 5—7). Stafie Georgeta (E : 2261, 3, 4, 77—80, 7, 3, 6, 7, 80, 720, 2, 35). Cl. XI. Gavriliu Mihai (6666, 7, 70—7, 80, 1, 4, 5, 92, 3, 5—8, 707—11, 3, 5, 6, 20, 2—4, 33, 5, 6, 45, 8, 51, 3—7, 60—4). Absolvent *Dolteanu Temistocle* (6666, 7, 70—8, 80—3, 5, 6, 95, 7, 8, 701, 3, 10, 3—6, 20—2, 4, 6, 30, 3, 5—8, 41).

ROMÎNEŞTI (Ploieşti). Horea Ion (E : 2251, 2—5, 8, 68, 70, 3—6).

ROŞIORII DE VEDE. *S. m. 1* cl. VI. Badea Marin (E :2248, 50, 1, 7, 8, 68, 70, 5, 6,). Cl. VII. Albu Sorin (E : 2248, 51, 4, 7, 8, 70, 3, 5, 6), Bursumac Marcel (E : 2255, 8, 9, 73, 4—7, 91). Cl. IX. Neaga Ştefan (6850, 1, 62—6, 8—72, 8—81, 3—5, 8). Cl. X. Călin Ion (6668, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 92, 710, 5, 20, 2, 4, 35, 52, 7, 61), Georgescu Graţiela (6670, 1, 3, 6, 7, 710, 5, 20, 2, 35), Păune Florin (6666, 70—4, 6, 7, 80, 715, 20, 55—7), Săndulescu Ion

(6666, 70, 1, 3, 6, 5,7, 80—2, 4, 9, 92, 3, 7, 8, 710—2, 4—6, 20—2, 4—7), Stanciu George (6666, 7, 70—8, 80, 5, 710, 1, 2, 20, 2). Cl. XI. Nedelea Ion (6666, 78, 97, 703, 6, 10—6, 20, 2, 5, 35, 45, 8, 9, 51, 4—7, 62). *S. m. 2* cl. IX. Popescu Teodor (6670, 3, 4, 6, 7, 710, 2, 5, 20—2, 35, 50, 8, 61, 4, 79), Simion Florian (6750, 9, 64, 82, 6, 91, 802, 11, 2, 40, 1, 7—51, 62—70, 80, 1, 3, 4). Cl. X. Buzea Dobra (6631, 70, 1, 3—7, 80, 93, 5, 715, 16, 20, 2, 36), *Sandu I. Maria* (6795—7, 9, 801—3, 15, 24, 35, 51, 4, 7—55, 9, 64—70, 2, 8, 9, 80—4).

ROZNOV (Bacău). Cl. X. Cociorvă Benorei (6751, 2, 5, 7, 9, 61, 3, 4, 96, 7, 801, 2).

RUDINA (Oltenia). Absolvent Giurgiuc Costel (6710, 1, 3, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 507, 9—64).

RUPEA (Brașov). Boldea Nicolae (6755—7, 87, 847—9, 54, 9, 64, 7, 79, 81, 3, 4).

SĂCELE (Brașov). *S. m. 1* cl. XI. Csere Lenke (6670, 1, 3—7, 80, 6, 6, 710, 5, 20, 2, 31, 5).

SĂCELE (Dobrogea). Colac Maria (E : 2265—71, 4, 6—80).

SĂCUENI (Crișana). Cl. XI. Mada Nicolae (6666, 7, 70—8, 80, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35), Rițiu Viorel (6710, 1, 3, 5, 20, 2, 45, 51, 2, 5—7, 62—4).

SALCIA (București). Cl. IX. Vasile Nelu (6841, 7—51, 62, 4—6, 8—70, 9, 81, 8).

SARMAȘ. Cl. X. Culbeștean Ioan (6666, 7, 71, 81, 2, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 6, 9, 35, 8), Moldovan Vasile (6803, 13, 7, 24, 7, 9, 31, 47—9, 52, 4, 7, 62—9, 71, 3, 4, 80—5), Sărac Ignat (6750, 1—3, 5—60, 3, 4, 82, 4—8).

SATU MARE. *S. g. 10* cl. VII. Gorbe Mihai (E : 2233, 5, 8, 48, 65, 6, 8, 9, 70, 1). Cl. VIII. Văleanu Emil (E :2248, 9, 50, 1, 4, 5, 8, [9, 61, 3). *S. m. 1* cl. IX. Ciornău Ioan (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 5, 710, 5, 6, 20, 2), Noje Georgeta (6670, 3, 6, 7, 80, 5, 716, 20, 4, 35, 63), Sighet Margareta (6795, 847—50, 62, 4, 6, 8—70, 8, 9). Cl. X. Ciornău Nicolae (6710, 1, 3, 5, 51, 2, 5—7, 63, 4, 94, 6, 7, 813, 22, 48—50), Duhăneanu Marcel (6666, 7, 70—6, 83, 710, 1, 4—6, 20—2, 7, 8, 35, 50—2, 5—9), Man Gheorghe (6670—7, 81, 3, 5, 95, 8, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 33, 5, 6), Oșan Mihai (6666, 70—7, 80—3, 5, 95, 720, 2, 4, 33, 3, 6, 55—7), Pop Gheorghe (6666, 7, 70—7, 81—3, 5, 6, 92, 5, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 32, 9, 56, 7, 63, 4), Taloș Gheorghe 6750, 1, 8—60, 1, 76, 8, 96, 7, 802, 7, 802, 3, 12, 5), Timoc Dorel (6653, 67, 83, 5, 92, 710, 1, 5, 20, 2, 6, 35). Cl. XI. Hossu Alexandru (6666, 7, 9, 70—7, 80, 1, 3, 5, 95, 8, 703, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 4, 6, 35, 6, 55, 7, 63, 4).

SĂVENI. Cl. IX. Gherman Gheorghe (6735, 6, 7, 42, 5, 7, 60, 1, 3, 77, 9, 80). Cl. X. Clocotici Valentin (6656, 70, q, 3—7, 80, 1, 92, 5, 7, 8, 720—5).

SEBIȘ (Crișana). Cl. IX. Pantazi Nicolae (6670, 3, 4, 6, 7, 80—2, 5, 710, 4, 6, 20—2, 4). Cl. X. Killik Arcadie (6667, 70—7, 80—2, 5, 6, 9, 92, 3, 5, 7, 8, 710, 1, 5, 20—2, 9, 32, 5, 6, 50—2), Palicia Victor (6750—2, 7, 60, 1, 87, 95—7, 9, 801—3, 9, 11).

SIBIU. *S. g. 1* cl. VII. Mihalache Codruța (E : 2265, 6, 8, 70, 2, 6, 7, 80, 2, 3, 5, 8), Zaharia Nicolae (E : 2248—52, 4, 60, 5—72, 6, 7, 80). *S. g. 4* cl. VII. Laschescu Dorin (E :2233, 5, 6, 8, 8, 40, 2, 3, 5—7). *S. g. 8* cl. VII. Erseu Petru (E : 2233, 40, 2, 3, 8, 52, 7, 70, 7). *S. g. 15* cl. VI. Brinder Ingrid (E : 2210, 1, 3, 5—7, 9, 48, 50, 2, 66, 8, 80), Klokner Gudrun (E : 2248, 50, 2, 5, 8, 9 ,6, 6, 8,80). Cl. VIII. Bucur Ioan (E :2233, 5—40, 2—8, 50, 2, 4—61, 3, 5—72, 4—8, 80 ; 6670, 6, 720 2, 4, 6, 46). *S. m. 1* cl. IX. Bițu Radu 6670, 3, 4, 6, 7, 80, 5, 715, 6, 20, 4), Mitru Nicolae (6670, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 716, 20, 2, 3), Albeascu Ion (6666, 7, 70—7, 80, 2—5, 95, 6, 8, 707, 10, 1, 5, 6, 20—4, 6, 3—13), Dădîrlat Dumitru (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 710, 5, 20, 2, 4), Nemeș Sorin (6667, 70—7, 80—2, 4, 92, 5, 8, 707, 10, 5, 6, 20—6, 32, 3, 5, 41, 57), Rumac Doina (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 2, 7, 15, 6, 20, 2, 35), Tudor Elvira (6750—2, 5, 7, 61, 3, 96, 7, 847—50, 2, 62, 4, 5, 80). Cl. XI. Rădoi Oliviu (6637, 41, 70, 1, 3—7, 80, 1, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 35, 8). *S. m. 2* cl. IX. Fulea Mihai (6639, 41, 2, 6, 57, 60, 4, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—5, 98, 700, 7, 15, 20—2), Giurea Oristia (6641, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 20—21, 6, 61, 3, 80), Hodor Liviu (6681, 750, 8, 9, 64, 802, 47—51, 62, 4, 8, 70, 8—80, 3, 4, 927, 30—4), Oprean Ion (6715, 6, 20, 2, 4, 6, 36, 57, 86, 7, 8, 9, 91, 4). Cl. X. Eneșel Horea (6750—6, 8—65, 76, 82, 6, 8, 91), *Trif Nicolae* (6629, 36, 41, 2, 4, 7, 9, 51, 3, 7, 60, 4, 8, 72, 8—84, 6, 9—92, 4—8, 700, 10—2 5, 6, 20—6, 35, 6). Cl. XI. Fulea Ilie (6628, 38, 42, 6, 57, 9, 66, 70, 1, 3—5, 7, 9), Sabău Mircea (6711, 5, 20, 50, 3—9, 62—4), Stoica Virgil (6628, 31, 2, 46, 70—8, 4—7, 85). *S. m. 3* cl. IX. Blăjan Petru (6671, 4, 7, 81—3, 12, 5, 7, 8, 710, 5, 6, 20—4 6, 9, 57, 87, 91), Maniu Dan (6657, 71, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 720, 2—4, 6, 33), Olaru Ieronim (6671, 3, 7, 80, 1, 3, 5, 92, 5, 7, 8, 710, 5, 6, 20—4, 35), Voinea Ion (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 95, 7, 8, 710, 5, 6, 20—4, 6, 9, 57, 78, 83, 8). Cl. X. *Lașiță Ileana* (6628—44, 6—9, 51, 5—78, 80—98, 700, 1, 3, 4, 10—6, 20, 2—9, 31—7, 91—42, 4—67, 9, 75, 4, 6, 9,80)Magda Radu (6750—3, 5—61, 8, 82, 92, 6, 7, 9, 802, 3, 9, 24, 39, 48—52, 49, 62, 3, 9, 81), Modran Liviu (6750—3, 5—61, 3, 47, 8, 74, 82, 3, 95—7, 9, 801—3, 9, 18, 22, 57—54), Mavrocordato Ion (6750—2, 5—61, 3, 4, 7, 80, 90, 4, 7, 9, 801—3, 51, 9, 62—70), Pricop Sorin (6670—7, 80, 2, 5, 710, 1, 5, 6, 20—2, 6, 32, 3, 6, 50—2, 9). Cl. XI. *Bucur Liliana* (6702, 5, 12—4, 23, 5, 8, 9, 40, 1, 49—69, 71, 3, 4, 6, 9, 82, 3, 5, 6, 8, 9, 90). Dăncilă Ioan (6750—65, 7—74, 6—80, 2—94, 803, 5, 7—14, 16—21, 23—25, 27—29, 31, 33, —40, 42, 43, 47—52). Geleriu Dan

(6688, 9, 79—84, 89—92,4, 6—8, 710—3, 5, 20—2, 31, 3—7, 47, 8), Popescu Adriana (6681, 91, 5, 6, 703, 7, 14, 6, 21, 4, 6, 33, 6, 51—9, 63, 4, 82). *S. m. 4* cl. X. Mureşan Mircea (6710, 5, 20, 4, 6, 35, 6, 9, 52, 5, 7, 9, 63, 4, 91). *S. m. 5* cl. VII. Niţu Oleg (E :2281—4, 93—300, 2, 7, 8, 13—6). Absolvent Stoicea Marcel (6710, 1, 3—6, 20, 2—7, 9, 31, 45, 8, 51, 3—6, 811—3, 29, 31, 9).

SIGHETUL MARMAŢIEI. *S. m. 1* cl. X. Chiriac Victoria (6670, 3, 4, 6, 7, 81, 715, 20, 2, 6, 9, 42, 76, 87), Pop Dumitru (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 4, 5, 97, 715, 6, 20, 2, 6, 9).

SIGHIŞOARA. *S. g. 2* cl. VIII. Serachitopol Dan (E : 2232, 50, 2, 3, 69—71, 6, 82, 93, 8, 9, 302). Cl. X. Gabrovki Lucia (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 81, 710, 15, 20, 4, 5), Duca Bogdan (6751, 2, 5, 61, 3, 6, 9, 847, 59, 62, 3, 7, 73, 9). Cl. XI. Berechia Lucia (6666, 7, 9, 71, 2—4, 7, 81, 710, 1, 5, 20, 2), Fulea Ludovic (6710, 1, 3, 5, 20,2,35, 52, 4—7, 9, 61—3), Oprea Alexandru (E : 2248, 50—2, 66, 8, 70, 86, 8, 91 ; 6742).

SIMERIA. C. VI. Mîndruţeanu Dorin (E : 2240, 3, 6, 8, 50, 4, 65, 8, 70). Cl. VIII. Samolescu Alexandru (E :2265, 80, 1, 3, 93—6, 9, 301, 2). Cl. XI. Furca Ludovic (6710, 1, *h*, 5, 20, 2, 35, 52, 4—7, 9, 61—3), Pepenaru Ion (6669—78, 82, 93, 5, 703, 10—7, 20—2, 6, 35, 6, 45, 8).

SINAIA. *S. m.* cl. VIII. Anonim (E : 2248, 50—9, 61, 3). Cl. X. Cojocaru Vasile (6666, 7, 70—8, 80, 2, 5, 93, 5, 7, 710, 1, 4—6, 20, 2, 4, 33, 6, 55), Sava Costică (6666, 7, 70—8, 80—3, 5, 92, 3, 5, 7, 710, 1, 4, 5, 6, 20, 2, 4), Ştefan Viorel (6666, 7, 70—8, 80—3, 5, 93, 5, 7, 703, 10, 1, 3, 5, 20, 2, 33, 51, 5—7).

SINEŞTI. *S. g.* cl. VIII. Rădoi Ion (E :2265, 8, 71, 6, 8, 80, 1, 6, 8, 81—6, 301, 2, 7, 8, 24, 62).

SÎNNICOLAUL MARE (Banat). *S. g.* cl. VIII. Voichiţă Doina (E : 2265, 6, 8, 77, 8, 82, 5, 8, 91, 2). Cl. XI. Raica Gheorghe (6637, 40, 67, 9, 703, 10, 1, 3, 5, 7, 720, 2, 30, 5).

SIRET (Suceava). Cl. X. Olaru Miahi (6751—3, 5—7, 63, 4, 93, 4, 93, 5, 7, 9, 801—3). Cl. XI. Alexa Dumitru (6666—8, 71, 2, 4, 5, 7, 80, 2, 710, 1, 3, 5, 20), Airinei Mihai (6630, 4, 9, 44, 57, 60, 7, 701, 3—8, 80, 703).

SLĂNIC (Ploieşti). Cl. X. Neicu Adrian.(6670—7, 91, 710, 1, 5, 20, 2, 35).

SLATINA. Cl. IX. Stăncescu Ştefan (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80—3, 5, 710, 2, 4, 5, 6, 20—2, 4—6). Cl. XI. Buicescu Radu (6847, 62, 4, 9, 79, 81, 4, 927, 31, 4, 5), Păun Maximilian (6669—77, 85).

SLIVEŞTI (Oltenia). *S. g.* cl. VIII. Bunoiu Dumitru (E : 2261, 3, 76—80, 2, 76).

STĂNEŞTI (Oltenia). Absolvent *David Ion* (6666—8. 80—3, 5, 6, 90, 2, 5—8, 703, 6—9, 20—2, 4, 8, 31, 2, 45, 8, 9, 51, 3, 5).

SUCEAVA. *S. m. 1*cl. IX. Olaru Radu (6710, 5, 6, 20—4, 35, 50 2, 7—9, 64, 802, 47—9, 64, 7, 9, 70, 81), Zavera Ioan (6678, 90, 2, 7, 712, 21, 9, 38, 40, 8, 50, 6, 7, 63, 4, 80), Tabarcea Petru (6657, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—5, 92, 5, 8, 700, 10, 5, 6, 30—5). Cl. X, Surugiu Ion (6668, 80, 2, 92, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35).

SOMCUŢA MARE (Maramureş). Cl. X. David Vasile (6666, 7, 70—2, 4—8, 80—2, 92, 5, 700, 3, 7, 9—11, 35, 5, 6, 20, 2, 44, 5, 50, 7).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş). Cl. VI. Popescu Cristian (E : 2267, 72, 3, 5, 82, 3, 91, 2, 4, 5, 6, 301). Cl. VII. Buricel Victoria (E :2282, 3, 91, 2, 4—6, 9).

ŞTEFĂNEŞTI (Suceava). Cl. X. *Baltă Mihai* (6750—3, 6—61, 4, 8, 82, 8, 91, 3, 4, 7, 9, 815, 47—52, 4, 9, 62—70, 9, 80—4, 8)

TAUT (Argeş). *S. g.* cl. VIII. Cios Eva (E :2233, 5, 8, 42, 6, 7, 50, 1, 3, 4, 8), Sucigan Eva (E : 2233, 5, 8, 42,6, 7, 50, 1, 3, 4, 8). Cl. IX. Miron Alexandru (6750, 64, 802, 47—9, 62, 4—9, 79—83).

TECUCI. Cl. IX. Turcu Anghel (6750, 60, 4, 802, 47—9, 62, 4—6, 8, 79—81). Cl. X. Nicoară Ana (6755, 61, 3, 4, 9, 52, 4, 62, 4, 9, 916, 28, 32, 50, 4). Oproiu Janeta (6670, 3, 4, 6, 7, 80, 1, 97, 710, 1, 5, 20, 2, 4, 36, 8). Cl. XI. Alter Surica (6670, 1, 3—8, 80, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 6, 54, 62), Harabagiu Mihai (6667, 70—7, 82, 5, 710, 1, 3, 5, 20, 2, 6, 45, 51, 4, 6, 7, 62, 3).

TIMIŞOARA. *S. g. 10* cl. VII. Mureşan Ion (E :2281—3, 6—8, 91, 2), Laţia Olimpia (E : 2294, 5, 9, 301, 2, 8, 9, 13, 25, 6). *S. m. 1* cl. V. Nicolescu Doina (E :2265, 8, 70, 6, 8, 80—3). Cl. VI. Băţan Mariana (E : 2248, 64, 8, 70, 4—8, 80), Ciugudean Georgeta (E : 2248, 65, 8—70, 4, 5, 7, 8), Dirjan Tudor (E :2248, 9, 65, 8, 70, 4, 7, 8, 80), Dolga Marcela (E : 2248, 50, 3, 65, 6, 8, 70, 5, 8, 80, 2, 3, 91), Frenkel Donca (E :2266, 7, 76, 82, 3, 6, 7, 91), Gîlea Gheorghe (E : 2248, 53, 9, 65, 8, 70, 4, 5, 8, 80), Groza Vasile (E : 2248, 65, 6, 8, 70, 4, 8, 80), Ispas Emil (E : 2276, 81—3, 7, 91, 2), Mirza Eugen (E : 2248, 59, 65, 8, 71, 4, 5, 8, 80), Moldovan Liana (E : 2248, 53, 9, 65, 8, 70, 5, 7, 8), Peter Cornel (E : 2248, 50, 2, 3, 4, 5—7, 60, 3, 6, 8, 76, 80), Prişan Bogdan (E : 2248, 9, 65, 6, 8, 70, 2, 7, 8, 80), Petcu Gheorghe (E : 2273, 82, 3, 6, 7, 91, 2 ; 6791), Rusu Aurel (E :2265, 9, 70, 4, 7, 86, 7, 9), Stoian Catiba (E : 2293, 4, 6, 9, 300—2, 7, 8, 11, 2), Teleagă Maria (E : 2248, 50—2, 4, 5, 60, 1, 3). Cl. X. Rogojan Dorina (6670, 1, 2, 4, 6, 80, 2, 715, 20—36, 35—50—2, 5, 7, 63), *Teleagă Petru* (6795—7, 9, 801—3, 12, 3, 7, 21, 5, 7, 8, 34, 47—54, 7, 9, 62—70, 9, 80, 1, 3, 4, 8). *S. m. 2* cl. VII.

Biroaşiu Carmen (E : 2282, 3, 91—4, 6, 99, 302), Glonţ Florentin (E : 2281—3, 8, 91, 5, 6, 9, 302, 11), Popovici Radu (E : 2281, 2, 3, 6, 8, 91, 4,). Cl. VIII. Crişincov Gabriela (E : 2254, 8, 70, 4, 7, 80, 720, 2, 4), Munteanu Graţiana (E : 2250, 4, 7, 8, 61, 3, 5, 79, 80, 2, 9). Cl. IX. Anton Anton 6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 720, 2, 57, 8, 64), Boldea Elena (6670, 3, 4, 6, 7, 84, 720—2, 35, 57, 8, 64), Schuler Gheorghe (6750, 64, 802, 11, 47—50, 5, 6, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 9, 89). Cl. X. Borcean Veturia (6670, 1, 3, 6, 7, 82, 5, 710, 5, 6, 20, 2, 57, 91), Schwengler Nicolaus (6670, 1, 3—7, 85, 711, 5, 20, 2, 51,5), Zgureanu Viorel (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 80, 2, 5, 96, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 5, 35), Wittwerth Christina (6795—7, 9, 801, 2, 3, 47—9, 53, 4, 9, 62, 4, 5, 8, 9, 70, 8, 81, 4), Grawitsch Richard (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 711, 3, 5, 20, 2, 4, 54, 5). *S. m. 3* cl. VIII. Constandiş Brînduşa (E : 2252, 63, 5, 9, 73, 7,80, 6), Mendelovici Florence (E : 2248, 50, 4, 65, 8, 70, 3, 4, 5, 7, 8), Rothenstein Ana (6750, 1, 5, 6, 8, 62, 3, 8, 97, 801, 14).

TÎRGOVIŞTE. *S. g. 1* cl. VII. Popa Cornel (E : 2249, 50, 4, 7—9, 65, 8, 74, 5, 82, 7). *S. g. 2.* Dumitrescu Georgiana (E : 2233, 40, 3, 5, 8, 52, 65, 8, 80), Păunescu Doina (E : 2238, 9, 40, 7, 8, 53, 68, 70, 8), Chivăran Laura (E : 2235, 54, 3, 7, 50, 4, 6, 8, 65, 8, 70, 4, 7), Pătraşcu Mirela (E :2233, 5, 6, 8, 40, 2, 3, 6, 7,), Udrică Mioara (E : 2248, 54, 5, 7, 8, 65, 67, 80). *S. m. 2* cl. x. Drăguţ Eugen (6710, 5, 20, 2, 4, 9, 33, 5, 51, 5, 61, 74, 97), Enache Gheorghe (6727, 33, 41, 50—2, 5—61, 3—5, 80, 2, 3, 6—8, 90—3, 95—7, 801—3), Mihălcescu Maria (6796, 7, 9, 801, 24, 42, 7, 50, 3, 4, 62, 7, 9, 70, 50, 4), Pîrvu Constantin (6751, 2, 5, 6, 63, 4, 74, 8, 9, 80, 5—7, 9, 802, 11, 3, 7, 49, 65), *Vartan Florin* (6674, 6, 82, 8, 90, 5—7, 801, 2, 8, 9, 1, 3, 7, 8, 21, 4, 6, 7, 52, 3, 7—54, 9, 62, 4, 5—9, 79), *Stanciu Virgil* (6750—2, 5—61, 71, 87, 9, 8, 91, 5—7, 801—3, 8, 11, 4, 5, 7, 21, 4, 9, 21, 4, 9, 40, 1, 3, 7—54, 6, 9), Ştefan Constantin (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 90, 8, 710, 20, 2, 9, 35, 6).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI. Jianu Romel (6716, 20—5, 50, 60, 4, 5, 8, 86, 91), Dulăniţă Vasile (6670—7, 80, 710, 5, 6, 20, 2, 4).

TÎRGU FRUMOS (Iaşi). *S. m. 3* cl. X. Lupescu Florin (6750, 1, 5, 63, 97, 802, 17, 47—9, 62, 4, 9, 70).

TÎRGU JIU. Cl. IX. Belinger Ion (E : 2285, 90, 757, 64, 76, 8, 82, 3, 7, 8, 847, 55, 62, 4, 6, 7, 9, 80, 4), Coicîrlie Valeriu (6750, 65, 88, 91, 5, 802, 11, 3, 8—51, 5, 6, 62—70, 9, 81, 4, 9, 31, 2), Diaconu Ilie (6750, 7, 8, 64, 3, 7, 91, 5, 813, 24, 47—9, 52, 62, 4, 6, 7, 9), Trocan Matei (6670, 6, 9, 80, 2, 3, 5, 715, 20, 2, 4, 6, 35, 6), Văcaru Ion (6561, 70, 6, 80, 2, 5, 715, 20, 2, 4, 6, 36, 42). Cl. X. Barbăroasă Mihai (6751, 2, 4—7, 9, 61, 3, 4, 76, 8, 97, 817, 64), Baros Ion (6750—3, 5—61, 3, 4, 76, 82, 6, 8, 9, 91, 5—8, 802, 3, 8, 11—3, 5, 21, 4, 47, 62), Bardan Viorel (6750, 2, 7—9, 61, 4, 86, 91, 5, 802, 4, 47—50, 62, 5, 6), Becheru Aurelia (6755, 7, 63, 4, 8, 64, 847—9, 52, 4, 62, 4, 7, 79, 81), Bratu Traian (6750—2, 9, 60, 3, 4, 87, 95—7, 801, 3, 8, 11—3, 28), Buşe Florian (6710, 1, 5, 6, 31, 2, 64, 6, 81), Cîrstoiu Florin (6667, 70, 1, 3, 4, 76, 7, 80, 97, 710, 1, 5, 6, 20, 2), Curcanu George (6750—3, 5—61, 3, 4, 6, 76, 82, 6, 8, 9, 91, 5—9, 801, 2, 3, 8, 10, 11—9, 28, 9, 3), *Duncea Florin* (6715, 63, 76, 803, 47—9, 52, 3, 9, 62—4, 79), *Horonaciu Vasile* (6755—8, 60, 3, 4, 7, 82, 8, 90, 6, 7, 9, 801—3, 8, 11—3, 5, 7, 21, 4, 5, 28, 9, 31, 5, 47—9), Jelcu Venera (6751, 61, 97, 848, 9, 52, 4, 67, 79, 81), Merfu Petru (6751—3, 6, 7, 63, 82, 8, 97, 847, 79), Pămţău Gh. (6751, 2, 4—7, 9, 63, 4, 76, 88, 97, 815, 54, 64), Pîrvulescu Sevastiţa (6720, 57, 63, 97, 817, 47—9, 52, 4, 9, 62, 4, 7, 79), Simera Constantin (6755, 7, 8, 64, 76, 89, 97, 848, 52, 62, 4, 8, 80, 1), *Pestroiu Daniel* (6681, 9, 707, 10—2, 4—6, 20, 2—6, 9, 31,—7, 48, 50—3, 5—61, 3—5, 7, 8, 70, 3, 80, 2 9, 90, 1, 3, 5—9, 801—3, 7, 8, 10—9, 21, 2, 4—8, 31, 2, 5, 9,).

Stănculescu Mihai (6715, 55, 7, 63, 82, 87, 9, 847, 8, 50, 2, 4, 9, 62, 79, 81), Stroie Dumitru (6751), 8, 802, 47, 8—50, 4, 9, 62, 4, 5, 79, 81, 4), Vişan Ion (6751—3, 5—7, 9, 63, 4, 76, 82, 8, 813, 47, 50, 4, 67, 79). Cl. XI. Bîrsan Nicolae (6723, 5, 31, 40, 2, 3, 50—6, 68, 70, 2—4, 6, 8, 80, 3 6—8), Fuşe Florian (6736, 51, 5—7, 63, 82, 8, 96, 7, 803, 8, 11—5, 24), Giorgi D. Vasile (6752, 5—7, 61, 3, 76, 88, 849, 54, 5, 79—81). *S. m. 2* cl. IX. Cosma Dumitru (6670, 71, 3, 4, 6, 7, 80, 2—5, 8).

TÎRGU LĂPUŞ. Cl. IX. Santa Viorel (6750, 2, 9, 78, 86—8, 91, 8, 802, 11, 7, 48—51, 62, 4—7). Cl. X. Bogza Grigore (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 7, 8, 9, 79—81, 3, 4, 8), China Ioan (6797, 848—50, 2, 4, 8, 62, 4, 79—81, 8), Cîndea Alexandru (6751, 7, 8, 847—50, 2, 4, 9, 62—5, 7, 9, 79—81), Mureşan Roman (6666—8, 70—7, 80, 95—8, 710, 1, 4—6, 20, 4, 6, 36, 750, 1, 3, 5, 67, 9—71), Podea Nicolae (6750—2, 5, 7—9, 63, 88, 91, 847—50).

TÎRGU MUREŞ. *S. m. 1.* cl. VII. Dragotă Adrian (E : 2293—6, 99, 301, 2, 7, 8, 12). Cl. VIII. Sabău Alexandru (E : 2248, 50, 6—9, 61, 3, 5, 8, 70, 4, 8, 80, 323, 91), Simocici Igor (E :2248—55, 9, 61, 3), Vamoş Vasile (E :2295, 400, 2 3, 23—8, 33ξ 6882, 928, 30, 2, 3). Cl. IX. Păsat Gheroghe (6862—5, 7—70, 847—9, 79, 81, 8, 9, 90). Cl. X. Doboş Alex. (6710, 6, 21, 6, 35, 1, 5—7, 1, 5—7, 9, 63, 4), Laslo Georgeta (6710, 1, 4, 6, 20—2, 41, 50, 5, 7, 63), Pasat Mihaela (6750—2, 5—7, 9, 61, 4, 88, 95—7, 9, 802, 3, 31).

TÎRGU OCNA. Cl. X. Munteanu Eugen (6670, 1, 3, 5, 6, 7, 80, 710, 1, 5, 20, 55,7, 63, 16, 36, 50—2, 6, 4, 88, 96, 7, 80).

TIRLISNA (Cluj). Cl. VIII. Sigartău Ioan (E : 2248, 50, 5, 61, 3, 5, 6, 8, 70, 4, 7, 80).

TÎRNĂVENI. Cl. VII. Oanea Adrian (E : 2233, 42, 4, 5, 6—8, 74, 5).

TITU. Cl. X. Bărbulescu Alexandru (6710, 2, 5, 6, 29, 48, 51, 3, 5, 7, 9, 61, 3, 4, 82, 95, 7, 824, 38).

TOPONA (Argeș). Ivana Ion (6750, 2, 6—61, 3, 4, 82, 7, 91, 6, 7, 9, 802, 3).

TORMAC (Banat). Nagy Iuliana (E : 2281—3, 81, 2, 4, 5, 6, 9).

TRUSEȘTI. Cl. X. Aionesei Ioan (5750, 2, 4, 7, 9—63, 5, 7, 8, 71—3, 6, 7, 80, 2, 4, 6—8, 90—9, 801, 3, 78—85, 93, 5, 6, 8, 880,7, 8), Bălan Gheorghe (6666, 70, 1, 3—7, 80, 2, 4, 5, 92, 8, 701, 7, 11, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 35, 6), Buneanu Emil (6751, 2, 5, 7, 9, 63, 4, 803, 35, 47, 8, 52, 4, 9, 62, 4, 6, 69, 79, 80, 1), Carpiuc Dumitru (6668, 9, 82, 4, 9, 700, 10, 1 5, 6, 20, 5, 9, 31, 42, 6, 8), Racu Ion (6666, 70, 1, 3, 4, 6, 7, 80—2, 4, 5, 92, 3, 702, 7, 10, 1, 2, 3, 6, 20—2, 4, 9, 35), Șchiopu Constantin (6750, 5, 8, 9, 61, 4, 91, 6—8, 801, 2 15, 47, 8, 50, 1, 4, 9, 62, 4—7, 9, 70, 8, 9, 81),

TURDA. *Ș. g.* 6 cl. VII. Adam Laurențiu (E : 2248, 52, 4, 5, 6—60), Rosemberg Emeric (E : 2248, 50, 2—5, 7, 9, 65, 6, 8, 70, 80). *Ș. m.* cl. IX. Deac Ioan (6670, 6, 7, 80, 5, 715, 6, 20, 2—4, 6), Șerban Uiaru (6668, 70—7, 88, 90, 1, 3, 5, 7, 8). Cl. X. Chirilă Radu (6753, 61, 80, 91, 5, 6, 8, 9, 801, 3, 12, 24, 64), Constantinescu Romeo (6670, 1, 3, 4, 6, 7, 85, 710, 5, 20, 2), Dobre Iosefina (6666, 70, 1, 3, 6, 7, 80, 3, 5, 95, 707, 10, 5, 6, 20, 6, 35, 6), Muntean Dumitru (6751, 2, 5, 7, 63, 4, 96, 7, 9, 854, 62, 4), Rada Lucia (6666, 7, 70, 1, 3, 4, 6, 80, 5, 95, 8, 707, 11, 5, 6, 20, 1, 3, 9, 31), Răduțiu Aurel (6670, 1, 3—7, 80, 710, 2, 5, 6, 29), Toma Mircea (6667, 72, 4—7, 10, 5, 20, 2, 35). Cl. XI. Olariu Adriana (6710—6, 20, 54—6, 62, 3), *Pop Gheorghe* (6750—63, 73, 6, 91, 3, 5—803, 8, 12, 5, 7, 8, 24, 7, 39), *Șerban Petru* (6750—65, 80, 8, 90, 1, 3, 5—804, 11,—3, 5, 7, 24, 7, 9, 31, 9).

TURNU MĂGURELE. Cl. IX. Blejan Florea (6723—5, 28, 50, 7, 60, 4, 5, 88, 91), Odăgescu Ioan (6670, 1, 3, 6, 7, 80, 710, 5, 6, 20, 2, 4, 35), Tință Ion (6670, 1, 3, 4, 6,7, 9, 80, 710, 5, 6, 20, 2, 35). Cl. X. Chița Ion (6670, 1, 3—7, 710, 5, 6, 20, 2—6, 35—6), Marinescu Virginia (5670, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 710, 5, 6, 20, 2, 35), Pencea Florian (6750—2, 5, 7, 9, 60, 1, 3, 4, 82, 8, 91, 5, 6, 802, 3, 11), Stănescu Adrian (6670, 1, 3, 4—7, 80—2, 711, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 33, 5, 6).

TURNU SEVERIN. *Ș. m. 1* cl. V. Popescu Mihaela (E : 2265—8, 75, 8, 80, 1, 3). Cl. VI. Cîncui Vasile (E : 2265, 70, 3, 5, 7, 8, 93, 4, 5, 7, 311), Stoker Marina (E : 2281—3, 93—6, 9, 307), Tobă Dana (E : 2265, 8, 07, 7, 8, 88, 91, 7, 8). Cl. VIII. Bădescu Iulian (E : 2265, 7, 8, 70, 4, 5, 8, 80, 1, 91), Căpriță Cristian (E : 2233, 4, 8, 40, 2, 3, 5, 8, 51, 9), Gruie Doina (E : 2291, 2, 4, 6, 9, 301, 7—9, 11), Gupceanu Ion (E : 2248, 50, 7, 9, 68, 70, 8, 80, 6, 7), Vinu Aurelia (E : 2291, 2, 4—6, 9, 301, 7—9, 11, 4). Cl. VIII. Bojan Tatiana (E : 2269, 71, 6, 81, 91, 3—6, 9, 301, 2), Bădescu Iulian (E : 2282, 6, 92, 4—6, 8, 9, 301, 2, 7, 8, 10, 3—6), Cruceru Pompilian (E : 2220, 32, 5, 3, 6, 8—40, 2, 3, 4, 7, 8, 50, 2, 4, 8, 9, 63, 5, 8—80), Lupu Florian (E : 2248, 50—4, 7—9, 61, 3, 6676), Mirică Rodica (E : 2248, 50, 4, 5, 7, 61, 3, 5, 82, 3), Popescu Sever (E : 2281, 90—6, 9, 30—3, 5, 6), Stoker Elena (E : 2273, 5—80, 6720, 2, 4). Cl. IX. *Popescu Constantin* (6750—65, 8, 80, 2, 3, 6, 8, 91, 5—8, 40, 1, 7—59, 61—72, 6, 78—84), Popescu Marcel (6666, 7, 70—7, 9—81, 4, 9, 92, 3, 5, 6, 8, 70, 1, 7, 8, 20—2, 76, 86, 90, 1, 4), *Zimța Florentin* (6751, 6, 97—9, 840, 1, 7—56, 62—70m 2 9, 80, 1, 3, 4, 7, 8, 908, 16). Cl. X. Angelescu). (6750—2, 5, 7—9, 61, 3, 96, 7, 802, 47), Barbu Aurel (6670, 1, 3, 6, 7, 80, 5, 710, 5, 6, 20, 35), Bobea Felician (6666, 7, 70—7, 80, 92, 710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 48), Bușu Dumitru (6670—8, 710, 1, 5, 20, 2), *Coravu Florian* (6750—64, 40, 1, 4, 7—9, 61, 2, 4, 72, 8—83), Pană Nicolae (6670, 1, 2—7, 80, 1, 5, 710, 5, 6, 20—2, 4), Sitaru Grigore (6859, 65, 79, 88, 927, 31, 4, 8, 43, 6, 40, 4, 80), Stoica Maria (6751, 6, 847—9, 52, 4, 7, 79, 81, 4, 8), *Vișan Ion* (6752, 60, 88, 95—8, 80—3, 8, 13, 7—9, 24, 7, 9, 40—3, 7—57, 9, 62—70), Cl. XI. *Popescu Eleodor* (6750—94). Popescu Mariana (6750—2, 5, 7—9, 61, 3, 96, 7, 9, 802, 47—9, 52, 4, 64, 7, 9, 930, 1, 3, 4, 7, 41, 6), Vulpescu Dan (6763, 847—9, 59, 60, 2, 4, 5, 7—9, 81, 4, 8).

ȚĂNDĂREI (București). Cl. IX. Olteanu Nora (6760, 91, 5, 8, 802, 40, 50, 1, 5, 6, 9, 70, 9, 81, 4).

URZICENI. *Ș. g. 2.* Chițu Doina (E : 2293—5, 9, 307, 8, 18, 9), Cancev Alexandru (E : 2248, 50—4, 6—8, 63, 5, 8, 70, 1, 3—6, 8, 80, 6720, 2).

VALEA LUI MIHAI (Crișana). Cl. X. Veea Ioan (6710—2, 5, 6, 20, 2, 4, 35, 6, 66, 7, 9, 60, 1, 3, 4, 91).

VĂLENII DE MUNTE. *Ș. m.* cl. VIII. Voiculescu Emil (E : 2281—6, 301, 7, 8, 14). C. X. Bocan Ion (6796, 7, 803, 30, 41—3, 7, 8, 60—4, 9, 62—70, 4, 9, 81, 4, 8—90).

VASLUI. *Ș. m.* cl VI. Gold Iulian (E : 2281—3, 6, 93—7, 9).

VLAHI. *Ș. g.* cl. VIII. Niculescu Veronica (E : 2281—6, 8—92), Poenaru Paraschiva (E : 2281—97, 9—303).

VINGA (Banat). *Ș. m.* cl. VII. Moneric Ștefan (E : 2248—52, 7—60, 5, 8—70, 7, 8, 91). Cl. VIII. Ghinga Emilian(E : 2265, 8, 9, 936, 301).

VIDELE Ş. *m.* cl. X. Cojocaru Gheorghe (6667, 70, 1, 3—7, 80, 92, 5, 7, 711, 2, 5, 6, 20, 2, 4, 32, 5, 48, 51, 7), Muşat Gh. (6667, 70, 1, 3—5, 80, 1, 92, 5, 8, 710, 2, 20, 2, 4, 4, 32, 5, 48).

VIDRA (Galaţi). Cl. X. Tuvene Gh. (6670, 1, 3—7, 96, 710, 5, 6, 20, 2, 57, 63, 4).

VIŞEU (Maramureş). Cl. X. Fiţigău Ion (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 4, 9, 32, 5, 52, 5, 7, 9, 61, 3).

ZALAU. Cl. IX. Costea Grigore (6750, 7, 9, 60, 1, 847, 52, 4, 64, 79, 80—4). Cl. X. Elec T. Maria (6670, 1, 3—7, 81, 2, 715, 20, 2,6), Turcaş Teodor (6667, 75, 85, 92, 3, 7, 8, 710, 4—6, 31, 3).

★

Pînă la 15 august 1965 s-au primit soluţii bune la problemele propuse în ultimele trei numere din G.M.—B de la :*

ABRUD (Cluj), *Liceul 1* cl. IX. Corcîu A. (6764, 78, 83, 7, 847—9, 62—, 4, 5, 7, 79, 81), Suciu Nicola (E. 2290 ; 6750, 64, 78, 83, 815, 47—9, 62, 4, 79, 81). Cl. X. Băbuţ Gh. (6751 2, 5—7, 63, 4, 97, 9, 847—9, 84), Bolunduţ Ioan (6751—3, 5—7, 9, 63, 4, 80, 2, 97, 9, 848), Borşa Sabin (6751, 2, 5—7, 63, 4, 97, 9, 847—9, 62, 4, 79, 81), Ghircău Gh. (6750—3, 5—7, 63, 4, 78, 89, 97, 9).

ADAMCLISI, *Ş.g.1* cl. VIII. Dumitru Stana (E : 2288—91).

ADJUD (Bacău). *Liceul 1* cl. VI. Bocănuţ Paula (E : 2290—8, 11, 2). Cl. XI. Ceauşoglu Nicolae (6798—800, 13, 5, 41, 7—9, 52, 4, 9, 62—9, 79—81, 4, 8).

AIUD. *Liceul 1* cl. VI. Maftei Doina (E : 2283, 8, 91, 3, 4, 302, 7, 8). Cl. XI. Hamosky Iosif (6857—50, 2, 4, 62, 4, 79, 81, 931, 46, 54).

ALBA IULIA. *Liceul 1* cl. IX. *Miclea Cornel* (E :2319, 20 ; 6750, 2, 60, 1, 4, 91, 802, 3, 14, 40, 7—51, 3, 5, 6, 62—70, 8—81, 3—5, 8, 90, 916), Oargă Gh. (6750, 2, 8, 60, 1,4, 5, 8, 88, 91, 6, 802, 3, 11, 4), Cl. X. Patachi Mircea (6751, 2, 5—9, 61, 3, 4, 93, 6, 7, 9, 802, 3, 35).

ARAD. *Ş. g. 1* cl. VII. Kestenbaum Iacob (E : 2288, 91, 3—6, 302, 4, 8, 11—3), *Liceul 1* cl. VIII. Boşcaiu Voicu (E : 2281—3, 6, 7—91, 3—6, 8—8303, 5—8, 10—4, 6, 9—22§ 6847, 8, 50, 62, 7, 70, 9, 83). Cl. IX Adah Mircea (6847—9, 62, 4, 9, 79, 71, 3, 931—3, 8, 46), Balla Ioan (E : 2277 ; 6711, 3, 51, 6, 8, 9, 83, 8, 91, 5, 8, 802), Gligor Alexandru (E : 2305, 6 ; 6802, 47—9, 55, 62, 4, 9, 79, 81, 8). Cl. X. Neamţu Elisabeta (6835, 47—50, 2, 4, 5, 9, 62, 4, 9, 79). *Liceul 2* lc. VIII. Decis Florin (E : 2281, 2, 8, 91—6). *Liceul 4* cl. IX. Aciocîrlănoaie Florin (E : 2303, 5, 19—22 ; 6750, 88, 847,—50, 62, 4—7, 9, 81). *Liceul 5* cl. XI. *Budeanu Teodor* (6710, 1, 5, 97—9, 801, 2, 13, 24, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 67—70, 8, 9, 81, 4, 8, 96, 927, 31, 2, 6—8, 41, 3, 6, 9, 50, 5).

BACĂU. *Ş. g. 5* cl. VIII. Knoll Iulia (E : 2294—6, 9, 301, 2, 7, 8). *Liceul 1* cl. VIII. Knoll Raul (E : 2319—21, 4—7 ; 6847, 8, 62, 79—81, 916). Cl. X. *Ciochină Silviu* (6751—3, 5—61, 3—5, 8, 73, 83, 9, 90, 2, 3, 5—7, 9, 801—3, 6, 8, 15, 8, 9, 23, 4, 7, 9, 31, 5). Cl. XI. Chircu Eugen (6795—7, 801—3, 11, 24, 47—52, 4, 9, 62, 4, 79, 81). *Liceul 2* cl. X. Adam Dumitru (6750, 2, 3, 6, 7, 9—61, 3, 7, 82, 4, 93). *Cosma Aurel* (6751—3, 5—8, 60,1, 3—5, 73, 4, 6, 80, 5, 8—92, 4, 7—9, 801, 8, 12—4, 8, 21, 4—6, 8, 9, 31 5), Leibu Max (6750—2, 5—8, 60, 3—5, 7, 9, 801, 2). Fără clasă : Andrei Nicolae (6751, 5, 7, 63, 97, 802, 48, 9, 54, 64, 79, 81).

BAIA DE ARAMĂ. *Liceul 1* cl. X. Drăgulescu Emilian (6751, 5, 97, 808, 31, 47, 52, 4, 9, 62, 4, 7—70, 8, 81, 4, 7, 8, 96, 902, 27, 31, 2, 4, 41, 6, 9, 50, 63).

BAIA MARE. *Ş. g. 2* cl. V. Bond Ioan (E : 2283, 8, 91 3, 4, 6, 325, 7). *Ş. g. 5* cl. VII. Buteanu Aurelia (E : 2282, 3, 6, 95, 9, 300—2). *Liceul 1* cl. IX. *Sabou Ioan* (E : 2277, 8, 85, 9, 90, 305, 19—22 ; 6750, 7, 8, 64, 5, 82, 94, 5, 9, 802, 13, 24, 46—50, 4, 62, 4, 6—70, 2, 9, 81, 4, 8, 9, 90). *Liceul 3* cl. VIII. Ambruş Adriana (E : 2305, 19, 20, 33 ; 6847—9, 62, 927, 31), Palaghiţă Nicolae (E : 2281, 4—6, 9, 301, 2 ; 6848, 62, 79, 81). Cl. IX. Apşan Dan (E : 2305, 6 ; 2761, 5, 9, 73, 82, 6, 8, 9, 92, 5—8, 802, 3, 8, 14, 8, 9, 24, 7, 920, 7, 9—34, 8, 46, 9, 50, 7, 63, 5), Grosfeld Mihai (E : 2285, 9, 90, 305 ; 6764, 5, 8, 80, 2, 3, 7, 8, 95, 6, 802, 3, 11, 3—6, 8, 24, 40,1, 7, 9—51, 3, 5, 6, 62, 4, 5). Cl. X. Manciula Dorina (6751, 2, 5, 63, 96, 7, 847, 8, 52, 4, 9, 62, 4, 7, 8, 79, 81, 5). *Liceul 3* cl. X. Pop Livia (6680, 1, 5, 97, 720, 2—4, 9, 36, 67, 847), Radu Mircea (6741, 50, 1, 63, 90, 3, 7, 817, 47—9, 52, 4, 9, 62—4, 9, 81, 4, 927, 30, 1, 8, 46, 50), Vasilov Angela (6795—7, 9, 833, 47, 8, 52—4, 62, 4, 8, 9, 81, 930, 1, 3, 4, 6, 7, 41, 2, 6, 9, 50, 4).

BAIA SPRIE. *Liceul 1* cl. IX. Trif Ioan (6757, 8, 60, 91, 5, 7, 9, 802, 11, 3, 48, 51, 4, 62, 5, 70, 9, 81, 8, 9).

BĂBENI (Oltenia). *Liceul 1* cl. IX. Dicu Constantin (E : 2305, 19, 21 ; 6764, 847, 8, 56, 62, 41, 5, 9, 70, 81, 4, 8).

BĂRBĂTEŞTI (Oltenia). Absolvent Tunşanu Grigore (6751, 4, 62—4, 97 847, 52, 4, 62, 4, 89).

BECLEAN (Cluj). *Liceul 1* cl. IX. Andronic Petru (E : 2289, 90, 319 ; 6788, 91, 847—9, 62, 4, 7, 9).

*) Evidenţiaţii din această rubrică sînt trecuţi cu litere cursive. S-a mai ţinut seama de modul de redactare şi de dificultatea problemei.

BEIUȘ. *Liceul 1* cl. VI. Covaci Iosif (E : 2283, 91, 4—6, 8, 301, 2, 7, 11). Cl. VIII. Zare Viorica (E : 2282—4, 6, 9, 300, 1, 7, 14, 6). Cl. X. Gigă Silvia (6750,—2, 5—7, 9, 63, 96, 7, 802, 47, 9, 52, 9, 62, 8, 9). Mladin ţMaria (6750—2, 5—7, 9, 60, 3, 4, 7, 82, 96, 7, 9, 801).

BERCHISEȘTI (Suceava). *Ș. g. 1* cl. VIII. Toloș Elena (E : 2282, 8, 91—3, 5, 6, 301, 2), Varvara Aurica (E : 2281, 2, 8, 91—3, 5, 6, 301, 2), Varvara Maria (E : 2281, 2, 8, 91—3, 5, 6, 301, 2).

BISTRIŢA (Cluj). *Liceul 1* cl. IX. Cotoc Ioan (6752, 7, 9, 61, 8, 88, 91, 6, 9, 802, 11, 3). Gagea Alexandru (E : 2289,; 6760, 1, 8, 91, 802, 11, 3, 4, 7—9, 62, 4, 79, 81). Cl. XI. Fucă Sergiu (6750, 2, 36, 7, 9—61, 88, 91, 7, 9).

BÎRLAD. *Ș. g. 1.* cl. VIII. Cider Mihaela (E : 2293—6, 9—301, 3, 7, 8, 16, 20). *Liceul 1* Cl. IX. Stoide Maria (E : 2290, 305; 6847—9, 62, 4, 5, 9, 79, 81, 4). Cl. XI. Badea Lori (6795—7, 9, 801—3, 9, 10, 2, 23, 41, 7, 9, 50, 2, 62, 4, 6, 7, 9, 79—81, 3, 4). *Liceul 2* cl. VIII. Duda Doina (E : 2249, 50, 5, 65, 6, 8, 80, 1 6—8, 80—3, 91, 3—6, 9, 301, 2, 7, 8, 12, 3, 47, 8, 62, 79, 80, 1), Mînza Sorin (E : 2281, 2, 91, 3, 41, 6, 9, 8, 21). Cl. X. Agafiţei Alexandrina (6922, 7, 9, 31—3, 6, 8, 41, 3, 5, 50—4, 7). Bușilă Otilia (6750—2, 5—7, 63, 4, 847, 89, 62, 4, 7, 9, 79, 81). Cl. XI. Felea Victor (6750, 1, 2, 5—61, 3, 4, 86, 92, 801, 2). *Liceul 3* cl. VIII. Dichter Mihaela (E : 2291, 4—6, 300—3, 5, 7, 8, 11). Cl. IX. *Cînepă Victor* (E : 2302, 3, 5,.6, 19—22; 6756, 63, 88, 802, 40, 1, 7, 9—51, 5, 6, 62, 4—70, 2, 8—81, 3, 4, 7—90). Iacomi Mihail (E : 2305, 19, 21, 2, 33; 6795, 9, 802, 11, 41, 7—51, 5, 6, 62, 4—70, 9, 81, 3, 4, 7, 8, 927, 9—33, 5, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 52, 7),Iordache Simina (E : 2319—21; 6764, 841, 7—50, 62, 4, 5, 7, 81, 4, 8).

BOLINTINUL DIN VALE (București). *Liceul 1* cl. IX. Cristescu Cornel (6760, 95, 802, 51, 8, 62, 5, 7—9, 81, 3, 4, 8). Grigore Nicolae (E : 2305, 19, 21; 6735, 52, 64,847—9, 51, 62, 4, 6, 9, 79, 81, 4). Cl. X. Marin Alexandru (6751, 2, 5—61, 3, 4, 88, 95—7, 803, 15, 7, 25).

BOȘA (Maramureș). *Liceul 1* cl. IX. Timiș Pricop (E : 2289, 90, 305; 6759, 64, 78, 80, 6, 7, 9, 908, 12, 3, 5).

BOTOȘANI. *Liceul 1* cl. X. Prinţ Marioara (6752, 5, 9—61, 96, 7, 847, 8, 62, 79, 81), Zăicescu Mariana (6752, 5, 9—61, 96, 7, 847, 8, 62, 79, 81).

BOZOVICI (Banat). *Liceul 1* cl. VIII. Piescu Călina (E : 2281, 2, 91—3, 5, 300, 1), Pișlea Iulian (E : 2287, 94, 6, 8, 300, 7, 15, 6; 6786). Cl. X. Burac Iacob (6751, 5, 7, 63, 88, 847, 8, 52, 4, 62, 4, 8, 81(). Cl. XI. Lopatiţă Tiberiu (6795—7, 9, 81—3, 29, 41, 7—54, 8, 62—70, 2—4, 8—81, 834, 920, 1, 3, 4, 7, 30, 1, 2).

BRAD. *Ș. g. 1* cl. VI. Fornade Cornelia (E : 2292, 4—6, 307, 11, 3, 5). *Liceul 1* cl. X. Fornade Cornel (6751, 2, 5, 6, 63; 6796, 831, 47—50, 2, 62, 4—6, 7, 9, 79, 81).

BRAȘOV. *Ș. g. 6* cl. V Zsido Eva (E : 2281—3, 6, 93—6). *Liceul 1* cl. IX. Bătătorescu Anton (6757, 76, 80, 2, 3, 6, 8, 91, 5, 802, 11, 3). *Liceul 4* cl. VI. Galea Maria (E : 2291, 2, 4—6, 8, 300—2, 7), Nistor Andrie (E : 2291, 2, 4—6, 8, 300—2). Cl. VII. Olteanu Valentina (E : 2307, 8, 11, 4, 25, 6, 8, 33). Cl. IX. *Bontaș Vasile* (E : 2285, 9, 90, 304—6, 19—22; 6750, 8—61, 4, 8, 83, 8, 91, 4—6, 8, 802, 3, 11—3, 40, 1, 8, 9, 51, 2, 5, 6, 62—5, 7, 79, 81). Cl. X. Colceriu Mihai (6759, 61, 86, 9, 97, 840, 7, 8, 50, 1, 9, 62, 4, 7, 73, 4, 81, 4, 915). Cotora Gh. (6751—, 6—71, 3, 4, 8, 80, 3, 7, 8, 91). Pitiș Gh. 6795—7, 9, 801—3, 8, 9, 12, 3, 5, 7, 9, 24, 7, 9, 31, 5, 41—3, 7—55, 7, 9, 61—9, 71, 3, 4, 9—81, 3—5, 7, 8, 93, 6, 901, 3, 9, 15. 6, 9). *Liceul de muzică* cl. VIII. Varga Andrei (E : 2281—3, 7, 88—92).

BRĂILA. *Liceul 1* cl. IX. Lemnaru Liana (E : 2304—6, 19—22; 6795, 802, 11—4, 24, 40, 1, 7—51, 6, 62—70, 9—81, 3, 4, 7—90), Petride Horia (6850, 1, 5, 62, 5, 7—70, 2, 81, 4, 8), Frangu Silvia (E : 2289, 319—21; 6847, 9, 50, 5, 62, 4, 79, 81, 4). *Liceul 3* cl. X. Balaban Adriana (6711, 5, 21, 4, 35, 50—2, 5—7, 61, 3, 4), Chiriţă Mihai (6755, 7, 63, 79, 847, 9, 50, 4, 9, 64, 79, 81), Leahu Ionel (6751, 2, 5—7, 63, 4, 82, 96, 7, 9, 815). *Liceul 4* cl. X. Manea Aurel (6752, 5, 7, 9, 63, 4, 87, 8, 96, 9, 857, 9, 62, 4, 79, 81, 4).

BREAZA. *Ș. g.* cl. VI. Ivan Constantin (E : 2293—7, 300—2), Muscalu Gheorghe (E : 2293—7, 300—2). *Liceu* cl. IX. Cîrtoaje Vasile (E : 2304, 5; 6795, 7, 9, 801, 2, 8, 9, 11—5, 8, 9, 21, 4, 5, 31, 8,). *Liceul militar* cl. X . Matache (6751, 5—7, 61, 3, 96, 7, 9, 802, 3, 42, 3, 7—9, 52, 4, 9, 62—4, 9, 79—81, 4, 8). Oancea Petru (6755, 63, 87, 847—50, 2, 9, 52, 5, 7—9, 81), Pahonţu Constantin (6751, 2, 5, 7,8, 61, 3, 4, 6, 7, 9, 802, 3). Iliescu Traian (6751, 2, 5—7, 61, 3,96, 7, 9, 801, 3, 8, 28, 31, 42, 3, 7—50, 2, 4, 7, 9, 264, 9, 79, 834, 8. Cl. XI. Filimon Nicolae (6773, 6, 89, 90, 5—9, 801—4, 7—10, 2—9, 23—5, 7, 9, 31, 2, 5, 6, 9—43, 5—50, 2—5, 7, 9—70, 2—81, 3, 4, 6, 8, 95—7, 905, 9, 12, 4, 6).

BUCUREȘTI. *Ș. g. 3* cl. VIII. Paraschiv Monica (E : 2256—8, 68, 70, 4, 91, 4, 6, 300—2), Stoiciu Gheorghe (E : 2291, 2, 4, 5, 6, 9—302, 16). *Ș. g. 24* cl. VII. Frisov Puşa (E : 2282, 91, 2, 4, 6, 9, 302, 07). *Ș. g. 75* cl. VII. Mărculescu Constantin (E : 2295, 6, 9—302, 11, 33). *Ș. g. 85* cl. VI. Cernica Ruxandra (E : 2281, 8, 94—6, 301, 7, 8, 11, 2) *Ș. g. 118* cl. VIII. *Roman Adriana* (E : 2281, 5, 8—91, 3, 4, 6—302, 5, 11, 5, 9—22; 6752, 9—61, 96, 802, 3, 11, 47—9, 53.. 8, 63—5, 7, 74, 9, 81, 3). *Ș. g. 121* cl. VII. Donescu Florin (E : 2288, 91, 2, 300—2, 14, 5)

Ş. g. 122 cl. VI. Brătescu Ştefana (E : 2293—9, 301, 2, 8, 13). Cl. VII. Balaur Aurora (E : 2291—6, 9, 301, 2), Ioan Emilia (E : 2291, 7, 9, 301 2). Cl. VIII. Georgescu Dan (E : 2303, 7, 12, 9, 24—6, 6931). *Ş. g. 128* cl. VII. Bivolaru Violeta (E : 2282, 3, 8, 91—6, 8—302, 7, 8, 11 ,2 4), Ciontea Mariana (E : 2281—3, 8, 91—6, 8—302, 7, 8, 11, 2, 4), Ciara Mihaela (E : 2282, 3, 6,, 8, 91—6, 8—302, 7, 8, 11, 2, 4) *Ş. g. 145* cl. VIII. Marin Liana (E : 2281—3, 93, 4, 6, 9, 307 8; 6864). Cl. VII. Papari Zoiţa (E : 2282, 3, 90, 9, 301, 7, 12, 4). *Ş. g. 146.* cl. VII. Bădescu Smaranda (E : 2293—6, 9—302, 7, 8, 16). *Ş. g. 166* cl. VII. Crivăţ Maria (E : 2293—5, 6, 9, 301, 7, 24—6). *Ş. g. 169* cl. V Dumitrescu Ion (E : 2293—6, 307, 8, 23, 5, 6). *Ş. g. 173* cl. V. Andrievici Bogdan (E : E : 2281, 3, 91, 3—6, 326).

Student *Cărbunaru Constantin* (6670—82, 5, 93, 6, 707, 10, 1, 3, 5, 6, 20, 4, 32, 5, 42, 8, 50, 2—7, 9—64, 91, 4, 5—803, 11, 7, 29, 31, 5, 9, 41, 7—54, 9, 62—6, 8—70, 4, 8—81, 3—6, 927 9, 31—4, 46, 9—52, 4).

Absolventă Atanasiu Gabriela (6795—8, 800, 1, 46, 936, 8, 43—5, 9—52, 4).

Liceul 1 N. Bălcescu cl. IX. Adrian Sorin (E : 2285, 9, 305; 6750, 8, 60, 1, 85, 8, 95, 6, 8, 9, 802, 3, 11, 3, 5, 38, 40, 8—51, 62, 4—70, 9, 81, 4, 8), Boca Cristian (E : 2305, 19—21 6768, 847, 8, 62, 4, 7, 79, 81), Brăileanu Ana (E : 2305, 19—22; 6847, 50, 5, 62, 4, 5, 7—9, 84, 8), Carp Victor (E : 2305, 6; 6795, 6, 8, 9, 802, 11, 47—9, 62, 79, 81, 8), Hahn R. Mihail (E: 2285, 305; 6750, 61, 8, 9, 802, 47—9, 62, 4, 79, 81), Hentea Rodica (E : 2316, 9—22; 6752, 841, 7—53, 5, 62—9, 79—81, 4), Ionescu George (6847—50, 62, 4, 7—9, 79, 81, 3), Popa Cornel (E : 2305, 6, 19—22, 33; 6709, 802, 47, 62—5, 7—9, 78—81, 3, 4, 8, 916, 27, 8, 38, 45, 6), Sbîrnea Mihai (E : 2284, 5, 9, 90, 305, 6; 6712, 4, 21, 6, 9, 33, 50—2, 5, 7—61, 3, 4, 6, 95, 6, 8, 802, 3, 11—3, 5, 21, 4), Stibina Codruţa 6802, 11, 3, 47—51, 62, 4, 5, 6, 9, 79, 81, 4, 8, 927, 34, 8). Teişanu Cornel (E : 2305, 6, 19—22; 6750, 2, 7, 8, 60, 1, 95, 6, 8, 9, 802, 3, 11, 40, 7—50, 62—5, 7, 79, 81). Tronaru Aurelian (E : 2277—80, 5; 6712, 5, 24, 9, 50, 7, 8), Udrea V. Mircea (E : 2320—2; 685 8, 9, 67—70, 927, 31, 8, 46). Cl. X. Jiletcovici Iulian (6750, 2, 3, 71, 93, 5—7, 9, 801—3, 29, 31, 44, 95, 6), Negulescu Doina (6795—79, 801, 47, 8, 62, 7, 9, 79, 81, 7, 936, 41, 54), Nicolae Dan (6797, 841—3, 7—50, 2, 9, 62, 4—70, 9, 81, 3, 4, 8, 915, 27—34, 8, 41, 3, 50, 4), Răzvan Milena 6847—9, 52, 62—4, 7, 79, 81, 3, 4, 927, 30—3, 41, 5, 49, 50, 2, 4, 7). Cl. XI. Munteanu Mariana (6750—2, 5—61, 3, 4, 82, 3, 6, 8, 90). *Liceul 3* cl. X. Popescu I. Mihail (6797, 9, 842, 3, 7—50, 2, 9, 62, 4—70, 9, 81, 3, 4). *Liceul 5* absolvent Kirmaier Eduard (6751, 4—7, 61—4, 82, 7, 9, 91, 7, 800, 7, 13, 7). Cl. VII Cosma Gh. (E : 2293, 5, 9, 301, 4, 14, 6, 25, 8). Cl. VIII, Basch Maxim (E : 2294—7, 300—3, 5; 6802), Cernea Mariana (E : 2281—390, 1, 3—6, 9, 301, 2, 7, 8, 12—4, 6, 9, 24—9, 33; 6847,—50, 62, 4, 79, 81, 932). Cl. IX. *Horea Liviu* (E : 2290, 302, 5, 6, 19—22; 6715, 95, 6,802, 3, 11—3, 5, 4, 1, .7—51, 3, 62—71, 8—81, 3, 4, 7—9), *Manolache Nicolae* (6670, 1, 3, 4, 6, 79, 80, 1, 3—6, 95, 7, 8, 701, 15, 6, 20—8, 33, 5, 6, 50, 1, 3, 7, 60, 3—5, 8, 70, 8, 80, 8, 90, 1, 2, 5,7 9, 801 8—10, 3, 5, 6, 8, 21, 4, 9, 31, 5, 40—2, 7—52, 4—7, 9, 62—9, 81, 95, 6, 8, 907, 9, 16, 27, 9, 31, 4, 8, 43, 5, 6, 9, 60, 2—8, 61, 3, 6, 9, 71—3, 5 : E : 2260—4, 77—80, 4, 5, 9, 90, 304, 5, 6, 20, 2), *Mariotti Răzvan* (6795—7, 802, 3, 11, 5, 23—5, 7, 31, 35, 40—3, 7, 9—54, 6, 8, 9, 62—6, 8—74, 9—81, 3—5, 8, 902, 30, 1, 4, 8, 42, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7). *Liceul 6* cl. VII. Weiner Irina (E : 2282, 3, 6, 8, 91—4, 9, 300). Cl. IX. Malide A. Marie (6002, 11, 47, 50, 65, 7, 70, 9, 81, 927, 31, 45, 6, 57). *Liceul 7* cl. VII. Redlinger Daria (E : 2281, 2, 3, 6, 8, 913—6, 8, 300, 1) Cl. VIII. Hincu Eugenia (F : 2282, 3, 90, 3, 5, 6, 8, 9; 6761, 76). Cl. X. Raba Gabriela (6750, 3, 93, 5, 9, 801—3, 29, 95, 6, 946, 50, 4). *Liceul 8* cl. VIII. Cinteză Mircea (E : 2281—3, 5, 6, 8—91, 3—6, 9—302, 5, 7, 9, 10, 1). *Liceul 10* cl. VII. Ioan Sanda (E : 2281——3, 6, 91—6). *Liceul 11* cl. IX. Pascaru Aurel (E : 2285, 9, 90, 319—21; 6750, 2, 7—61, 4, 82, 7, 8, 95, 6, 802, 3, 40, 7—50, 62, 4—70, 9, 81, 8), Cl. X. *Sutaşu Marius* (6750—3, 5—8, 60, 1, 3, 4, 76, 87, 97, 801, 2, 8, 15, 7, 29, 31, 4, 5, 42, 3, 7—52, 9, 62, 4—70, 3, 9—81, 3, 4, 8, 916), Teodorescu Valentin (6750, 2, 7, 8, 60, 1, 3, 7, 8, 73, 6, 82, ,3 ,7, 91—4). Cl. XI. Cristea Gabriel (6751, 2, 7, 9, 60, 3, 4, 7—52, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 81), Diaconescu St. Stelian (6750, 6, 8—61, 5, 8, 93—7, 9), Mihalca Dan (6488, 648, 750, 1, 6, 80, 90, 9, 800, 12, 50, 8, 11, 2, 4, 20, 1, 4, 5, 7, 35, 40, 2, 5, 6, 51, 2, 4, 5, 6, 9, 67, 72, 3, 89, 90, 8, 903, 4, 9, 55, 6—10, 5, 9, P), *Rădulescu Dorin* (6750—2, 5—7, 9, 60, 1, 3, 4, 71, 95—9, 801—3, 8, 9, 17, 23, 4, 9, 31, 3, 41—3, 7—50, 2—5, 7, 51, 9, 62—70, 8, 9, 80, 1, 2, 4, 6, 95, 6), *Ursulescu Octavian* (6750—9, 61, 2, 4, 73, 80, 2, 8, 92, 5—803, 11—5, 7, 21—4, 7—33, 6, 8, 9, 40, 1, 3—61, 3, 4, 75, 7, 80, P). *Liceul 12* cl. IX. Găiculescu Dan (E : 2319—22; 6847—50, 62, 4, 5, 7—9, 78—81, 4, 8), *Ralescu Dan* (6751—5, 6, 60, 2, 4, 5, 8, 76, 86, 91, 5, 5, 8—800, 2, 3, 9, 11—3, 5—7, 24, 7, 9, 33, 9—43, 7—53, 5, 7, 9—70, 2, 3, 7—81, 3, 4, 6, 8—90 3, 5, 6, 902, 12, 4; E : 2277, 89, 90, 5, 503, 6, 19—22). Cl. IX. Drăgoi Nicolae (6753, 6, 60, 1,86 93, 802, 11, 47—9, 62, 9, 79, 81, 7). *Liceul 13* cl. IX. *Arapu Bogdan* (E : 2285, 9, 90, 305, 6; 6750, 2, 6, 8—61, 3—5, 70, 83, 6, 7, 91, 5—8, 802, 3, 9, 11, 3, 47, 9, 51, 64, 8—70, 9, 81, 4), Bănuţă Florea (E : 2289, 90, 319, 21; 6750, 64, 8111, 47, 79, 81, 8), Bihoiu Dan (E : 2289, 90, 321; 6750, 60, 802, 11, 40, 7—9, 64,7, 70, 9, 88), *Lăzărescu R. Sorin* (E : 2289, 90, 305, 6, 19—22; 6750—2, 5, 6, 8—61, 3—5, 86, 95—9, 802, 9, 11—3, 40, 1, 7—56,

OROSZ-MUSZAKI KÖNYVTÁR 1883 DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

9, 62—70, 2, 8—81, 3, 4, 7—90, 921, 7—35, 43, 6, 9, 50, 2). Cl. X. Bratu Stan (6750—2, 9, 61, 3, 96, 7, 801 3, 10, 25). Capră Livia (6682, 847, 50—2, 4, 62, 5—70, 9, 81, 4, 7, 8, 96, 936). Serban Cristian (6799, 9, 847, 54, 64, 79, 81, 927, 31, 46, 50, 4). *Liceul 15* cl. IX. Dincă Ştefan (E : 2285, 90 ; 6750, 9, 62, 3, 70, 6, 80, 1, 7, 8). *Liceul 16 George Coşbuc* cl. VII f.f. Drăguşin Alex. (E : 2281, 2, 6, 8, 90, 1, 2 ; 6757, 64, 83, 8). Cl. IX. Mendelsohn Nadia (E : 2305, 6, 19322 ; 6814, 40, 1, 5, 6, 88 9). *Liceul 17* cl. IX. Avramoiu Valentin (6362—70, 2, 8—81, 3, 4, 8, 9). Cl. X. *Botez Dan* (6750,—65, 8, 9, 73, 6, 80, 2, 3, 5—90, 3, 4, 7, 819, 24, 40, 1, 4, 5, 7, 51, 3, 4, 6—61, 3, 6, 8—70, 2—6, 8, 80, 2—90, 2, 5—901, 4—6, 9, 12, 3, 4, 8—33, 5—7, 9—45, 7, 51, 2, 4—8, 63, 4, 6, 72, 5, 80, 9, 90—2, 5—7005, 7, 10, 13, 28, 37, 9, 44, 5, P) Oteteleşanu Şerban (6795—7, 9, 801—3, 9, 13—5, 7, 8, 24, 5) Suciu Paul (6750—65, 7, 71, 3, 8, 83, 6, 9—99, 801, 2, 11, 4, 24, 38). *Liceul* 18. X. Musceleanu I. (6798, 9, 847—50, 62, 4, 6, 7, 79, 81, 4, 931, 2). *Liceul 19* cl. X. Ilie Romeo (6796, 7, 9, 801—3, 31, 40, 7—53, 9, 62—5, 7, 70, 8, 9, 81, 3, 4, 7). *Liceul 21* cl. X. Ianculescu E. Andrei (6710, 5, 6, 20, 2, 3, 51, 2, 63, 7, 97, 803, 17, 25). *Liceul 22* cl. XI. Cristoloveanu Sorin (E : 2305, 6, 19, 21, 2, 33, 4 ; 6795, 8, 812, 3, 5, 41, 7, 8, 50, 5, 62, 4—70, 8—81, 3, 4, 8, 920, 7, 8, 31—4, 6, 41, 6, 9, 52, 7, 8, 61, 3—5). Cl. X. Stoian Liviu 6795, 7, 9, 801, 8, 18, 21, 2, 4, 9, 31, 5, 42, 3, 7, 9—52, 4, 9, 62, 4, 7—9, 74, 9, 81, 4, 7—9, 95). *Liceul 23* cl. X. Băluţă Teodor 6751, 2, 5, 7, 9, 61, 3, 4, 86, 91, 7, 802, 17, 29) Căpăţînă Aurel (6761, 4, 847—9, 52, 62, 4, 7—70, 8, 9, 81, 3). *Liceul 25.* cl. IX. Bota Cătălina (E : 2319, 21 ; 6758, 802, 48, 62, 4, 5, 7, 79, 81, 8), Florescu D. Victor (6752, 91, 802, 11, 47, 9, 62, 4, 7, 8, 70, 9, 81, 8), Rădulescu Nicolae (6570, 2, 8, 802, 11, 47, 9, 64, 7, 8, 70, 9, 81). Stanev Dan (E : 2313, 20, 1 ; 6788, 811—3, 41, 3, 50, 68, 88). Cl. X. Dumitriu Silviu (6787, 97, 9, 813, 42, 3, 7, 9—54, 7, 9, 62—4, 6—70, 4, 9, 80, 1). *Liceul 28* cl. VII. Stroe Marian (E : 2293—7, 9, 301, 2), Văleanu Vladimir (E : 2248—64). Cl. VIII. *Coste Constanţa* (E : 2293, 4, 6, 9—303, 5, 7, 8, 11, 2, 4—6, 9—21, 5—8, 30, 1 ; 6802, 47, 9, 51, 62 4, 5, 8, 70, 8—81, 3, 916, 27, 8, 30—6, 42, 5, 7). Cl. IX. Giurgiu Vasile (E : 2319—2 ; 6847—9, 62, 4, 5, 7, 79, 81). *Liceul 32* cl. VI. Colenti Dan (E : 2282, 8, 91, 2, 4—6, 300, 2). Cl. VII. Popovici Liviu (E : 2280—3, 90, 1, 3—6, 8—302, 7, 8, 11, 3, 9). Cl. X. Athanasiu Irina 6750—3, 5—7, 9, 63, 4, 96, 7, 9, 802, 3, 15, 35, 42, 3, 8—50, 2, 4, 9, 62, 5, 8—70, 8—81 3, 4, 8). *Liceul 33* cl. X. Mitrescu Vasile (6752, 6, 9, 61, 88, 90, 5, 6, 829, 31, 42, 3, 7—9 52, 4, 9, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 927, 8, 20, 1). *Liceul 34* cl. X. Micu Eva (6751, 2 5—7, 61 3—4, 76, 99, 802, 3, 79, 81). Cl. XI. Neacşu Gheorghe (6751, 2, 5—61, 3, 4, 82, 827). *Liceul 36* cl. VI. Logofătu N. Anca (E : 2282, 3, 6, 91—6, 9). *Liceul 39* cl. VII Guidea Cristian (E : 2221—3, 8, 92—4,6 8, 92—4, 6, 8, 9, 301, 2), Orzănescu Maria (E : 2282, 3, 91, 4, 6, 9, 300, 7), Pantelimon Florinela (E : 2293—6, 9—302, 5—8, 12, 4, 9, 21, 2, 5). Cl. IX. Gavriliuc Mihai (E : 2289, 90, 305, 21, 2 ; 6791, 847—9, 62, 79, 81), Ioniţă Georgeta (E : 2265, 6, 8—78, 81—3, 5—7 ; 6710, 1, 4—6, 20—6, 8, 33, 5, 7, 50—3, 5—7, 60, 1, 3 —5, 80). Vasilescu Sergiu (6751, 2, 5—7,9, 61, 3, 73, 84, 90, 6, 7, 802, 31, 5, 43. 4).

BUZĂU. *Ş. g. 13* cl. VII. Wester Gerda (E : 2282, 3, 6, 8, 91—7, 301, 2, 7, 8, 11, 2, 4, 5). *Liceul 1* cl. VII. Croitoru Viorica (E : 2282, 91, 2, 4, 6, 9, 307, 11). Cl. IX. *Gavrilă Şerban* (6750, 3, 56, 60, 4—70, 2, 7, 8, 9, 81—5, 8—90, 80 9, 11—5, 8, 9, 28, 38, 40, 1, 7—52, 62, 4, 5, 916, 20, 1, 31—4, 6—8, 41, 2, 5). Cl. X. Marin Ion (6761, 96, 7, 9, 801, 3, 35, 42, 3, 7, 8, 50, 2, 4, 62, 4, 9 , 79, 81). Marinescu Marian (6751, 2, 7, 60, 5, 9, 80, 9, 92, 5, 801—3, 8, 11, 4, 24, 5, 7, 31, 5, 42, 57, 88, 91, 8, 919). Cl. XI. *Cojanu Marius* (6795—803, 11—5, 8, 21, 4, 9, 31, 5—41, 3, 6—55, 9—71, 3—81, 3, 4, 6, 8), Manea Nicolae (6752—6, 8, 60, 1, 78, 95—9, 801, 2, 12, 7, 24, 35). Negruţ Gheoghe (6751, 5, 7, 62—4, 82, 97, 9, 800, 2, 47—9, 52—9, 62, 4, 7, 79—81). *Popa Marcel* (6670, 1, 3—7, 709, 10, 5, 20, 2, 51, 2, 4, 7, 61, 2, 97—9, 803, 47, 9, 51—3, 9, 62—7, 9, 79—81, 3—5, 7, 8, 96, 927, 9, 30—3, 6, 7, 41, 4, 6,9—52,4). *Liceul 2* cl. VII. Constantin Nicolae (E : 2281—3, 90, 1, 3—6, 9, 301, 2). Cl. X. Ioniţă Sabin (6796, 9, 806, 23, 7, 32, 5, 41, 7—50, 2—1, 62—70, 2, 9—84, 3, 4, 8, 901, 16). Cl. XI. *Gavrilă C. Rodica* (6795, 7—803, 8, 12, 3, 35, 6, 9, 41—3, 7—50, 2—4, 7, 9—62, 4, 5, 7, 9, 75, 9, 81, 4, 8, 98, 914).

BUHUŞI. Liceul 1 cl. XI. Schmidt Gabriel (6751, 4, 6—8, 62—4, 97—800, 2).

CALAFAT. *Liceul 2* cl. IX. Rotaru A. (E :. 2290, 305, 19 ; 6750, 60, 87, 802, 49, 64, 7, 9, 70, 8, 80, 1). Brebu Ion (6750, 64, 82, 3, 8, 95, 7, 802, 3, 15, 62, 4, 6, 9, 79, 81).

CARACAL. *Ş. g. 6* cl. VIII. Alexandru Alexandru (E : 2293—6, 8, 9, 307, 8, 15, 21, 5, 6 ; 6847, 8, 62, 4, 8, 79—91, 927, 32, 4). *Liceul 1* cl. IX. *Vîrtosu Mihail* (E : 2285, 9, 90, 305, 19—22 ; 6757, 8, 60, 4, 8, 97, 9, 802, 11, 2, 47—52, 5, 62, 4, 5, 7—70, 8, 9, 81, 3, 4, 8). *Liceul 2* cl. X. Degeratu Ştefan (6751, 8, 90, 1, 3, 5, 801—3, 19, 24, 48, 62, 81).

CARANSEBEŞ. Absolvent *Bena I. Dorin* (6750—68, 76—8, 80, 2—4, 6—95, 7—800, 2, 5, 8, 9, 11—9, 21, 2, 4, 7—9, 31, 3, 5—9), Man Carol (6750—64, 76, 80, 8, 90, 1, 5—803, 14, 7, 21, 4, 47, 52, 4). *Liceul 1* cl. V. Vonica Alexandru (E : 2281, 3, 6, 91, 3—6, 8, 301, 2). Cl. IX. *Budrugeac P.* (E : 2289, 90, 305, 19, 20 ; 6750, 6—8, 60, 1, 8, 91, 7, 9, 801, 2, 11, 47—51, 62—7, 8, 70, 2, 8, 9, 81, 3, 8), Spaia Elena (E : 2319, 20 ; 6847, 8, 62, 4, 7—9, 81, 927, 31, 46, 9).

ORSZÁGOS MÚZEUMI IGAZGATÓSÁG KÖNYVTÁRA 1963

1966 FEB - 4

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie școala, clasa și localitatea revolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— *Rezolvitorii de probleme din G.M.-B. care în anul 1965 vor întruni peste 150 probleme rezolvate și anunțate la rubrica rezolvitorilor în primele 10 numere apărute, pot trimite redacției, după 1.XI.1965, o fișe arătînd care sînt aceste probleme, pentru a face controlul la întocmirea listei elevilor care vor fi premiați pe anul 1965.*

***Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale** pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.*

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Informația" — c. 3530

INDEX 41601

Lei 2

SZABÓ MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) — noiembrie 1965

11

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

Anul XVI (II), nr. 11 — noiembrie 1965

SUMARUL

	Pag.
1. Formula generalizată a binomului de Iosif Varga Sighet	499
2. Rezolvarea grafică a ecuației $a\sin x+b\cos x=c$, de E. Carman	502
3. Posibilitățile de distribuire a n obiecte la k persoane de T. Zamfirescu, București	506
4. Probleme rezolvate (6748, 6783, 6785, 6789, 6889, 6891, 6892, 6893, 6897, 6900, 6910, 6911, 6912, 6957, 6958, E : 2313, 2320	508
5. Chestiuni de examen (7216—7230)	522
6. Probleme propuse (7231—7262)	524
7. Exerciții și probleme propuse pentru clasele V—VIII (E : 2349—2409)	529
8. Cercul elevilor de clasa a IX-a de la liceul nr. 15 din București de Elena Flondor	532
9. Cărți noi	535
10. Rubrica rezolvitorilor de probleme	536

ANUL XVI, 11 NOIEMBRIE

COMITETUL DE REDACȚIE

Dincă N., profesor ; *Grosu A.*, profesoară ; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit ; *Ionescu-Țiu C.*, profesor, redactor șef adjunct ; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj) ; *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj) ; *Mușat I.*, profesor ; *Ottescu C.*, profesor ; *Plăvițu M.*, profesor ; *Sacter O.*, conf. univ., redactor șef ; *Simionescu Gh.*, conf. univ. ; *Țene L.*, profesoară.

REDACȚIA : Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — București

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondența privitoare la activitatea matematică a școlilor, precum și orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONTJA 1863

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 11 noiembrie 1965

FORMULA GENERALIZATĂ A BINOMULUI

de *IOSIF VARGA*, profesor Sighet

1. În vederea demonstrării formulei generalizate a binomului rezolvăm următoarea problemă.

Cîte permutări se pot face cu n elemente, în cazul cînd între aceste elemente se găsesc și elemente egale?

Pentru a înțelege mai bine problema considerăm ca exemplu toate permutările posibile ale elementelor 1, 1, 1, 2, 3. Deoarece în acest caz avem și elemente care se repetă, este vorba despre *permutări cu repetiție*. Dacă nu se ia în considerare elementul 3, cu elementele rămase 1, 1, 1, 2 se poate alcătui următoarele permutări cu repetiție :

1112, 1121, 1211, 2111,

pentru că elementul 2 poate fi inserat între cele trei cifre 1 în patru moduri posibile. În fiecare permutare astfel obținută elementul 3 omis, poate fi inserat în cinci moduri posibile. Și anume, pentru elementele date 1, 1, 1, 2, 3 se pot obține deci, 4. 5 posibilități de permutare, iar aceste permutări sînt :

11123	11213	12113	21113
11132	11231	12131	21131
11312	11321	12311	21311
13112	13121	13211	23111
31112	31121	31211	32111

Se poate prevedea aceasta și prin următorul raționament care ne va conduce totodată și la rezolvarea generală a problemei propuse. Dacă printr-un procedeu oarecare am putea distinge provizoriu cele trei cifre 1 (de exemplu le-am nota pe fiecare cu altă culoare), atunci cu cele cinci elemente distincte se pot obține 5 ! permutări. Considerăm aceste permutări în care de aici înainte nu mai distingem elemente egale (elementul 1). În aceste permutări de exemplu, să transcriem elementele 1 cu un creion de aceiași culoare. În felul acesta, din permutările distincte de la început (avînd un număr de 5) unele devin identice. Două permutări devin identice atunci și numai atunci cînd în ele elementele 2 și 3 se află pe același loc, astfel încît aceste permutări diferă numai prin ordinea celor trei elemente 1 presupuse inițial distincte. Deoarece cele trei elemente de 1

presupuse diferite la început, pot fi plasate în 3 ! moduri pe trei locuri prescrise este evident că în cazul cînd nu mai distingem elementele egale (elementul 1), din cele 5 ! permutări obținute vor deveni identice cîte 3 ! grupuri de permutări. Astfel avem în fine,

$$\frac{5!}{3!} = 4.5$$

permutări cu repetiție (a elementelor 1, 1, 1, 2, 3). Aceasta este în concordanță cu rezultatul obținut mai sus.

La fel se poate deduce acest rezultat în cazul cînd între cele n elemente date, l elemente sînt identice, dar celelalte elemente sînt diferite și între ele și de acestea. În acest caz elementele date au

$$\frac{n!}{l!}$$

permutări cu repetiție. Dacă în continuare, dintre cele $n-l$ elemente distincte se identifică m elemente (adică în locul fiecărui element se scrie același element care diferă însă, de celelalte elemente permutate), atunci din aceleași motive vom avea din nou mai puține permutări distincte și anume, de m ! ori mai puține. În acest fel numărul permutărilor cu repetiție a n elemente dintre care l elemente sînt egale, iar între celelalte $m-l$ elemente rămase mai sînt încă și m elemente egale, va fi

$$\frac{n!}{l!\,m!}$$

Repetînd acest raționament succesiv, obținem următorul rezultat general :

Dacă între n elemente date figurează k feluri de elemente distincte astfel încît numărul elementelor egale între ele este $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$ atunci numărul permutărilor cu repetiție a acestor n elemente va fi :

$$\frac{n!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!}$$

unde $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_k = n$

Exemplu. Literele cuvîntului Matematica, au :

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 10.9.8.7.6.5 = 151\,200$$

permutări.

Observație. Deoarece numărul permutărilor este număr natural, din rezultatul precedent se poate deduce următoarea proprietate : Dacă suma numerelor naturale $l_1, l_2, \ldots, l_k$ este n atunci n ! se divide cu produsul $l_1!\,l_2!\ldots l_k!$

II. Formula binomului poate fi generalizată într-o formă cu ajutorul căreia se poate calcula orice putere a unui polinom.

Pentru demonstrație se consideră egalitatea :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(a_1 + a_2 + \ldots \\ \ldots + a_k)\ldots(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \qquad (1)$$

Efectuînd înmulţirea din partea dreaptă a egalităţii (1) vom obţine un polinom în care fiecare termen va avea forma $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k} = A$, unde fiecare factor a_j este luat dintr-un singur factor de forma $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ din partea dreaptă a egalităţii (1). Între exponenţii nenegativi are loc relaţia $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$, care ne asigură că avem un produs de n factori.

Să examinăm acum, cîţi termeni de forma A vor apare în dezvoltarea lui (1) pentru un astfel de sistem de exponenţi $(l_1, l_2, \ldots l_k)$.

Este evident că un termen din dezvoltarea lui (1) va avea forma A dacă şi numai dacă la calcularea lui vom scoate a_1 din l_1 factori (este vorba de factorii $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ din partea dreaptă a lui (1), termenul a_2 din l_2 factori, $a_2, \ldots$, şi a_k din l_k factori.

Pentru a cuprinde cu privirea acele posibilităţi de alegere care conduc în dezvoltarea lui (1) la un termen de forma A vom proceda în felul următor : vom scrie deasupra acelor factori $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ dintre cei n factori din partea dreaptă a lui (1) din care am scos termenul a_1 numărul 1, vom scrie deasupra acelor factori din care am scos termenul a_2 numărul 2... ; în sfîrşit, vom scrie deasupra acelor factori din care am scos termenul a_k numărul k. După cele spuse, fiecare sistem de marcare ne conduce la cîte un termen de forma A, iar pe de altă parte, numerele de marcaj formează cîte o permutare cu repetiţie a n elemente (în care figurează l_1 de 1 ; l_2 de 2 ; ... ; l_k de k).

Avînd în vedere că numărul tuturor acestor permutări cu repetiţie este dat de

$$(2) \qquad \frac{n!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!}, \quad \text{unde } l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n ; \; 0! = 1$$

putem spune că în dezvoltarea lui (1) coeficientul $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k}$ al termenului A va fi dat tocmai de (2). În felul acesta am demonstrat teorema polinomială (formula generalizată a binomului) pe baza căreia dezvoltarea lui $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$ va fi suma tuturor termenilor posibili de forma :

$$\frac{n!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!} A$$

în care vom cuprinde toate sistemele de exponenţi $l_1, l_2, \ldots, l_k$ petru care avem $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$ (numerele $l < 0$ fiind întregi, nenegative).

Exemplu. La calcularea lui $(a_1 + a_2 + a_3)^4$ sistemele de exponenţi l_1, l_2, l_3 se vor scrie în tabelul următor care în ultima linie a sa cuprinde şi coeficienţii de forma (2) :

l_1	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
l_2	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
l_3	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2
$\frac{l_1!\, l_2!\, l_3!}{4!}$	1	1	1	4	4	4	4	4	4	6	6	6	12	12	12

Avem deci :

$$(a_1 + a_2 + a_2)^4 = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + 4\,(a_1^3a_2 + a_1^3a_3 + a_1a_2^3 + a_1a_3^3 + a_2^3a_3 + a_2a_3^3) + 6\,(a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2) + 12\,(a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1a_2a_3^2)$$

Şi din acest exemplu se vede avantajul aplicării acestei formule : se poate observa că aplicînd-o se ajunge mai repede la rezultat ca prin înmulţire directă.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

REZOLVAREA GRAFICĂ A ECUAŢIEI $a\sin x + b\cos x = c$

de *E. CARAMAN*, profesor

Problema este interesantă, fiind susceptibilă de mai multe soluţii prin metode diferite. Problema a mai fost tratată în această revistă [1]). Dăm alte trei soluţii, după modul de interpretare a ecuaţiei.

Vom rezolva mai întîi ecuaţia în cazul coeficienţilor pozitivi.

1. Termenii primului membru pot fi consideraţi ca proiecţiile a două segmente perpendiculare $AC = b$, $CB = a$, pe o axă al cărei sens pozitiv face cu AC unghiul x (rădăcina ecuaţiei) ; iar c ca proiecţia segmentului AB (rezultanta conturului ACB), pe aceeaşi axă.

O asemenea axă este evident oricare din coardele $AD = AD' = c$, din cercul circumscris triunghiului dreptunghic ACB (fig. 1, 2). Existenţa acestor coarde atrage condiţia $c \leqslant AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Construim deci triunghiul ACB cu catetele a şi b, cercul circumscris O şi descriem un arc de cerc cu centrul în A, de rază c, care taie cercul O în punctele D şi D'. Unind aceste puncte cu A, obţinem pentru x două valori :

$$\varphi = \sphericalangle\,(AD,\ AC)\quad \varphi' = \sphericalangle\,(AD',\ AC),$$

Afirmaţia se verifică imediat pe fig. 1 şi 2. Fie C' punctul diametral opus lui C, E şi E' proiecţiile vîrfului C pe AD şi AD'.

Oriunde ar cădea D pe arcul BC, sau D' pe arcul BC' (fig. 1) ; ori D pe arcul CA, sau D' pe arcul AC' (fig. 2), ţinînd seama de teorema proiecţiei şi de sensurile segmentelor, avem :

$$\overline{AE} + \overline{ED} = \overline{AD},\ \overline{AE'} + \overline{E'D'} = \overline{AD'}$$

egalităţi echivalente cu relaţiile :

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = c$$
$$a\sin\varphi' + b\cos\varphi' = c',$$

care arată că unghiurile φ şi φ' sînt rădăcinile ecuaţiei.

---

[1]) Anul VI — nov. 1955 — pag. 491—496, articolul semnat de *E. Morţun*. Idem, G.M.-B, 1965 — pag. 113 nota semnată de *Corneliu Popescu*.

Rezultă soluţiile generale :

$$x = 2k\pi + \varphi,\ x' = 2k\pi + \varphi'$$

2. Aceeaşi construcţie se poate justifica folosind formula de adunare a sinusului.

Împărţind ecuaţia cu $c' = \sqrt{a^2 + b^2}$, ia forma

$$\frac{a}{c'} \sin x + \frac{b}{c'} \cos x = \frac{c}{c'}$$

şi cum se poate totdeauna determina un unghi α astfel încît să avem $\cos\alpha = \frac{a}{c'}$ şi $\sin\alpha = \frac{b}{c'}$, ecuaţia devine

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{c'}$$

Dacă $c > c'$, nu avem soluţii. Dacă însă $c \leqslant c'$, putem afla un unghi β aşa ca $\sin\beta = \frac{c}{c'}$ şi obţinem relaţia

$$\sin(x + \alpha) = \sin\beta$$

De aci

$$x' + \alpha = \beta \text{ sau } x'' + \alpha = \pi - \beta$$

şi deci

$$x' = \beta - \alpha \text{ sau } x'' = \pi - (\beta + \alpha)$$

Construcţia unghiurilor α, β, x' şi x'' este imediată, ţinînd seama de relaţiile care definesc aceste unghiuri. Este aceeaşi construcţie ca în soluţia

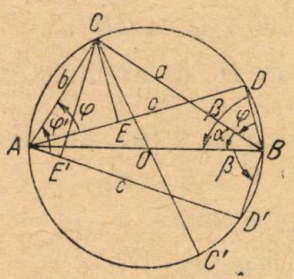


Fig. 1

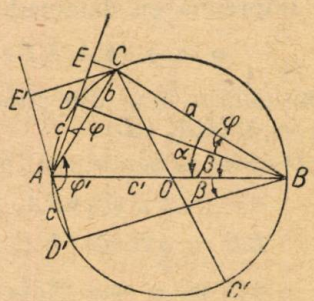


Fig. 2

precedentă. Pe fig. 1 şi 2 se observă că, ori unde ar cădea D pe semicercul ACB şi D' pe semicercul opus, avem

$$\frac{a}{c'} = \cos(BC, BA);\quad \frac{b}{c'} = \sin(BC, BA);\quad \frac{c}{c'} = \sin(BD, BA)$$

Rezultă că

$$\sphericalangle(BC, BA) = \alpha,\ \sphericalangle(BD, BA) = \beta,$$

iar

$$x' = \beta - \alpha = \sphericalangle(BD, BC) = \sphericalangle(AD, AC) = \varphi$$
$$x'' = \pi - (\beta + \alpha) = \pi - \sphericalangle(BC, BD') = \sphericalangle(AD', AC) = \varphi'$$

sînt rădăcini ale ecuației.

3. A treia soluție se bazează pe teorema lui Ptolemeu.

Înmulțind ecuația cu $c' = \sqrt{a^2 + b^2}$ și notînd

$$a' = |c' \sin x|,\ b' = |c' \cos x|,\ \text{deci}\ c' = \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

se obține o relație de forma

$$\varepsilon aa' + \varepsilon' bb' = cc' \quad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1)$$

corespunzătoare rădăcinii x.

Cazul $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ trebuie exclus, căci $cc' < 0$ și rămîn trei ipoteze de examinat:

$$1^\circ\ aa' + bb' = cc' \quad (\varepsilon = \varepsilon' = 1)$$
$$2^\circ\ aa' - bb' = cc' \quad (\varepsilon = 1,\ \varepsilon' = -1)$$
$$3^\circ\ -aa' + bb' = cc' \quad (\varepsilon = -1,\ \varepsilon' = 1)$$

Aceste relații arată că numerele a, a', b, b' și c, c' pot măsura laturile și diagonalele unui patrulater convex bidreptunghic, înscris în cercul de diametru c', cu condiția $c \leqslant c'$.

Cu ajutorul numerelor pozitive date a, b, c se pot construi două asemenea patrulatere. Construim triunghiul dreptunghic ACB cu catetele $BC = a$, $AC = b$ și cercul circumscris O.

Apoi, din C ca centru, cu raza $c \leqslant c'$, descriem un arc care taie cercul în D și D'. Unind aceste puncte cu A, C și B, se formează două patrulatere împreună cu diagonalele lor. Avem

$$\varphi = \sphericalangle(CA, CD) \text{ și } \varphi' = \sphericalangle(CA, CD').$$

Să considerăm unul din punctele D, D', de exemplu D și unghiul respectiv $\varphi = \sphericalangle(CA, CD)$.

Dacă D cade pe semicercul opus vîrfului C (fig. 3), avem

$$AD = AB \sin(BA, BD) = c' \sin\varphi = a',$$
$$BD = AB \cos(BA, BD) = c' \cos\varphi = b'$$

și relația 1° arată că φ este rădăcină a ecuației.

Dacă D este situat pe arcul BC (fig. 4)

$$AD = AB \sin(BD, BA) = c' \sin\varphi = a',$$
$$BD = AB \cos(BD, BA) = -c' \cos\varphi = -b'$$

și relația 2° confirmă că φ e rădăcină.

În sfîrșit, cînd D e situat pe arcul CA (fig. 5)

$$AD = AB \sin(BD, BA) = -c' \sin\varphi = -a',$$
$$BD = AB \cos(BD, BA) = c' \cos\varphi = b'$$

deci, conform relației 3°, φ e rădăcină a ecuației.

Demonstrația se face la fel pentru unghiul $\varphi' = \sphericalangle(CA, CD')$.

3. Să considerăm acum ecuația generală

$$a \sin x + b \cos x = c$$

cu orice fel de coeficienți reali. Putem presupune $c > 0$ (cînd $c < 0$, înmulțim ecuația cu -1).

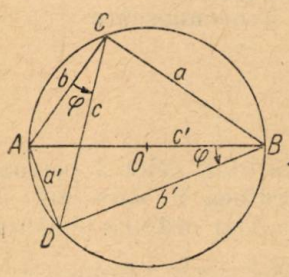


Fig. 3

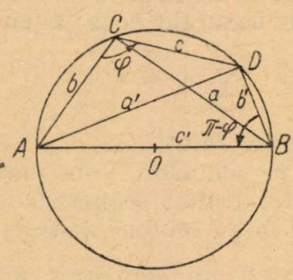


Fig. 4

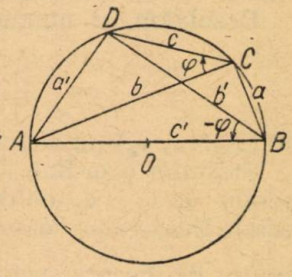


Fig. 5

Notînd cu $|a|$ și $|b|$ valorile absolute ale numerelor a și b, ecuația poate fi adusă la forma examinată (cu coeficienți pozitivi), astfel:

1. Cînd $a > 0$ și $b < 0$, ecuația se poate scrie

$$|a| \sin(\pi - x) + |b| \cos(\pi - x) = c$$

și are rădăcinile de la punctele 1 și 2:

$$\pi - x' = \sphericalangle(CA, CD) = \varphi, \quad \pi - x'' = \sphericalangle(CA, CD') = \varphi',$$

iar soluțiile generale sînt

$$x = (2k + 1)\pi - \varphi \text{ și } x = (2k + 1)\pi - \varphi'.$$

2. Cînd $a < 0$ și $b > 0$, ecuația se poate scrie

$$|a| \sin(2\pi - x) + |b| \cos(2\pi - x) = c$$

și are rădăcinile

$$2\pi - x' = \sphericalangle(CA, CD) = \varphi, \quad 2\pi - x'' = \sphericalangle(CA, CD') = \varphi'$$

iar soluțiile generale sînt

$$x = 2k\pi - \varphi \text{ și } x = 2k\pi - \varphi'.$$

3. Cînd $a < 0$ și $b < 0$, ecuația poate fi scrisă

$$|a| \sin(\pi + x) + |b| \cos(\pi + x) = c$$

și are rădăcinile

$$\pi + x' = \sphericalangle(CA, CD) = \varphi, \quad \pi + x'' = \sphericalangle(CA, CD') = \varphi'$$

iar soluțiile generale sînt

$$x = (2k - 1)\pi + \varphi \text{ și } x = (2k - 1)\pi + \varphi'.$$

Discuția cazurilor limită nu prezintă dificultate.

POSIBILITĂȚILE DE DISTRIBUIRE A n OBIECTE LA k PERSOANE

(În legătură cu problema 4901)

1. Problema care se pune constă în *a determina numărul posibilităților de repartizare a n obiecte identice la k persoane* ($n>k$), *astfel încît fiecare persoană să primească cel puțin un obiect.* (A se vedea enunțul problemei 4901 din G.M.F. nr. 9/1961 de *S. Strătilă*).

Rezolvăm în numere naturale ecuația cu k necunoscute

$$\sum_{p=1}^{k} x_p = n \tag{1}$$

și fie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ un sistem de soluții.

Stabilim o ordine a persoanelor. Vom putea oferi celor k persoane respectiv $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ obiecte, ținînd seama de ordinea în care am dat obiectele fiecărei persoane, în $n!$ moduri distincte. Dar ordinea obiectelor deținute de fiecare persoană nu contează, astfel încît rămîn $\dfrac{n!}{\prod_{p=1}^{k} \alpha_p!}$ posibilități de distribuire a obiectelor.

Fie β_1 rădăcini egale între ele printre $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, precum și alte β_2 rădăcini egale între ele ș.a.m.d., precum și alte β_l rădăcini egale între ele, deci l grupe de rădăcini care, în fiecare grupă, sînt egale între ele. Inițial am socotit o ordine fixă a persoanelor. Să considerăm acum, totalitatea acestor ordini, dar să păstrăm fixă o anumită distribuție $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de obiecte, ceea ce echivalează cu a menține în continuare, ordinea persoanelor fixă, dar a modifica ordinea între $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Vom putea oferi cele k grupe de obiecte la cele k persoane, ținînd seamă de ordinea în care primesc obiectele persoanele cărora le revine același număr de obiecte, în $k!$ moduri distincte. Dar, ordinea de care am ținut seamă mai sus nu contează, astfel încît există $\dfrac{k!}{\prod_{q=1}^{l} \beta_q!}$ posibilități de ordonare a persoanelor.

În total, modificînd atît ordinea persoanelor, cît și cea a obiectelor, stabilim că există

$$\frac{k!\,n!}{\prod_{p=1}^{k} \alpha_p! \prod_{q=1}^{l} \beta_q!}$$

posibilități de distribuire, corespunzătoare sistemului de soluții $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Repetînd raționamentele de mai sus pentru fiecare sistem de soluții ale ecuației (1) (nu socotim distincte două sisteme de soluții care se pot obține unul din altul prin schimbarea ordinei soluțiilor α_p $(p=1, \ldots, k)$), conchidem că obiectele pot fi repartizate în

$$\sum \frac{k!\,n!}{\prod_{p=1}^{k} \alpha_p! \prod_{q=1}^{l} \beta_q!} \tag{2}$$

moduri distincte, conform cu notaţiile noastre. Suma se face după sistemele $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, deci şi după $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ şi l, care sînt legate de sistemele de soluţii.

Rezultatul mai poate fi scris şi sub o altă formă. Renotînd rădăcinile multiple cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, printre care se numără şi cele de ordinul întîi şi cu β_i numărul de rădăcini α_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, putem scrie :

$$\beta_1 \alpha_1 + \ldots + \beta_m \alpha_m^* = n,$$

unde evident, $\beta_1 + \ldots + \beta_m = k$. Întrucît suma din relaţia (2) se referă doar la numitor, soluţia problemei se scrie sub forma finală :

$$k!\, n! \sum \left(\prod_{p=1}^{m} \alpha_p !^{\beta_p} \prod_{q=1}^{m} \beta_q ! \right)^{-1} \tag{3}$$

Raţionamentele de pînă acum sînt perfect valabile pentru $n \leqslant k$. În cazul $n = k$, ecuaţia (1) are rădăcina multiplă $\alpha_1 = 1$, de ordin $\beta_1 = n$, iar numărul grupelor de rădăcini multiple este $m = 1$. Formula (3) ne dă numărul de posibilităţi

$$\frac{n!\ n!}{1!^n\ n!} = n!,$$

care este într-adevăr, egal cu numărul permutărilor celor n obiecte.

În cazul particular $n = 5$ şi $k = 3$, ecuaţia (1) admite sistemele de soluţii (1, 1, 3) şi 1, 2, 2). Deci, aplicînd formula (3) obiectele pot fi împărţite persoanelor, în

$$3!5! \left[(1!^2 3! 2!)^{-1} + (1! 2!^2 2!)^{-1} \right] = 150$$

moduri distincte.

2. În legătură cu problema rezolvată mai sus, ne-o punem şi pe aceea de *a determina numărul posibilităţilor de repartizare a n obiecte la k persoane*, fără a impune restricţia $n > k$ şi fără a cere ca fiecare persoană să primească cel puţin un obiect.

Pentru rezolvarea acestei probleme, să rezolvăm în numere întregi nenegative ecuaţia (1) şi să considerăm un sistem de soluţii. Notînd cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ rădăcinile multiple nenule ale sistemului, printre care se numără şi cele de ordinul întîi, cu β_i ordinul de multiplicitate al rădăcinii α_i şi cu β_0 ordinul de multiplicitate al lui 0, dacă acesta face parte din sistemul de soluţii, avem $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = n$ şi $\sum_{j=0}^{m} \beta_j = k$, sau $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = k$, după cum β_0 este sau nu definit. Convenim ca $\beta_0 = 1$ în caz că 0 nu este o soluţie din sistem.

În baza unui raţionament analog celui de la punctul 1, obţinem

$$k!\, n! \sum \left(\prod_{p=1}^{m} \alpha_p !^{\beta_p} \prod_{q=0}^{m} \beta_q ! \right)^{-1}$$

posibilităţi de repartizare.

De exemplu, numărul posibilităţilor de distribuire a două obiecte la trei persoane este :

$$3!\ 2!\ \left[(1!^2 2!)^{-1} + (2!\ 2!)^{-1} \right] = 9,$$

ceea ce poate fi uşor verificat.

Tudor Zamfirescu, student Bucureşti

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6748

Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 12°$ *avem:*

$$-\frac{1}{4} \leqslant \sin(5x - 30°)\cos(5x + 60°) \leqslant 0$$

$$\frac{1}{4} \leqslant \sin\left(\frac{5x}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - 60°\right) \leqslant \frac{3}{4}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluția I dată de *Niculescu Constantin*, elev Tîrgoviște.

$$E_1 = \sin(5x - 30°)\cos(5x + 60°),$$

$$E_2 = \sin\left(\frac{5x}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - 60°\right).$$

Se poate observa imediat că avem:

$$E_1 = -\sin^2(5x - 30°); \quad E_2 = \cos^2\left(\frac{5x}{2} - 60°\right).$$

de unde tragem concluzia că dacă $0 \leqslant x \leqslant 12°$ există dublele inegalității:

$$-\frac{1}{4} \leqslant E_1 \leqslant 0; \quad \frac{1}{4} \leqslant E_2 \leqslant \frac{3}{4},$$

deoarece

$$-30° \leqslant 5x - 30° \leqslant 30°; \quad -60° \leqslant \left(\frac{5x}{2} - 60°\right) \leqslant -30°.$$

Soluția a II-a dată de *Ralescu Dan*, *Voiculescu Dan*, București și *Lașiță Ileana*, Sibiu. — Transformînd produsele în sume,

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}[\sin(10x + 30°) - \sin 90°] \leqslant 0$$

$$\frac{1}{2}\sin(10x + 30°) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{sau} \quad \sin(10x + 30°) \leqslant 1, \text{ evident.}$$

$$\frac{1}{2}\sin(10x + 30°) - \frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{4} \quad \text{sau} \quad \sin(10x + 30°) \geqslant \frac{1}{2},$$

ceea ce este adevărat, deoarece $0 \leqslant x \leqslant 12°$ și $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

A doua inegalitate se scrie :

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5x}{2}+30^\circ+\frac{5x}{2}-60^\circ\right)+\sin\left(\frac{5x}{2}+30^\circ-\frac{5x}{2}+60^\circ\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(5x-30^\circ)+1\right]\leqslant\frac{3}{4} \quad \text{sau :} \quad \sin(5x-30^\circ)\leqslant\frac{1}{2} \text{ și}$$

$\frac{1}{2}[\sin(5x-30^\circ)+1]\geqslant\frac{1}{4}$ sau $\sin(5x-30^\circ)\geqslant-\frac{1}{2}$ ceea ce este evident.

Problema 6783

Să se găsească toate numerele de două cifre astfel încît formînd cuburile lor și ștergînd toate cifrele cu excepția ultimelor două să obținem numărul inițial.

Olimpiada de matematică, R.D.G., 1964

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu. — Se observă că numai numerele terminate în 1, 4, 5, 6, 9 dau cuburile terminate în aceleași cifre. Fie numărul de două cifre

$$10a+b,$$

Cînd $b=1$,

$$(10a+b)^3=1000a^3+300a^2+30a+1.$$

Trebuie ca $3a$ să fie un număr ce se termină în a. Avem

$$3.5=15, \text{ deci } a=5.$$

Cînd $b=4$,

$$(10a+b)^3=1000a^3+4.300a^2+16.30a+64.$$

Trebuie ca $16\cdot3a+6$ să fie un număr terminat în a; trebuie ca

$48a+6=10n+a$; de unde : $47a+6=10n$; deci : $a=2$.

Cînd $b=5$,

$$(10a+5)^3=1000a^3+5.300a^2+25\cdot30a+125;$$

$$25\cdot3a+2=10n+a; \text{ deci : } 74a+2=10n,$$

de unde :

$$a=7 \text{ și } a=2.$$

cînd $b=6$

$$(10a+6)^3=10000a^3+6\cdot300a^2+36\cdot30a+216$$

$$36\cdot3a+1=10n, \text{ pentru } a=7.$$

Cînd $b=9$

$$(10a+9)^3=1000a^3+9\cdot300^2+81\cdot30a+729;$$

$$81\cdot3a+2=10n+a, \text{ deci : } 242a^2+2=10n.$$

Rezultă : $a=4$, $a=9$. Numerele căutate sînt : 24, 25, 49, 51, 75, 76, 99.

Problema 6785

Să se determine polinomul $P(x) = a_0 x^v + a_1 x^{v-1} + a_2 x^{v+2} + \ldots + a_{v-1} x + a_v$ *astfel încît* $P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = n^{v+1}$, *pentru orice n natural. (Generalizarea problemei 6362).*

Dăncilă Ioan, elev Sibiu

Soluție dată de *Bădescu Alexandru*, cl X Sm 2 Ploiești
Notăm cu $S_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Trebuie să avem:

$$a_0 S_v + a_1 S_{v-1} + \ldots + a_{v-1} S_1 + n a_v = n^{v+1}.$$

Adunînd relațiile:

$$(1-1)^{v+1} = 1^{v+1} - C_{v+1}^1 \cdot 1^v + \ldots + (-1)^k C_{v+1}^k + \ldots + (-1)^{v+1} C_{v+1}^{v+1}$$

$$(2-1)^{v+1} = 2^{v+1} - C_{v+1}^1 \cdot 2^v + \ldots + (-1)^k C_{v+1}^k \cdot 2^{v-k+1} + \ldots + (-1)^{v+1} C_{v+1}^{v+1}$$

$$(3-1)^{v+1} = 3^{v+1} - C_{v+1}^1 3^v + \ldots + (-1)^k C_{v+1}^k \cdot 3^{v-k+1} + \ldots + (-1)^{v+1} C_{v+1}^{v+1}$$

. . . . . .

$$(n-1)^{v+1} = n^{v+1} - C_{v+1}^1 \cdot n^v + \ldots + (-1)^k C_{v+1}^k \cdot n^{v-k+1} + \ldots + (-1)^{v+1} C_{v+1}^{v+1}$$

Obținem prin simplificarea termenilor asemenea:

$$n^{v+1} - C_{v+1}^1 S_v + C_{v+1}^2 S_{v-1} + \ldots + (-1)^k C_{v+1}^k S_{v-k+1} + \ldots + n(-1)^{v+1} = 0$$

de unde:

$$n^{v+1} = C_{v+1}^1 S_v - C_{v+1}^2 S_{v-1} + \ldots + (-1)^{k+1} C_{v+1} S_{v-k+1} + \ldots + n(-1)^{v+2}$$

Avem deci:

$$(a_0 - C_{v+1}^1) S_v + (a_1 + C_{v+1}^2) S_{v-1} + \ldots + [a_{k-1} - (-1)^{k+1} C_{v+1}^k) S_{vk+1}] + \ldots +$$
$$+ [(a_{v-1}) - (-1)^{v+1} C_{v+1}^v] + [a_v - n(-1)^{v+2}] = 0$$

Folosind metoda coeficienților nedeterminați stabilim că

$$a_0 = C_{v+1}; \; a_1 = -C_{v+1} \ldots a_{k-1} = (-1)^{k+1} C_{v+1} \ldots a_{v-1} =$$
$$= (-1)^{v+1} C_{v+1}; \quad a_v = n(-1)^{v+2}$$

Problema 6789

Într-un patrulater oarecare ABCD se consideră segmentele $AM = MP = PB$ *și* $DR = RS = SC$. *Punctele M, P sînt pe segmentul AB, iar R, S sînt pe DC. Să se arate că aria patrulaterului ABCD este de trei ori aria patrulaterului MPRS.*

Matematica v școle, Moscova 1965

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, s.m. 3 Sibiu. — Avem:

$$\text{aria } (ADR) = \frac{1}{3} \text{ aria } (ADC); \; \text{aria } (PBC) = \frac{1}{3} \text{ aria } (ABC);$$

$$\text{aria } (ARM) = \text{aria } (RMP) \; ; \; \text{aria } (RPS) = \text{aria } (SPC).$$

În egalitatea :

$$\text{aria } (ADR) + \text{aria } (PCB) + \text{aria } (ARM) + \text{aria } (SPC) + \\ + \text{aria } (MRSP) = \text{aria } (ABCD)$$

înlocuim

$\text{aria } (ADR) + \text{aria } (PCB) = \frac{1}{3} \text{aria } (ABCD)$; $\text{aria } (ARM) + \text{aria } (SPC) = \\ = \text{aria } (MRSP)$ de unde rezultă imediat :

$$\text{aria } (MRSP) = \frac{1}{3} \text{aria } (ABCD)$$

Problema 6889

Fie AA_1 bisectoarea din vîrful A al triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiului AA_1B și AA_1C intersectează pe AB și AC din nou în M și N. Să se arate că BM este egal cu CN.

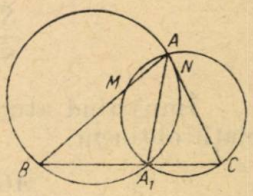
* * *

Soluție dată de *Acu Dumitru*, student Cluj. — Puterea punctelor B și C față de cercurile AA_1C respectiv ABA_1 dă :

$$BM \cdot BA = BA_1 \cdot BC \quad \text{și} \quad CN \cdot CA = CA_1 \cdot CB.$$

Împărțind membru cu membru obținem :

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BM \cdot BA}{CN \cdot CA},$$



Dar,

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$$

și înlocuind rezultă :

$$BM = CN.$$

Problema 6891

Fie O un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, situat între B și C, iar A', B', C' trei puncte arbitrare respectiv pe dreptele OA, OB, OC. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca punctele A', B', C' să fie coliniare este ca

$$\frac{BC}{OA'} = \frac{CA}{OB'} + \frac{AB}{OC'}$$

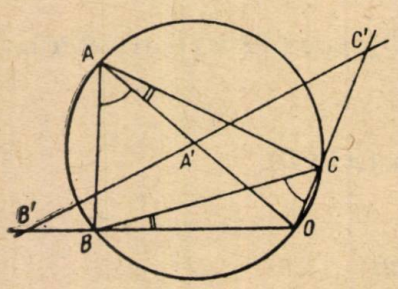
Generalizare în cazul cînd punctul O nu este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Ion I. Cristea

Soluție dată de *Bucur Liliana*, elevă S m 3 Sibiu.

Condiția este necesară. Să presupunem că punctele A', B', C' sînt colineare. Atunci avem

$$S_{B'OC'} = S_{C'OA'} + S_{A'OB'} \tag{1}$$



Ori,

$$\frac{S_{B'OC'}}{S_{BOC}} = \frac{B'O \cdot C'O}{BO \cdot CO}, \quad \frac{S_{C'OA'}}{S_{COA}} = \frac{C'O \cdot A'O}{CO \cdot AO}$$

$$\frac{S_{A'OB'}}{S_{AOB}} = \frac{A'O \cdot B'O}{AO \cdot BO},$$

astfel relația (1) devine

$$\frac{B'O \cdot C'O}{BO \cdot CO} S_{BOC} = \frac{C'O \cdot A'O}{CO \cdot AO} S_{COA} + \frac{A'O \cdot B'O}{AO \cdot BO} S_{AOB},$$

sau ceea ce este același lucru,

$$\frac{AO}{A'O} S_{BOC} = \frac{BO}{B'O} S_{COA} + \frac{CO}{C'O} S_{AOB}. \tag{2}$$

Însă patrulaterul $ABOC$ fiind inscriptibil avem $\sphericalangle CAO = \sphericalangle CBO$ și $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BCO$, încît

$$\frac{S_{COA}}{S_{BOC}} = \frac{CA \cdot AO}{CB \cdot BO}, \quad \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{BA \cdot AO}{BC \cdot CO}.$$

Împărțind atunci relația (2) la S_{BOC} și ținînd cont de aceste ultime relații obținem

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} \cdot \frac{CA \cdot AO}{CB \cdot BA} + \frac{CO}{C'O} \cdot \frac{BA \cdot AO}{BC \cdot CO},$$

de unde relația din enunț

$$\frac{BC}{A'O} = \frac{CA}{B'O} + \frac{AB}{C'O}. \tag{3}$$

Condiția este suficientă. Reciproc, să presupunem că punctele A', B', C' sînt astfel alese pe OA, OB, OC încît să fie îndeplinită relația din enunț. Fie $A'' \equiv (AO, B'C')$. Cum punctele A'', B', C' sînt colineare și cum am demonstrat necesitatea condiției din enunț, putem scrie :

$$\frac{BC}{A''O} = \frac{CA}{B'O} + \frac{AB}{C'O} \tag{4}$$

încît comparînd (3) cu (4) rezultă $A'O = A''O$ și deci $A'' \equiv A'$. Așa dar, punctele A', B', C' sînt colineare.

Generalizare. Fie R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC , COA, AOB. Avem

$$S_{BCO} = \frac{BO \cdot CO \cdot BC}{4R_a}, \quad S_{COA} = \frac{CO \cdot AO \cdot CA}{4R_b}, \quad S_{AOB} = \frac{AO \cdot BO \cdot AB}{4R_c}$$

expresii care înlocuite în relaţia (2) şi simplificînd apoi cu $AO \cdot BO \cdot CO$ conduc la

$$\frac{BC}{A'O \cdot R_a} = \frac{CA}{B'O \cdot R_b} + \frac{AB}{C'O \cdot R_s} \tag{5}$$

Reciproca se demonstrează analog ca mai înainte.

Observaţii. 1. Relaţia (5) este adevărată atît timp cît punctul A' este situat între B' şi C'. Dacă am folosi vectorii, relaţia (5) ar deveni :

$$\frac{\overline{BC}}{A'O \cdot R_a} + \frac{\overline{CA}}{B'O \cdot R_b} + \frac{\overline{AB}}{C'O \cdot R_c} = 0$$

luînd astfel o formă simetrică.

2. Dacă triunghiul ABC este echilateral relaţia (5) devine

$$\frac{1}{A'O \cdot R_a} = \frac{1}{B'O \cdot R_b} + \frac{1}{C'O \cdot R_c}.$$

Problema 6892

Să se afle restul împărţirii $(a^b + b^a)$ prin produsul $a \cdot b$, unde a şi b sînt două numere naturale consecutive, $a < b$.

Semescu Emilian, Baia de Aramă

Soluţie dată de Kivu Ileana, elevă Bucureşti. Fie $a < b$, numerele consecutive, naturale, oarecare.

Atunci $a = b - 1$ şi $b = a + 1$

Relaţia $a^b + b^a$ se transformă după cum urmează :

$$a^b + b^a = a \cdot a^{b-1} + b \cdot b^{a-1} = a \cdot a^a + b \cdot b^{a-1} = a(b-1)^a + b(a+1)^{a-1} =$$
$$= a[\mathfrak{M}b + (-1)^a] + b[\mathfrak{M}a + 1^{a-1}] = a \cdot \mathfrak{M}b + (-1)^a a + b \cdot \mathfrak{M}a + b \cdot 1^{a-1} =$$
$$= \mathfrak{M}(ab) + b + (-1)^a a.$$

Prin urmare restul este $b + (-1)^a$ adică : $a + b$ cînd $a = \mathfrak{M}2$ şi $b - a = 1$ cînd $a = \mathfrak{M}2 + 1$.

Problema 6893

Dacă $n \geqslant 4$ atunci are loc inegalitatea :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Dan Voiculescu, elev, Bucureşti

Soluție dată de Stănescu Dan, elev Sm 1 Ploiești. Pentru orice $k \geqslant 1$ și $n \geqslant 4$ avem :

$$\frac{1}{kn} - \frac{1}{kn+1} = \frac{1}{kn+1} \cdot \frac{1}{kn}$$

$$\frac{1}{kn+1} - \frac{1}{(k+1)n-1} = \frac{1}{kn+1} \cdot \frac{n-2}{(k+1)n-1}$$

$$\frac{n-2}{(k+1)n-1} = \frac{1}{k+1+\dfrac{2k+1}{n-2}} \geqslant \frac{1}{k+1+\dfrac{2k+1}{2}} > \frac{1}{4k} \geqslant \frac{1}{kn}$$

$$\frac{1}{kn} - \frac{1}{kn+1} < \frac{1}{kn+1} - \frac{1}{(k+1)n-1}$$

sau

$$\frac{2}{kn+1} > \frac{1}{kn} + \frac{1}{(k+1)n-1}$$

Utilizînd această relație avem :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n-2}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)n+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2-2}\right] + \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3n-1}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n^2-1}\right] < \left[\frac{n-2}{n+1} + \frac{n-2}{2n-1} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{n-2}{(n-1)\,n+1}\right] + \frac{1}{n^2} + \left[\frac{2}{n+1} + \frac{2}{2n+1} + \cdots + \frac{2}{(n-1)n+1}\right] =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{n}{2n+1} + \cdots + \frac{n}{(n-1)\,n+1} + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2+\dfrac{1}{n}} +$$

$$+ \frac{1}{3+\dfrac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+\dfrac{1}{n}} = \frac{n^3+n+1}{n^3+n^2} + \frac{1}{2+\dfrac{1}{n}} +$$

$$+ \frac{1}{3+\dfrac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+\dfrac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Problema 6897

Să se arate că :

$$\left[\frac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \cdots + C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \cdots + C_{nk-1}^n}\right]^n = \frac{C_k^1 C_{2k}^2 \cdots C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 C_{2k-1}^2 \cdots C_{nk-1}^n} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^n, \quad (k>1)$$

Generalizarea problemei 3797. * * *

Soluție dată de *Acu Dumitru*, student Cluj. — Avem relația

$$C_{nk}^n = \frac{k}{k-1} C_{nk-1}^n$$

Într-adevăr, avem :

$$\frac{C_{nk}^n}{C_{nk-1}^n} = \frac{(nk)!}{n!\,(nk-n)!}, \quad \frac{n!(nk-n-1)!}{(nk-1)!} = \frac{k}{k-1}.$$

Astfel rezultă :

$$C_k^1 = \frac{k}{k-1} C_{k-1}^1; \; C_{2k}^2 = \frac{k}{k-1} C_{2k-1}^2; \ldots; \; C_{nk}^n = \frac{k}{k-1} C_{nk-1}^n \qquad (1)$$

Adunînd aceste relații avem :

$$C_k^1 + C_{2k}^2 + \cdots + C_{nk}^n = \frac{k}{k-1}(C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \cdots + C_{nk-1}^n)$$

Sau :

$$\left[\frac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \cdots + C_{nk}^n}{C_{k-2}^2 + C_{2k-1}^2 + \cdots + C_{nk-1}^n}\right]^n = \left(\frac{k}{k-1}\right)^n$$

Înmulțind relațiile (1) membru cu membru obținem :

$$C_k^1 C_{2k}^2 \ldots C_{nk}^n = \left(\frac{k}{k-1}\right)^n C_{k-1}^1 C_{2k-1}^2 \ldots C_{nk-1}^n$$

și astfel s-au demonstrat relațiile din enunț.

Pentru $k = 2$ obținem problema 3797.

Problema 6900

Se secționează o piramidă oarecare triunghiulară VABC cu un plan paralel cu fața ABC, care taie muchiile în a, b, c.

Se proiectează a, b, c, pe planul ABC în a' b', c'. Fie $A'(Bc' \cap Cb')$, $B'(Ca' \cap AC')$ *și* $C'(Ab' \cap Ba')$. *Să se arate că perechile de triunghiuri* $(ABC, a'b'c')$, $(ABC, A'B'C')$, $(A'B'C', a'b'c')$ *sînt secțiuni paralele în trei piramide ale căror vîrfuri sînt pe aceiași dreaptă.*

M. I. Focșeneanu

Soluție dată de *Chițescu Ioan*, elev București.

Secțiunea plană abc este paralelă cu baza ABC. Triunghiul $a'b'c'$ fiind proiecția unui triunghi paralel cu ABC, va avea și el laturile paralele

cu omoloagele lui ABC. Triunghiurile ABC, $a'b'c'$ sînt deci omotetice şi vîrfurile omoloage sînt pe proiecţiile muchiilor VA, VB, VC adică Aa', Bb', Cc' care concură în V' proiecţia vîrfului V pe planul ABC.

Rezultă că oriunde ar fi în spaţiu $a'b'c'$ paralel cu ABC, dreptele Aa', Bb', Cc' sînt muchiile unei piramide cu vîrful V_1 pe perpendiculara în V' la planul ABC.

Triunghiul $A'B'C'$ are vîrfurile A' şi B' astfel că

$$\frac{A'b'}{A'C} = \frac{A'c'}{A'B} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'a'}{CA} = \frac{b'a'}{BC}$$

adică latura $A'B'$ este paralelă cu $a'b'$ şi cu AB.

Analog celelalte .laturi ale lui $A'B'C'$ sînt paralele cu laturile lui $a'b'c'$ şi ABC. Atunci dreptele $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ şi dreptele AA', BB', CC' concură în două puncte V_2' şi V_3'.

Fie acum $a_1'b_1'c_1'$, $A_1'B_1'C_1'$ o poziţie determinată în spaţiu a triunghiurilor $a'b'c'$ şi $A'B'C'$ paralele cu ABC. Dreptele AA_1', BB_1' CC_1' sînt muchiile unei pramide cu vîrful într-un punct V_3 pe perpendiculara în V_3' pe planul ABC, iar dreptele $A_1'a_1'$, $B_1'b_1'$, $C_1'c_1'$ sînt muchile unei piramide cu vîrful în V_2 pe perpendiculara în V_2' la planul ABC.

Dar punctele $< V_1'$, V_2' V_3' sînt pe aceeaşi dreaptă în planul ABC şi deci şi vîrfuile V_1, V_2, V_3 sînt pe o dreaptă. .

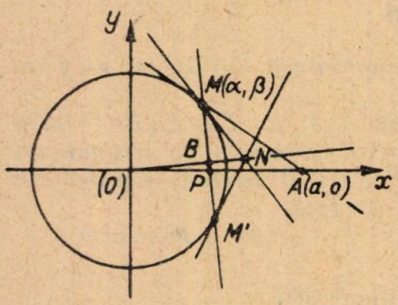
Observaţie. Propoziţia e adevărată şi pentru proiecţii oblice de acelaşi unghi.

Problema 6910

Fie A un punct fix în planul cercului (O) şi M un punct variabil pe acest cerc. Tangenta în M la cerc întîlneşte mediatoarea segmentului AM în N. Din N se duce şi cealaltă tangentă NM' la cerc. Să se găsească locul geometric al mijlocului coardei MM'.

C. N. Tudor, asistent Bucureşti

Soluţie dată de *Niculescu Constantin*, elev Tîrgovişte. Luăm drept axă Ox dreapta OA, iar ca axă Oy, perpendiculara în O pe OA. Ecuaţia cercului este :



$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

deci :

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

unde α, β sînt coordonatele punctului M. Ecuaţia tangentei în M la cerc

$$\alpha x + \beta y - r^2 = 0 \qquad (3)$$

Panta dreptei AM fiind egală cu $\frac{\beta}{\alpha - a}$, ecuaţia mediatoarei segmentului AM este :

$$-2ax + 2(\alpha x + \beta y) - (\alpha^2 + \beta^2) + a^2 = 0 \qquad (4)$$

Intersectînd dreptele de ecuații (3) și (4) și ținînd seamă de (2) găsim că punctul N are abscisa :

$$x = \frac{a^2 + r^2}{2a}, \tag{5}$$

adică, punctul N se mișcă pe o dreaptă perpendiculară pe Ox cînd M descrie cercul. Dreapta MM' este polara punctului N în raport cu cercul . Însă e știut că dacă un punct descrie o dreaptă, polara lui în raport cu cercul trece printr-un punct fix. Rezultă că dreapta MM' trece printr-un punct fix P.

Problema 6911

Să se determine că șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ cu :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$$

este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [1, 2]$. *Generalizare*

Tomescu I. Ion, student București

Soluția autorului.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) -$$

$$- 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n} - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

Să demosnstrăm că șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este monoton crescător, deci : $x_{n+1} > x_n$ sau $x_{n+1} - x_n > 0$ oricare ar fi $n \in N$; ceea ce se scrie :

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \left(\frac{1}{n+1} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3n+1} +$$

$$+ \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3(n+1)} = \frac{9n^2+15n+6+9n^2+12n+3-2(9n^2+9n+2)}{3(n+1)(3n+1)(3n+2)} =$$

$$= \frac{9n+5}{3(n+1)(3n+1)(3n+2)} > 0.$$

Același lucru se putea obține operînd cu expresia inițială a lui x_n. În expresia lui x_n intervin $2n$ termeni. Deoarece :

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+3} > \cdots > \frac{1}{3n}, \text{ rezultă că : } \frac{2n}{3n} < x_n < \frac{2n}{n+1}.$$

Dar $\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} < 2$, deci $\frac{2}{3} < x_n < 2$.

Rezultă că șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este convergent, fiind monoton și mărginit. Pentru a demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 1$ folosim faptul că media aritmetică a n numere pozitive este mai mare ca media lor armonică, adică :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \text{ cu } a_i < 0 ; \ 1 \leqslant i \leqslant n$$

Aplicînd acest lucru pentru x_n (sumă de $2n$ termeni pozitivi) obținem :

$$x_n \geqslant \frac{4n^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+3n} = \frac{4n^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+2n)} =$$

$$\frac{4n^2}{2n\cdot n + \frac{2n+1}{2}\cdot 2n} = \frac{4n^2}{4n^2+n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+n} = 1$ și $\frac{4n^2}{4n^2+n} \leqslant x_n \leqslant 2$. Cum o inegalitate se păstrează prin trecere la limită, rezultă că :

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant 2 \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Cu alte metode se demonstrează că $\lim x_n = \ln 3 > 1$ și mai mic ca 2. ($\ln 3 \approx 1{,}09861$)

Generalizare : Se consideră șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ cu $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots +$

$$+ \frac{1}{k-1} - \frac{k-1}{k} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{k-1}{2k} + \cdots + \frac{1}{nk-1} - \frac{k-1}{nk} = 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{nk} - k\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{nk}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{nk}. \ (k \geqslant 2, \ k \in N).$$

Se demonstrează analog că $x_{n+1} > x_n$ și deoarece $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \cdots >$

$> \frac{1}{nk}$ și suma $x_n = \sum\limits_{i=1}^{(k-1)n} \frac{1}{n+i}$ are $(k-1)\,n$ termeni, $\frac{k-1}{k} = \frac{(k-21)n}{k_n} <$

$< x_n < \frac{(k-1)n}{n+1} < k-1$, deci şirul fiind monoton şi mărginit e convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \left[\frac{k-1}{k}, k-1\right]$.

Pentru $k \geqslant 3$ se poate demonstra analog că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [1, k-1]$ Obs. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln k$. Afirmaţia că $x_n \leqslant y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ rezultă considerînd şirul $\{x_n - y_n\}_{n\in N}$ $\lim\limits_{n\to\infty}$; $(x_n - y_x) \leqslant 0$ din definiţia limitei cu vecinătăţi.

Problema 6912

Se dă un unghi zOz'. Fie Ox bisectoarea unghiului şi A, A_1 două puncte situate respectiv pe laturile Oz, Oz' ale unghiului , astfel încît $OA = OA_1$. Se duce dreapta $y'y$ paralelă cu Ox, astfel încît să întîlnească într-un punct O_1 prelungirea seimidreptei Oz. Din punctul A_1 se duce o perpendiculară pe dreaptă Ox, pe care se ia în sensul de la Ox către $y'y$ un punct A_2 astfel încît A_1A_2 este egal cu dublul distanţei dintre paralelele Ox, yy'.

Să se arate că dreptele OA_2, Oz' sînt paralelele şi că $OA = OA_2$. Vezi articolul Despre unele transformări geometrice, publicat în G.M. nr. 5/1965).

Constantin Ionescu-Bujor

Soluţie. Fie α mărimea unghiului zOz'. Punctul A_1 este transformatul A punctului printr-o rotaţie R de centru O şi unghi α.

Punctul A_2 este transformatul punctului A_1 printr-o translaţie T determinată de vectorul A_1A_2, perpendicular pe Ox şi yy', avînd sensul de la Ox către $y'y$ şi mărimea egală cu dublul distanţei dintre Ox şi $y'y$.

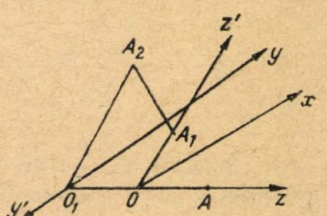
Deci A_2 este transformatul punctului A prin produsul de transformări TR.

Dar considerînd simetriile plane determinate de axele Oz, Ox care fac unghiul $\frac{\alpha}{2}$, avem

$$R = S_x S_z$$

De asemenea, considerînd simetria plană S_y determinată de axa yy' avem

$$T = S_y S_x$$



Rezultă că

$$TR = (S_y S_x)(S_x S_z) = S_y (S_x)^2 S_z = S_y S_z .$$

Simetriile plane S_z, S_y avînd axele concurente în O_1 şi formînd un unghi zO_1y de mărime $\frac{\alpha}{2}$, au produsul $S_y S_z$ echivalent cu o rotaţie R_1 de centru O_1 şi unghi α. Rezultă că

$$TR = R_1$$

Astfel punctul A se transformă în A_2 prin rotaţia R_1. Ca urmare $\sphericalangle A_2 Oz = \alpha$, deci $OA_2 \,||\, Oz'$ şi $OA_2 = OA$.

Problema 6957

Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură a. Se prelungeşte latura BC cu segmentul $CD = b$, iar latura BA cu segmentul $AE = a + b$. Să se arate că $EC = ED$.

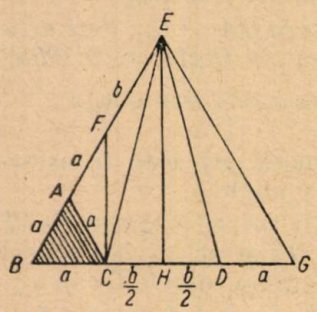
Liviu Pîrsan, Bucureşti

Soluţia I. Prelungim latura BD cu segmentul $DG = a$. Triunghiul EBG este isoscel deoarece $EB = BG = 2a + b$. Însă unghiul $EBG = 60°$ deci triunghiul EBG este echilateral adică $EG = 2a + b$.

Deoarece $\sphericalangle EBG = \sphericalangle 60°$ şi $BC = DG = a$ iar $EB = EG$ rezultă că triunghiul EBC este egal cu triunghiul EDG de unde rezultă că $EC = ED$.

Soluţia II dată de *Răduinea Vasile* elev Constanţa

Fie F un punct pe latura AE astfel încît $AF = a$ şi $FE = b$. Notăm cu H piciorul medianei din E în triunghiul ECD.



În triunghiul BCF, $AC = a$ este mediană şi este egală cu jumătate din latura BF. Rezultă că triunghiul FCB este dreptunghic în C, adică FC este perpendiculară pe BH.

Triunghiul BCF este asemenea cu triunghiul BHE deoarece au unghiul B comun şi

$$\frac{a}{a+\frac{b}{2}} = \frac{BC}{BH} = \frac{BF}{BE} = \frac{2a}{2a+b}.$$

Rezultă că FC este paralelă cu EH. Dar FC este perpendiaulară pe BH, rezultă EH este perpendiculară pe $BH.$, adică EH este înălţime în triunghiul ECF. cum era şi mediană în triunghiul ECD rezultă că $EC = ED$.

Problema 6958

Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} a^{a+k}\, y^b\, z^c &= A \\ x^a\, y^{b+k}\, z^c &= B \\ x^a\, y^b\, z^{c+k} &= C \end{aligned}$$

Ion I. Cristea

Soluţia autorului. Ridicînd ecuţia întîia la puterea a, pe a doua la puterea b şi pe a treia la puterea c şi înmulţind ecuaţiile obţinute rezultă

$$(x^a\, y^b\, z^c)^{a+b+c}\,(x^a\, b^v\, z^c)^{\,k} = A^a\, B^b\, C^c,$$

încît

$$x^a\, y^b\, z^c = (A^a\, B^b\, C^c)^{\frac{1}{a+b+c+k}}$$

Împărțind atunci ecuațiile din enunț la această ultimă ecuație deducem

$$x^k = A(A^a B^b C^c)^{-\frac{1}{a+b+c+k}},\quad y^k = B(A^a B^b C^c)^{-\frac{1}{a+b+c+k}},\quad z^k = C(A^a B^b C^c)^{-\frac{1}{a+b\times c+k}}$$

de unde rezultă

$$x = \left(\frac{A^{b+c+k}}{B^b C^c}\right)^{\frac{1}{k(a+b+c+k)}}\quad ;\ \text{analog } y \text{ și } z.$$

Problema E : 2313

Trei robinete pot umple un bazin astfel : primul împreună cu al doilea în 2 ore 24 minute ; primul împreună cu al treilea în 3 ore, iar al doilea împreună cu al treilea în 4 ore. În cît timp ar putea umple bazinul fiecare din cele 3 robinete în parte ?

Romeo Munteanu, student București

Soluție dată de *Corici Cezar*, elev București.

2 ore 24 minute $= 2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ ore. Debitele celor trei robineteînsumate cîte două vor fi : I + II umplu $\frac{5}{12}$ din bazin pe oră ; I + III umplu $\frac{1}{3}$ din bazin pe oră iar II + III umplu $\frac{1}{4}$ din bazin pe oră.

Dacă facem suma lor obținem debitul celor trei robinete, dublat (fiecare robinet fiind socotit de două ori), deci :

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} = 1.$$

Deci, cele trei robinete curgînd împreună umplu 1/2 din bazin pe oră. Se obține imediat debitul fiecărui robinet :

$$\text{I)}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};\quad \text{II)}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};\quad \text{III)}\ \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}.$$

Timpii necesar sînt rspectiv 4 ; 6 și 12 ore.

Problema E : 2320

Să se arate că dacă are loc relația $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, *atunci are loc și relația :*

$$\frac{1}{a(b-1)(c-1)} + \frac{1}{b(c-1)(a-1)} + \frac{1}{c(a-1)(b-1)} = 0$$

Marica Ștefan, T. Severin

Soluție dată de *Văleanu Vladimir*, elev București.
Relația dată se mai scrie :

$$1-\frac{1}{a}+1-\frac{1}{b}+1-\frac{1}{c}=0 \text{ sau } \frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}=0.$$

Împărțind prin $(a-1)\ (b-1)\ (c-1)$ se obține :

$$\frac{1}{a(b-1)(c-1)}+\frac{1}{b(c-1)(a-1)}+\frac{1}{c(a-1)(b-1)}=0.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date la lucrările scrise la examenul de admitere în Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, septembrie 1965.

Facultățile : mecanice, electrice, transporturi.

7216. — Se dă ecuația $x^2-5x-(a^2-a-6)=0$ în care necunoscuta este x. Se cere :

a) Să se rezolve ecuația.

b) Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației să se calculeze în funcție de a, expresia :

$$E=x_1^5+x_2^5$$

c) Să se determine valorile lui a pentru care $E=275$.

* * *

7217. — Se dau expresiile :

$$E_1=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \text{ și } E_2=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

și se cere :

a) Să se exprime E_2 în funcție numai de $\cos x$.

b) Să se rezolve ecuația $4E_1-2\cos 2x+1=0$.

c) Să se calculeze valoarea raportului E_1/E_2 știind că $\operatorname{tg} x=-4/3$.

* * *

7218. — Se dă funcția $f(x)=x^3-6x^2-2x+a$, unde a este un parametru și se cere :

a) Să se calculeze valoarea expresiei :

$$E=\frac{x_1+x_2}{x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_1+x_3}{x_2}$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $f(x)=0$, fără a rezolva ecuația.

b) Să se rezolve ecuația $f(x)=0$ pentru $a=12$.

c) Să se studieze variația funcției

$$g(x)=\frac{x^3-6x^2-2x+12}{2x^2-15x+18}$$

și să se reprezinte grafic, după ce s-a efectuat simplificarea acestei fracții.

* * *

7219. — Într-un cerc avînd centrul O și raza R se înscrie un triunghi isoscel ABC în care AB este egal cu AC. Prelungirile razelor BO și CO taie cercul în D și R, iar dreapta DE taie laturile AB și AC în M și N. Se cere :

a) Cunoscînd latura $BC = a$ și raza R să se calculeze lungimea laturii AC. b) Să se arate că $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ECA = 1/2 \sphericalangle BAC$; c) Să se arate că dacă $MN = a/3$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

* * *

7220. — Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = 2a$ și unghiul $D = 150°$. Perpendiculara în B pe AB și perpendiculara în D pe AD se intersectează în punctul I. Se cere:

a) Să se arate că BD și CI sînt perpendiculare. b) Să se calculeze aria paralelogramului dat și lungimea segmentului DI. c) Să se arate că unghiurile DAI și IBD sînt egale.

* * *

7221. — Fie o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza dreptunghiul $ABCD$ de laturi $AB = a$, $AD = 2a$ și cu înălțimea (prismei) $AA' = 3a$. Fie M mijlocul lui BB' și N un punct pe muchia DD' (între D și D') așa încît $DN = a$. Se cere:

a) Să se determine punctul P în care planul AMN intersectează muchia CC' (respectiv distanța CP). b) Să se arate că patrulaterul $AMPN$ este un paralelogram. c) Să se calculeze volumul piramidei $A \cdot BMND$.

* * *

7222. — Într-un semicerc cu diametrul $AB = 2r$ se duce o coardă CD paralelă cu AB și egală cu raza. Se cere:

a) Să se calculeze lungimile diagonalelor AD și BC în trapezul $ABCD$. b) Să se calculeze aria triunghiului ADC. c) Să se calculeze volumul corpului obținut rotind trapezul în jurul diametrului AB.

(*La fac. de chimie industrială*).

7223. — Se dă un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = CD = a$, $BC = DA = b$. Se notează cu I punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Paralela dusă prin B la diagonala AC taie prelungirea laturii AD în E, iar EI taie latura AB în F. Se cere:

a) Să se arate că $AE = b$, $AF = a/3$. b) Să se calculeze aria trapezului $AIBE$. c) Să se determine o relație între a și b astfel încît EI și DB să fie perpendiculare.

(*La fac. metalurgie*)

Subiectele date la lucrarea scrisă la facultatea de fizică București, septembrie 1965

7224. — Să se rezolve sistemul:

$$x + y + z = 13$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 61$$
$$xy + xz = 2yz.$$

7225. — Dacă numerele $\sin(B + C - A)$, $\sin(C + A - B)$, $\sin(A + B - C)$ formează o progresie aritmetică, să se arate că și numerele $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ formează de asemenea o progresie aritmetică (A, B, C fiind unghiurile unui triunghi).

7226. — Se consideră ecuația:

$$2(2m + 3)x^2 + (2m^2 + 5m + 5)x + m + 1 = 0.$$

a) Să se găsească rădăcinile ecuației. b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația are soluții dacă $x = \sin y$. c) Care sînt valorile lui y pentru $m = -2$.

7227. — Într-un triunghi isoscel există relația

$$l \cos A + 2m \cos B = t$$

în care A este un unghi de la vîrf și l, m, t numere pozitive, iar $m > 2l$.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului pentru $t = m + l/2$. b) Considerînd pe t variabil, iar m și l fixe, să se determine între ce limite trebuie să varieze t pentru ca problema să admită o soluție reală.

7228. Se dă funcția $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{4x}$ și se cere:

a) Să se studieze și să se reprezinte grafic variația funcției.

b) Se consideră pe curba $y = \frac{3x^2 + 4}{4x}$ un punct $M(p, q)$. Să se calculeze în funcție de p, distanța de la punctul M la dreapta $3x - 4y = 0$. Să se afle apoi limita acestei distanțe cînd $p \to \infty$. Să se explice rezultatul.

c) Să se verifice că produsul distanțelor de la punctul M la dreptele $x = 0$ și $3x - 4y = 0$ este constant, cînd M parcurge curba.

d) Să se scrie ecuația tangentei la curba $y = \frac{3x^2 + 4}{4x}$ în punctul A, de abscisă 2, situat pe curbă. Această tangentă intersectează dreapta $x = 0$ în punctul B și dreapta $3x - 4y = 0$ în punctul C. Să se constate că A este mijlocul segmentului BC.

e) Dacă notăm cu u unghiul pe care dreapta $3x - 4y = 0$ îl face cu direcția pozitivă a axei Ox, să se calculeze $\sin 2u$.

(*Examen de maturitate*, august 1965)

7229. Raportate la același sistem xOy de axe ortogonale se dau curbele: $x^2 + y^2 - 7x + y = 0$ și $y^2 = 4x$. Se cere:

a) Să se figureze aceste curbe.

b) Să se formeze ecuația care dă ordonatele punctelor comune celor două curbe și să se rezolve știind că are o rădăcină dublă. Să se deducă că cele două curbe au comune punctul $A(1,2)$ și punctul $B(4, -4)$ și originea.

c) Să se scrie ecuațiile normalelor în A și B la curba $y^2 = 4x$ și să se afle coordonatele punctului lor de intersecție C.

d) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în C, care trece prin punctul A.

$y^2 = 4x$ și să se arate că această ecuație are o rădăcină triplă.

(*Examen de maturitate*, august 1965)

7230. I) Se dă într-un plan, un pol de inversiune I, un cerc (C) și un punct A. Să se studieze poziția relativă a lui A_1 și (C_1), inversele lui A și (C) într-o inversiune de centru I, după poziția relativă a lui A, (C) și I.

II) Fie în plan, două cercuri fixe (C) și (C') exterioare, (γ) cercurile care ating (C) și (C') cu același fel de contacte, (γ') cercurile care ating (C) și (C') cu contacte de naturi diferite. Fie S punctul în care se ating două cercuri (γ) tangente.

a) Se cere mulțimea de puncte S cînd variază cele două cercuri (γ);

b) Să se arate că prin S trec două cercuri (γ') care se taie și care taie și cercurile tangente în (S) sub un unghi constant cînd S variază;

c) Să se arate că într-o inversiune de pol S, cele două cercuri (C_1) și (C'_1), inversele lui (C) și (C') au raze egale și dau o figură care rămîne asemenea cu ea însăși cînd S variază;

d) Puterea inversiunii fiind pozitivă și aleasă pentru fiecare pol S așa fel încît razele lui (C_1) și (C'_1) să aibă o valoare fixă dată r, se cere să se găsească mulțimile (Ω) și (Ω') de centre ω și ω' ale lui (C_1) și (C'_1) și să se arate că $\omega\omega'$ trece printr-un punct fix K.

e) Să se precizeze pozițiile mulțimii de puncte S, ale lui (Ω), (Ω') și K. Să se calculeze lungimea lui $\omega\omega'$, cunoscînd centrele O și O' și razele R și R' ale lui (C) și (C'), precum și pe r.

(*Bacalaureat matem. și tehn.* Maroc, 1964)

PROBLEME PROPUSE *)

7231. Se dă patrulaterul $ABCD$ și fie $\alpha \equiv (AB, CD)$ și $\beta \equiv (AD, BC)$. Se proiectează α pe AD și BC respectiv în M și N, iar β pe CD și AB, în P și Q. În ce caz patrulaterul $MNPQ$ este trapez?

Ralescu Dan, elev București

---

* IX (7231–7237), X (7238–7246), XI (7247–7253), S (6254–7262).

7232. Să se determine relația dintre coeficienții a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 astfel încît ecuația

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 + 2a_4x_1 + 2a_5x_2 + a_6 = 0$$

să fie satisfăcută de o singură pereche de numere reale x_1, x_2.

E. Popa, elev Iași

7233. Fără extragerea numerică a rădăcinilor patrate, cubice și de ordin cinci, să se arate că

$$\sqrt[5]{3+5\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{3+5\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}} = 1$$

Ion. I. Cristea

7234. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-a_1}{m-a_1} + \frac{x-a_2}{m-a_2} + \ldots + \frac{x-a_{n-1}}{m-a_{n-1}} + \frac{x-a_n}{m-a_n} = \frac{nx}{m},$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale pozitive diferite de zero și mai mici ca m.

Dan Voiculescu, elev București

7235. Să se găsească numărul $\overline{abc}$ format din trei cifre diferite de zero, care să fie medie aritmetică numerelor $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$.

I. Teodorescu, profesor Galați

7236. Să se arate că dacă

$$\frac{a-bp}{ap-b} = \frac{c-dq}{cq-d} = \frac{m}{n},$$

atunci avem:

$$\frac{am+bn}{cm+dn} = \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{q+1}{p+1}.$$

G. G. Niculescu, student București

7237. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$$

în condițiile ca orice soluție să fie un sistem de 6 numere distincte dintre primele 20 numere naturale.

Iuliana Bal, Cluj

7238. Se dau $2n$ obiecte distincte care se grupează arbitrar două cîte două. Să se găsească numărul permutărilor ce se pot face cu aceste obiecte, astfel ca în fiecare permutare, oricare doi termeni egali depărtați de extremi să aparțină cîte unei grupări făcute inițial.

N. Negoescu, profesor Timișoara

7239. Să se rezolve ecuația : $\alpha x^2 + \beta x + \Delta = 0$, în cazul cînd α, β și Δ sînt rădăcinile și discriminantul ei.

Gh. Bazacov, Tr. Severin

7240. Să se arate că teorema celor trei perpendiculare este o consecință a teoremei proiecției ortogonale a unghiului drept în adevărată mărime.

Corneliu N. Popescu, București

7241. Să se demonstreze identitatea :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 = 1$$

Ion Tomescu, student București

7242. Să se găsească toate numerele naturale care satisfac ecuația : $x^2 + 3xy + 2y^2 = z^2$.

F. Kacso, student Cluj

7243. a) Să se arate fără a se efectua calculele, că

$$E = 1961^1 + 1963^3 + 1965^3 + 1967^4 + 1$$

nu poate fi un patrat perfect.

b) Să se arate că $E-81$ divide pe 1964.

Stănescu Dan, elev Ploiești

7244. Să se determine o progresie aritmetică, astfel ca aranjînd termenii săi într-un tablou în care prima linie să conțină primii doi termeni ai progresiei, a doua linie pe următorii cinci, a treia linie următorii 8 termeni și așa mai departe, suma termenilor de pe fiecare linie să fie întreitul cubului unui număr mărit cu dublul aceluiași număr.

(În legătură cu articolul : Asupra unor progresii aritmetice, G.M.-B 6/1964)

Florica H. Ionescu, profesoară București

7245. Să se arate că dacă $a \neq b \neq c \neq 0$, iar n este un număr impar pozitiv, atunci

$$\frac{a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n}{a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)} + 1 = 0$$

(Generalizarea problemei E : 856).

Daniel Pestroiu, elev Tg. Jiu

7246. Să se demonstreze că dacă au loc relațiile : $x + y + z = a + b + c$; $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$ și $x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3$, atunci există și relația :

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 4$.

L. Pîrșan, student București

7247. Să se rezolve ecuațiile :

$$32\cos^6 x - \cos 6x - 1 = 0; \qquad 32\sin^6 x + \cos 6x - 1 = 0.$$

N. Păun, profesor R. Vîlcea

7248. Se dă tetraedrul $ABCD$ și în interiorul lui un punct I. Dreptele AI, BI, CI, DI taie fețele opuse în punctele A', B', C', D'. Fie punctele A_1, B_1, C_1, D_1 situate respectiv pe IA', IB', IC', ID', astfel ca :

$$\frac{IA_1}{A_1A'} = \frac{IB_1}{B_1B'} = \frac{IC_1}{C_1C'} = \frac{ID_1}{D_1D'} = k.$$

Să se arate că există inegalitățile :

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} = 4(4k + 3);$$

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{B_1B'}{BB_1} + \frac{C_1C'}{CC_1} + \frac{D_1D'}{DD_1} = \frac{4}{4k + 3}$$

J. Weinstein, absolvent Rădăuți

7249. Dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, avem :

$$\Sigma a^4 \cdot \Sigma a^5 - \Sigma a^9 = a^2b^2c^2\,[2(a + b + c)^3 - 3abc],$$

$$\Sigma a^4 \cdot \Sigma a^6 - \Sigma a^{10} = 2a^2b^2c^2(a + b + c)^4 + 2a^3b^3c^3(a + b + c)$$

C. Ionescu-Țiu

7250. Se consideră un sistem de axe rectangulare și dreptele $y = a$, $x = b$, $x = c$. Un unghi drept se rotește în jurul punctului O. O latură taie dreapta $y = a$ în punctul A, iar cealaltă latură taie dreptele $x = b$ și $x = c$ în punctele B și C. Se cere locul geometric al centrului de greutate și al ortocentrului triunghiului ABC.

C. V. Costăchescu, Constanța

7251. Să se afle limita șirului

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{6k - 1}{3^k}$$

I. Șiclovan, Petroșani

7252. Se dă șirul determinat prin relațiile de recurență :

$$u_{2k} = 9u_{2(k-1)} + 8,$$

$$u_{2k+1} = 9u_{2k-1} + \frac{8}{3},$$

cu $u_0 = \frac{2}{3}$ și $u_1 = \frac{2}{3}$. Să se calculeze suma :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Laura Constantinescu, Sibiu

7253. Fie şirurile recurente $\{u_n\}$ şi $\{v_n\}$ caracterizate de relaţiile de recurenţă: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ şi $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}$. Să se determine relaţia de recurenţă a şirului sumă

$$\{u_n + v_n\}$$

(v. articolul din G.M.-B 1965, pag. 1—11)

Constantin Berdan

7254. Se consideră curba (Γ) definită de ecuaţia

$$2x^3 + (a + 2x).y^2 = 0, \quad (a = \text{constant})$$

şi familia de cercuri (C) care trec prin origină şi sînt tangente mereu curbei (Γ). Se cere locul geometric al punctelor de pe cercurile (C), diametral opuse originii.

M. Cistelecan, student Cluj

7255. Fie un triunghi ABC, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, N punctul lui Nagel şi O_9 centrul cercului lui Euler. Să se arate că dreapta care uneşte mijloacele laturilor NI şi NO ale triunghiului NIO trece prin O_9.

Theodor Gh. Cocea

7256. Fie triunghiurile ABC, $A'B'C'$ înscrise în aceeaşi conică. Notăm: $(BC) \cap (B'C') \equiv a$; $(CA) \cap (C'A') \equiv b$; $(AB) \cap (A'B') \equiv c$ precum şi $(BB') \cap (CC') \equiv \alpha$; $(CC') \cap (AA') \equiv \beta$; $(AA') \cap (BB') \equiv \gamma$. Dreptele $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$ sînt concurente.

Ion Chiţescu, elev Bucureşti

7257. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia în x şi y:

$$x^2 - y^2 + 2bx + b^2 - a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \cdot 2^k = 0$$

unde b este un număr întreg, n, p_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ şi k numere naturale iar a_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ numere prime distincte, mai mari decît 2.

Să se arate că ecuaţia dată admite $2(k-1)\prod_{i=1}^{n}(p_i+1)$ perechi distincte de soluţii întregi.

Tudor Zamfirescu

7258. Să se arate că dacă p este un număr prim mai mare decît 7, atunci p^3 este de forma $36n \pm 1$.

C. Ionescu-Ţiu

7259. În ortocentrul unui triunghi oarecare ABC se află un punct luminos. O rază de lumină loveşte latura CA, se reflectă pe AB şi apoi trece prin mijlocul laturei BC. Fie x unghiul sub care loveşte latura CA. Să se arate că

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\cos(A - C) - \sin A \sin(A - B)}{\sin A \cos(A - B)}$$

C. V. Costăchescu, Constanţa

7260. Dacă notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului a definită ca fiind numărul întreg ce verifică inegalitățile :

$$[a] \leqslant a < [a] + 1$$

să se demonstreze că $\dfrac{(x-1)(x+3)}{12}$ este pătrat perfect, unde $x = [(2+\sqrt{3})^n]$ pentru orice n natural. Generalizare.

Tomescu I. Ion, student București

7261. Notînd cu S_1, S_2 ariile bazelor unui trunchi de piramidă poligonală regulată circumscris unei sfere și cu n numărul laturilor poligonului de bază, să se arate că :

a) $A_l = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$; b) $A_t = 2(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$;

c) $V = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg} \pi/n}{n}}\,(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})\,\sqrt[4]{S_1 S_2}$

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{n}}{n}}$

N. Păun, profesor R. Vîlcea

7262. Să se arte că ecuația :

$$\frac{A_1^2}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^2}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{A_n^2}{(x-a)^{\alpha_n}} = B^2$$

unde A_i, a_i, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, B sînt numere reale, are toate rădăcinile reale. (Generalizarea problemei 5998).

Leibovici Valeriu, absolvent București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VIII*)

E : 2394. Un turist fiind în drum de la A la B, constată că după 6 ore de mers, distanța parcursă este cu 80 km mai mare ca partea ce mai urmează să fie parcursă. Mărind apoi viteza cu 20 km pe oră străbate restul drumului în 2 ore. Să se afle lungimea drumului de la A la B.

N. Goicu, Timișoara

E : 2395. La o cofetărie s-au vîndut în 7 zile, 592 prăjituri. a) Să se afle cîte prăjituri s-au vîndut în 5 zile dacă în celelalte 2 zile s-au vîndut 97 prăjituri ; b) Să se afle cît costă cele 97 prăjituri știind că ele s-au vîndut cu 1,50 lei bucata și cît costă celelalte prăjituri dacă s-au vîndut cu 2 lei bucata.

Ioniță Marin, Panciu

---

*) V (E : 2394—2397), VI (E : 2398—2402), VII (E : 2403—2406), VIII (E : 2407—2409).

E : 2396. O echipă de 35 muncitori a fost planificată să execute o lucrare în 50 de zile ; însă, timp de 15 zile au lucrat numai 30 de muncitori, iar timp de 25 zile au lucrat numai 10 muncitori. Norma de lucru fiind aceeași pentru toți, să se afle cîți muncitori vor lucra în continuare pentru a termina lucrarea la timpul fixat.

D. Mîrzan, R.-Vîlcea

E : 2397. Doi prieteni au o sumă de bani. Dacă primul dă celui de-al doilea 3 lei, ei vor avea sume egale ; dacă cel de-al doilea va da primului 3 lei, atunci primul va avea de 5 ori mai mulți bani ca al doilea. Să se afle cîți bani au fiecare.

A. Corlan, Dumbrăveni

E : 2398. O lucrare este efectuată de 15 lucrători în 20 de zile. După ce lucrează 8 zile împreună, 6 lucrători pleacă detașați pe alt șantier. În cîte zile se termină lucrarea ?

Nelu Dobre, Merei-Buzău

E : 2399. O cooperativă agricolă de producție a semănat 2/7 din întreaga suprafață cu grîu și 3/5 din rest cu porumb. Știind că suprafața semănată cu grîu și porumb ocupă 450 ha și că de pe un ha de grîu se strîng 30 hl (1 hl = 78 kg), iar de pe un ha de porumb 4900 kg, să se afle suma încasată din vînzarea prin achiziție de către stat, a 3/5 din cantitatea de porumb și 0,75 din cea de grîu, prețul grîului fiind de 2,25 lei/kg, iar al porumbului 1,40 lei/kg.

Sorin Constantinovici, Galați

E : 2400. În agricultura patriei noastre lucrează 183 500 tractoare, semănători mecanizate și combine pentru păioase. Știind că numărul combinelor reprezintă 6/11 din numărul semănătorilor și că numărul tractoarelor este mai mare ca cel al semănătorilor cu 15 500 să se afle cîte mașini agricole sînt din fiecare fel.

P. Grăjdeanu, profesor Tansa, Iași

E : 2401. Două loturi sînt semănate cu porumb și grîu ; 3/5 din suprafața cu porumb și cu 2/7 din suprafața cu grîu fac împreună 460 ha. Se cere suprafața semănată cu porumb și grîu, dacă 3/5 din suprafața semănată cu porumb întrece cu 260 ha cele 2/7 din suprafața semănată cu grîu.

Octavian, Sulea, profesor Văleni Iași

E : 2402. Să se calculeze :

$$\left[\frac{\left(1{,}5+2{,}(6)+3\frac{3}{4}\right).3{,}6}{14-15\frac{1}{8}:2}+\frac{59}{103}\right]\cdot\frac{\sqrt{5{,}76}.32\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\sqrt{17{,}015625}}{5{,}8(3).2\frac{4}{7}}$$

Admitere în cl. IX-a, Ploiești 1965

E : 2403. Doi bicicliști au plecat pe același drum și în aceeași direcție ca să parcurgă distanța de la A la B. Ambii au ajuns la destinație, dar unul din ei a pornit după ce celălalt efectuase 60 km. Să se determine distanța drumului de la A la B, știind că primul biciclist parcurge 150 km, iar al doilea 180 km în același timp și că distanța de 90 km a fost efectuată de primul biciclist în 6 ore, iar de al doilea în 5 ore.

Bogdan Baieră, Păunești

E : 2404. Marele nostru scriitor Mihail Sadoveanu s-a născut în secolul al XIX-lea și a murit în secolul al XX-lea. Să se calculeze anul nașterii și anul morții, știind că numărul format de ultimele două cifre ale anului nașterii întrece cu 19 numărul format din ultimele două cifre ale anului morții, iar suma acestor numere este 141.

Ioan Bucur, profesor Sibiu

E : 2405. Un robinet umple un bazin în 4 ore; curgînd împreună cu un al doilea robinet, bazinul se umple în $2\frac{1}{2}$ ore. La acestea adăugîndu-se al treilea robinet, toate trei umplu bazinul într-o oră. În cît timp umplu bazinul, primul și al doilea robinet, fiecare?

N. Manolache, elev București

E : 2406. Să se demonstreze că patratul care se formează în interiorul unui alt patrat cînd îi unim vîrfurile cu mijloacele laturilor următoare are aria egală cu $\frac{1}{5}$ din aria patratului mare.

D. Mîrzan, Bujoreni

E : 2407. Laturile unui triunghi sînt proporționale cu numerele 3 și 4, iar raza cercului înscris este egală cu 6 cm. Să se calculeze raza cercului circumscris.

R. Munteanu, student București

E : 2408. Să se arate că avînd dată lungimea L a unui cerc, putem calcula raza lui cu o eroare prin adaos, mai mică decît o zecime de miime din această lungime, cînd luăm pentru π valoarea apropiată 3,14.

I. Teodorescu, Galați

E : 2409. Într-o secție de lăcătușerie a unei întreprinderi pentru confecționarea unor panouri electrice, se taie plăci metalice în formă de triunghiuri dreptunghice avînd cateta $AB = 150$ cm și ipotenuza $BC = 170$ cm. La aceste plăci se decupează cîte o ferestruică dreptunghiulară $MNPA$ înscrisă în triunghi (M pe AB, N pe BC și P pe AC) pentru introducerea mînerului de acționare la declanșarea sau întreruperea curentului Să se determine laturile dreptunghiului $MNPA$ știind că perimetrul său este de 174 cm.

La admiterea în cl. IX-a, Ploiești, 1965

CERCUL ELEVILOR DE CLASA A IX-A DE LA LICEUL Nr. 15

ELENA FLONDOR, profesoară București

La Liceul nr. 15 din București, cercul de elevi ai claselor a IX-a și-a propus ca sub îndrumarea profesorilor Șabac Iuliana, Corîciu Florica și Flondor Elena să prezinte în cadrul cercului, lucrări cu caracter elementar din opera marelui matematician romîn Dimitrie Pompeiu", care găsea cu o deosebită artă, în problemele elementare izvorul unor cercetări cu caracter înalt".

Lucrările prezentate în cadrul cercului, au fost culese din volumul Dimitrie Pompeiu „Opera" editat de Academia R.P.R. în anul 1959, în a cărui prefață citim:

„Lectura operei matematice a lui Dimitrie Pompeiu, are pentru tineretul nostru matematic în primul rînd, o deosebită valoare educativă, prin modul în care această operă prezintă originea reală a noțiunilor și faptelor matematice, prin eleganța și conciziunea expunerii, prin deosebita pregnanță a expresiei, prin ținuta ei estetică".

Cu o deosebită grijă elevii și-au pregătit expunerile, care au fost urmărite cu mult interes de către colegii lor.

Elevul Dincă Ștefan cl. IX-D a prezentat lucrarea „Corespondența biunivocă între mulțimi formate din numere întregi".

Se consideră șirul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... (1)

Înmulțind fiecare termen al șirului cu factorul 7 și reținînd din produs numai cifra unităților se obține șirul 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, ... (2)

Cele 2 șiruri sînt în corespondență biunivocă. Aplicarea corespondenței (1) și (2) se face la o problemă simplă. Să se afle cele trei cifre $x\,x\,x$ în așa fel ca numărul $N = xxx398246$ să fie multiplu de 317?

Dată fiind cifra 7 cu care se termină 317, această problemă se desleagă folosind corespondența biunivocă între șirurile (1) și (2) și nu implică regula de divizibilitate cu 317. Se pot scrie cifrele, așa cum rezultă din condiția de univocitate.

$$
\begin{array}{r}
317 \times 988638 \\
\hline
2536 \\
951 \\
1902 \\
2536 \\
2536 \\
2853 \\
\hline
313398246
\end{array}
$$

Lui 6 (ultima cifră a lui N) din șirul (2) îi corespunde 8 în șirul (1) și deci primul produs parțial 2 aflat ș.a.m.d.

S-a aflat ultima cifră a factorului al doilea și deci primul produs parțial 2536. Ultima cifră a celui de al doilea produs parțial este $4 - 3 = 1$. Lui 1 din șirul (2) îi corespunde 3 în șirul (1). Deci penuliima cifră a factorului da doilea este 3. Se deduce al doilea produs parțial ș.a m.d. Rezultă că cifrele xxx sînt 313.

În continuare elevul Mihăilescu Cristian cl. IX-a C prezintă „Comentariu asupra unei propoziții în algebra lui Joseph Bertrand", făcut de Dimitrie Pompeiu. Atenția se îndreaptă asupra inegalităților simultan de forma $\begin{cases} A > B \\ C < D \end{cases}$ și important e dacă se poate preciza în aceste condiții semnul dintre sumele $A + C$ și $B + D$.

Joseph Bertrand arată că sînt posibile toate ipotezele și că nu există o regulă. Dimitrie Pompeiu arată că avem

$$A - B < D - C \to A + C < B + D,$$
$$A - B = D - C \to A + C = B + D,$$
$$A - B > D - C \to A + C > B + D$$

și deci semnul care este între $A + C$ și $B + D$ este și între $A - B$ și $D - C$.

Ca aplicație se arată că $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 > 0$ oricare ar fi $x > 0$, $y > 0$

Într-adevăr dacă $x < y$; $\begin{cases} y^5 > xy^4 \\ x^5 < x^4y \end{cases}$ și relația dată se pune în raport cu sistemul de inegalități de mai sus. Foarte ușor se arată fără artificii de calcul și fără descompunere în factori că inegalitatea dată e adevărată pentru orice x, y pozitivi.

Eleva Teodoreanu Mirela cl. IX-a F prezintă o altă aplicație a aceleiași reguli și anume : Să se arate că între numerele S și T; $S > T$ există relația : $S^3 + 3ST^2 > 3S^2T + T^3$.

Elevul Ionescu Codrin cl. IX-F a făcut o frumoasă expunere a lucrării „O ecuație aritmetică".

Întrebarea care se pune este dacă există numere care să se bucure de proprietatea ca pătratul lor să se termine cu cifrele numărului primitiv în ordine firească. Răspunsul este afirmativ, pentrucă

$$5^2 = 25,\ 25^2 = 625,\ 625^2 = 390625,\ 6^2 = 36,\ 76^2 = 5776.$$

Problema care trebuie rezolvată în general se exprimă prin relația (1) $N^2 - N = \text{multip. } 10^n$ (n numărul de cifre a lui N), pe care Dimitrie Pompeiu a numit-o „ecuație aritmetică"

Pentru rezolvare se folosesc faptele aritmetice pe care le exprimă relația $(N - 1)N = \text{multip } (2^n \cdot 5^n)$ și anume :

$$\begin{cases} N - 1 = \lambda 5^n \\ N = \mu 2^n \end{cases}; \quad \begin{cases} N' - 1 = \lambda 2^n, \\ N' = \mu' 5^n, \end{cases} \quad (N, N - 1 \text{ fiind întregi consecutivi})$$

pentru $n = 2$: $N - 1 = 25\lambda$; $N = 4\mu$; $\lambda = 3$; $N = 3 \times 25 + 1 = 76(2')$.

$\lambda < 4$ deoarece N are 2 cifre; $\lambda = 1$ nu convine deoarece nu satisface $N = 4\mu$.

Din sistemul 3 reiese că $\lambda = 6$, $\mu' = 1$ și $N' = 25$.

Pentru $n = 3$ se găsește $N = 376$ $N' = 625$.

Acest procedeu care nu dovedește în mod riguros existența soluției pentru n oarecare, iar pentru n foarte mare numărul de încercări e foarte mare, l-a condus pe profesorul Dimitrie Pompeiu la o altă cale și anume la un fel de recurență, care să permită calcularea cifrei corespunzătoare cazului $n + 1$, în cazul cînd se cunoaște soluția pentru cazul n. Este vorba

de cifra care trebuie adăugată la stînga soluției pentru n, ca să obțină soluția pentru $n + 1$.
Șirul (N') 5; 25; 625; ...
pentru $n = 4$ soluția (N') este 0625
pentru $n = 5$ soluția (N') este $\alpha 10^4 + 0625$
$(\alpha \cdot 10^4 + 0625)^2 = \alpha^2 \cdot 10^8 + 2\alpha \cdot 10^4 625 + 0625^2$ dar $2\alpha 10^4 \cdot 625 = \alpha \cdot 10^5 \cdot 125$
și deci $(\alpha 10^2 + 0625)^2$ păstrează ultimele cinci cifre neschimbate, (ale lui 625^2, oricare ar fi α- Acest număr de cinci cifre e soluția N', pentru $n = 5$.

S-a recomandat elevilor verificări ale raționamentului făcut pentru $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Pentru șirul (N): 6,76; 376; ... se confruntă $(N - 1)$ $(N' - 1)$ cu NN' din relațiile (2) și (3) și se găsește I $N + N' = K \cdot 10^n + 1$. ($N$ și N' avînd fiecare cîte n cifre, $K = 1$) și deci problema e rezolvată. Șirul (N') se află prin recurență iar șirul (N) prin relația (1).

Eleva Prăun Mihaela cl. IX F a prezentat nota intitulată „Sumele numerelor întregi".

Dacă N (un număr întreg) e dat sub forma $N = A + B$ (A și B numere întregi), factorii lui N sînt de 2 proveniențe:

1) factori comuni ai lui A și B, 2) factorii sumei $A + B$. S-a studiat cazul factorului 2 în suma $N = A + B$.
$N = 2^n N'$ (N', A', B' întregi impari, a, b, n exponenți întregi) $A = 2^a A'$, $B = 2^b B'$.

Analizînd cu minuțiozitate posibilitățile, în concluzie, în suma $N = 2^n N' = 2^a A' + 2^b B'$ se desprind următoarele ipoteze asupra exponenților a și b.

$1^0 \cdot a = b$ și atunci $a = b < n$

$2^0 \cdot a \neq b$ și atunci cel mai mic dintre exponenți este egal cu n.

Ca aplicație se demonstrează că o relație de forma:
$(X - A)^3 + X^3 = (X + A)^3$ este imposibilă în numere întregi. (1)

Această relație e un caz particular a ecuației lui Fermat:
$X^n + Y^n = Z^x$ pentru cazul $n = 3$.

Relația se scrie: $X^3 = 2(3AX^2 + A^3)$. (1')

Dacă A e impar, imposibilitatea acestei relații se pune imediat în evidență.

Dacă A este un număr par rezultatele expuse la (I) vor ajuta să se tragă concluziile.

În acest caz $X = 2^p X'$, (X', A' impari), $A = 2^q A'$.
Relația (1') devine $2^{3p} X'^3 = 2(3 \cdot 2^{2p+q} \cdot A' \cdot X'^2 + 2 \cdot 3^q \cdot A'^3)$

și deci se pot emite ipotezele:

$$2p + q + 1 = 3q + 1 < 3p \qquad (2)$$

care conduce la $p = q$ și deci la $3p + 1 < 3p$ relație absurdă.

(3) $2p + q + 1 \neq 3q + 1$ și aci presupune pe rînd cazul cînd fiecare din acești exponenți e mai mic unul decît celălalt.

$2p + q + 1 < 3q + 1$ (3')

$2p + q + 1 = 3p$

$3q + 1 < 2p + q + 1$ (3'')

$3q + 1 = 3p$ care conduc respectiv la $(p < q,\ p = q + 1)$ și $(q < p,\ q + 1 < p)$ relații care sînt incompatibile în numere întregi.

$q + 1 > p$ numere întregi

Cunoașterea de către elevi a operei cu caracter elementar a marelui matematician român Dimitrie Pompeiu, răspunde la interesul pe care-l purta pentru munca tinerilor elevi și pentru înțelegerea adîncă a speranțelor lor științifice.

CĂRȚI NOI

1. N. Mihăilă. *Introducere în teoria probabilităților și statistica matematică*, Biblioteca Societății de științe matematice din R.S.R. nr. 70, Editura didactică și pedagogică, 1965.

Lucrarea este alcătuită pe baza experienței în prezentarea prelegerilor privind teoria probabilităților și statisticii matematice la cursul de informare științifică ținut cu profesorii de matematici la Săcele, în 1963.

Autorul s-a străduit ca cititorul să poată studia singur lucrarea în așa fel încît acesta să reușească să înțeleagă și să aplice cunoștințele respective. S-a urmărit rezolvarea unor probleme oferite de practică, iar aplicațiile să stîrnească interesul celor care le studiază. Cartea este utilă profesorilor care predau astfel de cunoștințe, economiștilor, inginerilor sau oricui dorește să studieze într-o primă etapă teoria probabilităților și statistica matematică.

Volumul cuprinde : I. Noțiuni fundamentale. Evenimente. II. Probabilitate. Frecvență. III. Variabile aleatoare. Generalități. IV. Caracteristici ale variabilelor aleatoare. V. Distribuții continue clasice. VI. Variabile aleatoare multidimensionale. VII. Legea numerelor mari. VIII. Ajustarea legilor de distribuție. IX. Teoria selecției. X. Semnificația estimațiilor.

2. G. Ciucu, M. Iosifescu, R. Theodorescu. *Teoria jocurilor*, Biblioteca Societății de științe matematice nr. 71, Editura tehnică, 1965. Lucrarea își propune să expună bazele teoriei jocurilor, care este teoria matematică a situațiilor conflictuale.

Capitolele abordate sînt următoarele : elemente de teoria probabilităților și de algebră liniară, programare liniară, jocuri.

Expunerea este riguroasă, cunoștințele matematice necesare pentru înțelegerea lucrări sînt cele din școala medie și din primii doi ani de facultate.

Prin conținutul său, cartea se adresează unui cerc larg de cititori și în primul rînd celor care sînt pasionați de matematică, elevi, studenți, sau profesori. De asemenea, economiștii, tehnicienii, militarii, diplomații vor găsi un material util care le va fi folositor în activitatea lor.

3. Florica T. Cîmpan. *Istoria numărului* π. Editura tineretului, 1965. Citățm din „Cuvînt înainte" al autoarei „Cartea despre istoria numărului π nu are un scop esențial didactic. Ea vrea să fie, înainte de toate, o debutare, o bucurie a omului care-și caută o destindere citind-o.

Desfășurarea treptată a problemei despre natura numărului π și aceleia despre cuadratura cercului va fi urmărită deschizîndu-se o portiță a trecutului prin care cititorul să poată ajunge pînă la anumite întîmplări petrecute aievea".

Cuprinsul cărții : I. Cuvînt înainte. II. Introducere. III. În negura vremii. IV. Răsare „Ra", luminînd Egiptul. V. După un mileniu și mai bine. VI. În grădina lui Apollon Lykeion. VII. Sfărîmarea formei. VIII. Dibuiri prin ceață. IX. În estul îndepărtat al Asiei. X. În noaptea înstelată. XI. Molima cuadraturii cercului. XII. Doi nefericiți campioni ai cuadraturii cercului. XIII. Din nou printre cuadraturiști. XIV. Enciclopediștii se amuză. XV. Academia de Științe din Paris ia măsuri drastice. XVI. În sfîrșit, s-a descoperit adevărata identitate a numărului π. XVII. Ziua care începe. XVIII. Note.

4. I. I. Perelman. *Geometria distractivă*, traducere din limba rusă, Editura științifică, 1965. Citățm din prefață la ediția IX-a în limba rusă.

Geometria distractivă a fost scrisă atît pentru prietenii matematicii, cît și pentru acei cititori cărora dintr-o cauză oarecare le-au rămas ascunse multe laturi atractive ale matematicii.

Această carte este destinată într-o și mai măsură acelor cititori care au învățat (sau învață în prezent) geometria doar la tabla din clasă și din această cauză încă nu s-au obișnuit să observe relațiile geometrice cunoscute, în lumea de obiecte și fenomene ce ne înconjoară, nu s-au deprins să folosească cunoștințele de geometrie dobîndite în practică în împrejurările grele ale vieții, în marș sau în condiții de tabără.

Trezirea interesului cititorului pentru geometrie sau folosind cuvintele autorului „insuflarea plăcerii și educarea gustului pentru studiul ei este sarcina directă a acestei cărți".

Cuprins: I. Geometria în pădure. II. Geometria la rîu. III. Geometria în cîmp liber. IV. Geometria în marș. V. Trigonometrie de marș fără formule și tabele. VI. Unde cerul se unește cu pămîntul. VII. Geometria Robinsonilor. VIII. Geometrie în beznă. IX. Cunoștințe vechi și noi cu privire la cerc. X. Geometrie fără măsurători și fără calcule. XI. Numere mari și mici în geometrie. XII. Economie geometrică.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Soluții bune primite pînă la 15 august 1965)

CARANSEBEȘ. *Ștefănescu Mircea* (E : 2284, 5, 9, 90, 305, 19—22; 6750—2, 5—8, 60, 1, 3, 4, 8, 74, 80, 8, 91, 4, 7, 9, 802, 8, 12, 3, 24, 31, 5, 8, 48, 9, 54, 4, 62, 5, 7, 9, 79, 81, 4). Cl. X. Iacobici Luca (6751—3, 5, 63, 7, 80, 2, 91, 7, 802, 21, 9). *Liceul 2* cl. X Magheți Ioan (6763—5, 82, 3, 7, 8, 91, 9, 802, 15, 24, 9, 31, 47—9, Vasilescu Doina (6763, 47—9, 59, 62, 4, 5, 79, 81, 927, 50, 4), Vasilescu Victoria (F :2319, 21; 4847—9, 62, 4, 5, 79, 81, 927, 31, 46).

CALAN. *Liceul 1* cl. X. Pădurean Tiberiu (6750—3, 5—61, 3, 4, 82, 91, 3), Pilli Edit (6751, 5, 6, 7, 9, 63, 4, 93, 7, 9, 802, 52, 9).

CĂLĂRAȘI. Pantelimon Gh. (6776, 90, 4, 8, 11, 3, 4, 35, 904, 9, 57, 8, 80). *Liceul 1* cl. IX. Farmache Constantin (6750—2, 5, 6, 8—61, 3, 4, 80, 2, 8, 91), Vasile Eugen (6750—3, 5—61, 3—5, 8, 71, 3, 80, 2, 6, 95—7, 802, 8, 11, 3, 8, 9, 24, 35, 8). Cl. X. Ștefănescu Ștefan (6795—7, 9, 801—3, 8, 9, 11—5, 31—5, 8).

CERNA (Dobrogea). *Liceul 1.* Noșca Nicolae (6750, 2, 6, 61, 4, 82, 96, 7, 9, 802, 3, 59, 62).

CÎLNIC (Oltenia), *Ș. g. 1* cl. VII. Ciocîrlie Mioara (E : 2293, 4, 6, 301, 2, 7, 8, 11—3, 5, 25).

CÎMPENI (Cluj). *Liceul 1* cl. X. Dura Traian (6750—2, 7, 8, 61, 3, 4, 96, 7, 9, 802, 11, 31), Mateș Ilie (6750—2, 5, 7, 61, 3, 4, 97, 847, 50, 63).

CÎMPIA TURZII. Cl. X. Pop Ovidiu (6751, 3, 5—7, 9, 63, 96, 7, 803, 17, 59, 74).

CÎMPINA. *Liceul 1* cl. IX. Constantinescu Florin (F. 2319—22; 6802, 11, 40, 7—51, 6, 62, 4—70, 9—81, 4, 8—90, 927, 8, 31—4, 46). Dragomir Gheorghe (6847—50, 62, 4—8, 79, 80, 1), Iosif Ion (E : 2319, 20; 6847—9, 62, 4—9, 79, 81), Niculescu Eugen (E : 2319—21; 6795, 9, 802, 13, 40, 7—50, 62, 4—7, 9, 79, 81, 927, 31, 4, 46), Popescu Marilena (E : 2319, 22; 6847, 50, 62, 4, 5, 7, 9, 81), Stoian Luminița (E : 2305, 19—22; 6764, 802, 41, 7—50, 5, 62, 4, 5, 7—9, 79—81, 3, 4, 8, 927, 8, 31—4, 8, 45, 6, 9), Văcăroiu Ioana (6740, 7—51, 62, 4—70, 9, 81, 4, 8, 9, 923, 31—4, 42, 6). Cl. X. Olteanu Luminița (6751, 3, 5—7, 63, 97, 9, 807, 47, 8, 50, 2, 62, 4, 5, 7, 9, 81), *Palada Mihail* (6750—3, 5—9, 61, 3, 4, 82, 8, 96, 7, 9, 802, 3, 13, 35, 47—54, 9, 62—6, 79—81, 3, 4). *Tohoc Petre* 6795—7, 9, 801—3, 12, 47—50, 2—4, 9, 62, 5—9, 79—81, 3, 4, 7, 8, 96, 930—2, 6, 7, 41, 5, 6, 50, 4, 7). cl. XI. *Buşilca Gheorghe* (6796—8, 802, 3, 7, 8, 29, 31, 41—4, 7—52, 4, 63, 4, 6, 9, 70, 8—81, 3, 4, 8, 96, 928, 30—3, 46, 9, 50, 4, 62). *Liceul 2* cl. V. Pupezescu Mihai (E : 2265, 6, 8, 93—5, 7, 8). Cl. X. Filipescu Remus (6751, 5, 7, 63, 4, 96, 7, 803, 47—50, 2, 62, 4, 79, 81).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Liceul 1* cl. IX. Anonim (E : 2304—6, 19—22; 6750, 7—60, 4, 8, 71, 680, 2, 3, 8, 9, 95, 6, 8, 802, 3, 9, 11—5, 9, 24). Cl. X. Păduraru Constantin (6751, 5—7, 9, 61, 3, 4, 76, 97, 9, 842, 7, 9, 54, 62, 4, 5, 7, 81). *Absolvent Mascan Marius* (6750, 2, 4, 6, 60, 1, 4, 80, 90, 3, 5—803, 8, 11—5, 7, 24, 5, 7, 9, 31, 5—9, 47, 50, 2, 4, 9, 62, 4, 7, 79, 81, 4, 6, 8, 97, 904, 9). Liceul militar cl. X. Andreescu Gheorghe (6751, 5, 7, 63, 4, 95, 7, 9, 803, 47—9, 81), Merce Eugeniu (6750—2, 5, 7—60, 3, 90, 847—50, 9, 62, 5—9), Merla Gheorghe (6751, 5, 6, 61, 4, 97, 9, 803, 42, 7—50, 4, 62, 4—7, 9, 79, 81), Moisiuc N. (6751, 5, 7, 63, 4, 76, 97, 9, 803, 42, 7, 8, 50, 2, 4, 62, 6, 81).

CÎMPULUNG MUSCEL. Liceul 1. cl. IX. IX. Hurdubețiu Sorin (6765, 95, 802, 11, 40, 7, 9, 51, 62, 4, 7, 8, 70). Cl. X. Filipovici Constantin (6750—2, 5—7, 9—61, 3, 4, 8, 88, 92, 5—7, 9, 801—3, 11, 24, 7, 31, 2).

CLUJ. *Liceul Emil Racoviță* cl. V. Voicu Doina (E : 2293, 5, 7, 9, 307, 8, 24, 7). Cl. VIII. *Lascu Gh.* (E : 2293—6, 300—2, 7, 8, 12, 5, 9, 25—8, 33; 6813, 5, 47—50, 62—5, 7, 9, 77, 9—81, 3, 4, 8, 932, 3). Cl. IX. Bartoș Ioan (E : 2305, 6847—50, 62, 4, 6, 8, 79—81, 4, 931). *Liceul Gh. Barițiu* cl. V. Roșcău Manuela (E : 2278, 83, 91, 3—6, 8, 301, 7, 8). *Liceul 7* cl. V. Fariszugas Ioan (6763, 97, 9, 847, 8, 54, 9, 62, 4, 7, 9, 81), *Kovacs Ladislau*

(6752, 3, 6, 8, 60, 97, 9, 801, 3, 8, 24, 5, 42, 7—52, 4, 9, 62, 4—9, 73, 4, 9, 81, 3, 4, 8, 927—31, 4, 6, 8, 41, 3, 6, 7, 9, 50, 4, 6). *Liceul 8 N. Bălcescu* cl. VII. Miclescu Lucia (E : 2291, 4—6, 9, 300—2, 7, 8, 16). Cl. VIII. Bercea Corina (E : 2281—3, 90—2, 4, 6, 9, 301), Teuşan Ovidiu (E : 2281, 91, 3—6, 9, 302, 47, 8, 62, 8, 79, 81, 927, 8, 32). Cl. IX. Dunca Dumitru (E : 2289, 90, 306 ; 6750, 802, 47—9, 62, 4, 79, 81), Fărcăşanu M. (E : 2319, 21 ; 6847—9, 62, 4, 5, 8, 79, 81, 4), Lazăr Aurel (E : 2305, 6 ; 6752, 9, 61, 8, 86, 8, 95, 9, 802, 11—3, 5, 21), Stănescu Lidia (E : 2289, 90, 305 ; 6764, 847—9, 62, 4, 5, 79, 81), Stoian Daniela (E : 2290 ; 6750, 2, 8, 9, 64, 86, 95, 802, 47, 9, 64, 79). Cl. X. *Farkaş Petru* (6784, 8—91, 5—9, 801—5, 8—14, 5—9, 21—5, 7—9, 31, 2, 5, 8, 40—4, 7—50, 65—8, 70, 2, 3, 8—813, 4, 7—90, 2, 5, 6, 8—900, 02, 9, 42, 3, 5, 16), Mareş Maria (6847—9, 52, 4, 9, 62, 4, 79, 81, 4, 96, 927, 31—3, 46, 9, 50, 4), Parancsuk Alexandru (6751, 5, 7, 63, 97, 847—9, 54, 9, 62, 4, 79), Scurei Stelian (6750—3, 5—9, 61, 3, 4, 82, 3), Trif Damian (6753, 5—61, 3, 80, 7, 95—7, 9, 801—3, 10, 1, 6, 7, 24, 9, 31, 41—3, 52, 4, 65, 73, 4, 84, 8, 92, 5, 6). *Liceul 10.* Martievici Radu (E : 2282, 3, 6, 8, 91, 3—6, 9). *Liceul 15* cl. V. Iancic Pepinela (E : 2286, 91, 3—6, 301, 2). Cl. VI. Iancic Bubu (E : 2281, 6, 91, 3—6, 301, 2, 7, 8). Cl. VII. ... Marian (E : 2286, 91, 4—7, 300—2). Cl. VIII. Moldovan Mariana (E : 2281, 2, 91, 4—6, 302, 7, 11, 2),

COMARNIC. *Liceul 1* cl. IX. Buzatu Constantin (E : 2289, 90, 305, 19, 21, 50, 64, 802, 47, 9, 51, 62, 4, 7—70, 80, 1, 3), Theuca Ion (6750, 2, 96, 802, 11, 47—9, 51, 62, 4, 79, 81).

COMLOŞUL MARE. *Ş. g. 1.* cl. VII. Grofşoreanu Felicia (E : 2248, 50, 3—5, 7—9, 65, 8, 70, 5, 8).

CONSTANŢA. *Ş. g. 1* cl. VIII. Trandafir Titi (E : 2293—8, 300—2). *Liceul 1* cl. X. Bădărău Ioan (6927, 8, 30—4, 6—9, 45, 6, 9, 50, 2, 4—7, 9), Văituş Anca (6750—3, 5, 6, 60, 1, 3, 7, 76, 86—9). *Liceul 2* cl IX. *Blană Ionel* (E : 2290, 320, 1 ; 6731, 50—2, 4—7, 60, 2—5, 7, 71, 3, 86, 8, 94—800, 2, 8, 12, 25, 7, 9, 35, 9). *Liceul 3* cl. IX. *Bedivan Maria* (6760, 82, 3, 6, 8, 91, 5, 802, 11—3, 5, 40, 1, 7—50, 5, 6, 62, 4, 5, 7, 9, 72, 8—81, 3, 4, 7—90). Cl. XI. Eremia Vasile (6750—65, 7, 71, 3, 82, 6, 8, 90, 1, 4—803, 8, 12). *Absolvent Răduinea Nicolae* (6765, 7, 8, 95—9, 801, 3, 8, 12—5, 7, 21, 3—7, 31, 5, 40—4, 6—55, 7, 9—65, 73, 5, 6, 9, 81, 4, 6, 8, 9, 901, 5, 27, 36, 43, 6, 9, 50, 1, 3, 4, 7, 8, 69).

CORABIA. Absolventă Delu Maria (6797, 9, 800, 1, 64, 79, 81, 941, 4, 6, 51, 6). Liceu cl. X. Filip Nicolae (6750—2, 5—7, 9—61, 3, 4, 97, 802, 3, 47—52, 4, 9, 62, 4, 5, 79, 81).

CORBU (Argeş). *Ş. g. 1* cl. VIII. Răducu Adrian (E : 2265, 8, 70, 80—2 ; 6720, 2).

COSTEŞTI (Argeş). Liceu cl. X. Ionescu Ion (6751, 2, 5, 7, 9, 847, 52, 4, 9, 62, 6, 81).

COTATCU (Ploieşti). *Ş g. 1* cl. VII. Iorga C. Emil (E : 2294, 6, 9, 301, 2, 8, 12, 4, 25, 9).

CRAIOVA. *Ş. g. 2* cl. VII. Dăescu Cornel (E : 2294, 5, 9, 307, 11, 4, 9, 21). Cl. VIII. Gheorghe Felicia (E : 2281—4, 6, 8—91, 3—7, 9—303). *Ş. g. 5* cl. VII. Stoica Eugen (E : 2281—3, 91, 3, 4, 6, 9, 301, 2). *Ş. g. 9* cl. VI. Voicu Eugen (E : 2281—3, 94—6, 307, 8, 11). *Liceul 1* cl. IX. *Turcu Ilie* (E : 2305 ; 6570, 7—9, 64, 5, 86, 94, 5, 9, 802, 9, 11—3, 8, 9, 41, 8—51, 5, 6, 62, 4, 5, 7, 8, 70, 2, 8, 9, 81, 3, 4, 8—90). Cl. X. *Dediu Luminiţa* (6797, 847—50, 2, 4, 7, 9, 62—9, 79—81, 3—5, 8, 86, 927, 31—41, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 80), Petrescu Constantin (6751, 2, 5—7, 9, 61, 3, 96, 7, 848, 52, 9, 62, 6, 9), Cl. XI. *Sandu Darius* (6751—6, 76, 82, 3, 7—90, 2, 5—800, 2, 3, 15, 9, 24, 9, 31, 6, 9). *Liceul 2* cl. IX. Chiriţă Nicolae (E : 2289, 305, 19—22 ; 6778, 88, 91, 4, 841, 7—50, 5, 62, 4, 6—8, 70, 7, 81, 4, 8, 916). *Liceul 3* cl. IX. Cîrciumărescu Ion (6750, 802, 47—9, 62, 4, 7, 9, 79, 81, 3), Greblescu Alexandru E : 2289, 90, 306 ; 6750, 64, 76, 82, 3, 7, 8, 91, 840, 7—9, 51, 62, 4, 7, 79, 81, 3), Preda Marcel (E : 2289, 90, 303, 5, 6, 19, 21, 2, 34 ; 6750, 8, 86, 8, 847—9, 55, 62, 4—7, 9, 70, 9—81, 3, 4, 8, 927, 8, 30—4, 46, 57, 63). Cl. X. Buşe Gabriela (6750—3, 6, 8, 9, 61, 4, 88, 91, 5—7, 802, 3, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 7—9, 78, 9, 81, 927, 31, 4), Constantinescu Adrian (6750, 2, 7, 8, 63, 4, 848, 50, 2, 4, 62, 4, 7, 78, 9), Locusteanu M. (6750—2, 5—61, 4, 3, 82, 8, 90), Petrescu Ioan (6750—2, 5—8, 61, 3, 4, 8, 91), Popescu Gheorghe (6750—3, 5—8, 63, 4, 88, 97, 847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 8, 70, 9, 81, 8, 927, 30—3, 41, 6, 7, 50, 4), Predoi Petre (6750—3, 6—9, 61, 4, 88, 95—7, 801—3, 47, 9, 50, 2, 4, 7, 9, 62, 4, 5, 8—70, 9—81), Topan Dumitru (6795—7, 9, 801—3, 24, 41, 7, 50, 2, 4, 9, 62, 7, 9, 79, 81, 3, 4, 927, 31, 3, 4, 41, 3, 9, 50, 4). Cl. XI. Albu Teodor (6750—2, 5—61, 3, 4, 73, 88, 90, 3), Georgescu Dan (6750—3, 5—61, 3, 4, 73, 6, 82, 7, 8, 91, 3), *Teodorescu Marin* (6740—2, 5—61, 3, 4, 6, 91, 6, 7, 801—3, 40, 4, 7—54, 7, 9, 62, 4, 7—70, 8, 9, 81), Urdă Gheorghe (6751, 2, 5—7, 9, 63, 4, 78, 80, 3, 8, 91, 7, 9, 859, 62—4, 6—9, 80, 1, 916). *Şc. pedagogică* cl. VIII. Diaconu Ilie (E : 2294—6, 301, 2, 7, 8, 25).

CUCA (Argeș). Absolvent Matei I. Petre (6, 8, 62, 6, 82, 8, 95—7).

CURTEA DE ARGEȘ. Liceu cl. IX. Nițulescu Gh. Gheorghe (E : 2305, 6, 19—21; 6795, 6, 802, 3, 9, 15, 88, 90, 927, 9, 63). Cl. X. Băluță Filofteia (6751, 2, 5, 6, 8, 9, 61, 3, 842, 3, 7, 8, 50, 9, 62, 5, 79, 81, 4, 8, 905).

CUGIR. Liceu cl. X. Muntan? (6755, 7, 64, 802, 47—50, 62, 4, 7, 79, 81, 4, 8). Cl. X. Ciuciu Stela (6840, 7, 8, 50—4, 9, 62, 4, 89, 96, 950, 4, 7).

DĂENI (Argeș). S. *g. 1* cl. VII. Enciu Aurel (E : 2281—3, 6, 93—5, 9, 301, 2).

DEJ. *Liceul 1* cl. X. Suciu Octabian (6763, 862, 4, 6, 8, 9, 79—81, 3, 931, 50). *Liceul 2* cl. VII. Pocol Viorica (E : 2286, 7, 95, 6, 300—2, 12). Cl. IX. Barth Ferena (6750, 2, 7—61, 4, 78, 86, 8, 95, 6). Cl. X. Pop Alexandru (6751, 2, 5—7, 9, 61, 3, 97, 9, 802, 47, 8, 64), Smărăndescu Cecilia (6750—2, 5—7, 61, 3, 4, 93, 802, 31).

DEVA *Liceul 1* cl. X. Străjerel Șerban (6750—2, 5—7, 63, 97, 9, 847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 7, 9, 79, 81, 8).

DOMNEȘTI (Argeș). *Liceu* cl. XI. Lixandru Nicolae (6847—50, 2, 4, 64, 5, 7, 70, 9, 81, 4, 8, 90, 931, 8, 46, 9, 50, 4).

DRĂGĂNEȘTI-OLT. *Liceu* cl. IX. Durigu Mircea (E : 2319—22; 6841, 7—50, 5, 62, 4, 5, 7, 9, 81, 8). Cl. X. Cîrnaru Teodor (6755, 7—60, 3, 4, 97, 802, 11, 35, 47—52, 9, 62, 4), Crăciun Gh. (6750—3, 5—61, 3—5, 7, 8, 78, 82, 7, 8, 96—9, 802, 3, 11—4, 6, 7, 9, 24, 9, 35), Popa Ion (6750—3, 5—9, 63, 4, 7, 97, 812, 9, 29, 82).

DRĂGANU (Argeș). Ș. *g.* cl. VIII. Diaconescu Natalia (E : 2291, 2, 4, 6, 9, 301, 2, 7, 52).

DRĂGĂȘANI (Argeș). S. *g. 2.* cl. V. Săndoiu Gh. (E : 2281, 6, 93—7, 307). *Liceu* cl. XI. Stelea Constantin (6797, 802, 11, 24, 47—50, 2, 4, 62, 4—70, 9, 81, 3).

DUMBRĂVENI (Brașov). *Liceu* cl. IX. *Widmann Wilhelm* (E : 2305, 6, 19—22; 6796, 8, 802, 3, 13, 5, 40, 1, 7, 9—51, 3, 5, 6, 62—70, 2, 8—81, 3—5, 7—9).

FĂGĂRAȘ. *Liceul 1* cl. X. *Grovu Nicolae* (6773, 95—7, 801—3, 8, 11, 7, 24, 9, 31, 5, 47—52, 4, 9, 62, 4, 5, 7—70, 9—81, 3, 4, 5—9, 909, 21, 7—35). Cl. XI. Grama Gheorghe (6710—3, 5, 6, 20, 2, 4, 50—9, 61—4, 96—9, 802—4, 13, 7, 39, 42, 3, 5—7, 9—55, 7, 9—64, 6—73, 5—7, 9—81, 3—5, 7, 96).

FĂGET (Banat). *Liceu* cl. IX. *Sava Petru* (6750—3, 5—8, 63, 4, 8, 82, 7, 9, 94, 5, 801, 2, 8, 9, 11, 21, 4, 7—9, 31, 5, 40, 1, 6—50, 2, 4—6, 60—70, 2, 3, 6, 8, 9, 81, 3, 4, 6, 8, 9, 97, 902, 9). Cl. X. *Babescu Marius* (6795, 902, 40, 7—52, 4, 62—7—, 8—81, 3, 8, 90, 927—9, 31—6, 8, 42, 5, 6, 9, 50, 4, 7).

FĂLTICENI. *Liceul 2* cl. X. Alionte Victor (6763, 97, 9, 847, 8, 52, 4, 9, 62—4, 7—70, 8—81), Jitaru Mihai (6750—2, 5, 6, 8, 9, 63, 96, 7, 9, 801, 2, 24, 47, 8), Murariu Nicola (6751, 2, 5, 9, 61, 3, 88, 91, 6, 7, 848, 9, 52, 4, 9, 87), Gorovei Sorin (E : 2281, 6, 8, 9; 6750—6).

FELDRU (Cluj). Ș. *g. 1* cl. VIII. Marinescu Oltea (E : 2281, 8, 93—6, 9, 302, 7).

FETEȘTI GARĂ. *Absolvenți*: *Dache Constantin* (6750—8, 60—3, 95—803, 8, 13, 21, 4, 9, 31, 5, 8, 9, 47—54, 7, 60—70, 9—81, 3—5, 95—6, 902, 27, 8, 30—3, 5—8, 40—52, 4—7, 63, 75), *Gonciar Ștefan* (6710—8, 20—8, 35, 8, 40, 4, 6, 8, 50—65, 8, 76, 82, 5—7, 9, 91, 5—803, 8, 11, 4—6, 23, 9, 31, 9, 40, 2, 7—54, 8—70, 3, 6, 7, 9—86, 8, 95, 6, 8, 914, 20, 2, 3, 5, 36—52, 4, 7—9, 63, 4, 71, 5, 85).

FILIAȘI (Oltenia). *Liceu* cl. IX. *Băluță Constantin* (E : 2288—91, 8, 300, 2, 3, 5, 10—2, 4—6, 9—22; 6750—2, 7—60, 4, 8, 80, 3, 7, 95, 6, 9, 802, 3, 11—3, 5, 21, 4, 40—2, 7—53, 5, 6, 62—70, 2, 8—81, 3—5, 7—9, 912, 5, 6).

FIENI. *Liceu* cl. VI. Horban Cristina (E : 2283, 6, 93,—6, 307, 9). Cl. VIII. Mircescu Gheorghe (E : 2282, 94—6, 9, 300—3). Cl. IX. Topalescu Diana (E : 2289, 90; 6750, 7, 8, 60, 4, 8, 86, 8, 98, 802, 11), Zaroiu Gh. (E : 2319—21; 6757, 01, 86, 8, 95, 847, 8, 62, 4, 6, 8, 9, 78, 9, 81, 3, 4, 8).

FOCȘANI. Ș. *g. 7* cl. V. Iacob Dan (E : 2307, 9, 12, 23, 35—9). Cl. VII. Bauer Alexandru (E : 2294—6, 301, 2, 7, 25, 6). *Liceul 1* cl. X. Cruceanu Ion (6897—50, 2, 4, 9, 62—7, 9, 79—81, 3), Luca Vasile (6755, 61, 97, 9, 802, 47—9, 52, 4, 9, 62, 4, 6, 9, 79, 81), Maxen Oriana (6751, 2, 5, 7, 61, 3, 849, 62—9, 79), Tarbă Eliza (6752, 7, 63, 847, 9, 52, 9, 62, 4, 6, 7, 9, 79, 81). Cl. XI. Gagea Mircea (6750—2, 5—7, 53, 4, 76, 97, 802, 49, 52, 64, 81), Titirez Dan (6750, 5, 63, 97, 802, 52—4, 9, 62, 6, 9, 70, 81, 950, 4), Vatra Fănică (6751, 2, 5, 7, 9, 61, 3, 91, 7, 802, 3, 8, 35, 47—54, 9, 62, 4—70, 9—81, 4, 8, 93).

FRASIN (Suceava). Ș. *g.* cl. VI. Ciubotaru Vasile (E : 2212, 96, 8, 307, 8, 14, 25, 6). Cl. VIII. Gemănar Zinică (E : 2307, 8, 10, 2, 4—6, 9—21).

GALAȚI. *Absolvent Andrei Viorel* (6805, 9, 21, 40—3, 6—54, 7, 9, 61—5, 7—70, 3, 6, 8—81, 3—6, 8, 95—7, 902, 5, 14, 6, 9—25, 7—59, 63, 72, 3, 5, 83, 6). Ș. *g. 7* cl. VI. Mîrzescu Dorina (E : 2293—5, 9, 300, 1, 7, 25, 6). Ș. *g. 21* cl. VIII. Wechsler Adrian (E : 2300, 7,8, 19—21; 6847, 8, 62, 4, 79, 81). Ș. *g. 24* cl. VII. Costiniuc Florin (E : 2286, 8, 91, 9, 301,

2, 7, 8). Cl. VIII. Katz Marian (E : 2294, 6, 301, 8, 25; 6862, 4, 79, 81, 931—3). *Liceul 1* cl. IX. Herşcovici Isaia (E : 2285, 305; 6750, 2, 6—8, 60, 97, 9, 801, 2, 15). Cl. X. Anghene Adrian (6752, 5, 7, 63, 4, 82, 9, 96, 7, 9, 802, 47, 52, 4). *Liceul 2* cl. IX. Caloianu Lucia (E : 2289, 90; 6750, 8, 61, 99, 847, 62, 79, 81, 927). Cl. X. Caloianu Maria (6750—3, 5—61, 3, 97, 9). *Liceul 3* cl. IX. *Timofte Sterică* (E : 2305, 6, 19—222; 6750, 9, 95, 802, 9, 11, 40, 1, 7, 51, 5, 61—70, 8, 9, 81, 3, 4, 920, 1, 27—32, 4, 8, 46, 9, 57, 9). Cl. XI. Scorţaru Florin (6751, 2, 6, 61, 4, 96, 7, 802, 35, 47, 8, 52, 9, 62, 4, 6, 9, 79, 81, 8). *Liceul 4* cl. C. Tiribegea Maricel (6802, 11, 40, 51, 5, 64, 8—70, 2, 8, 9, 81, 4, 95). *Liceul 5* cl. IX. Anghel Marian (6795, 802, 11, 40, 1, 51, 64—6, 8—70, 2, 8, 9, 81, 4). Cl. X. Anghelescu Gabriela (6751, 5—7, 61, 3, 97, 803, 47, 8, 52, 62, 8, 50, 4). *Liceul 6* cl. IX. Vasiliu Ilie (E : 2289, 305, 19; 6750, 9 ,802, 47—50, 62, 4—6, 8—70, 9, 81, 4, 8). *Liceul de muzică şi arte plastice.* Roşca Daniela (E : 2282, 3, 91, 4—6, 9, 301, 7, 8).

GĂIEŞTI (Argeş). *Liceu* cl. X. Prodan Ion (6751, 2, 9, 60, 3, 95—7, 9, 801—3, 11, 42, 52, 4, 62, 9, 70).

GĂTAIA (Banat). *Liceu* cl. IX. Cionvică Ilie (E : 2285, 90, 305; 6750, 8, 64, 86, 95, 802, 11, 48, 9, 51, 6, 62, 7—70, 9, 84).

GHERLA (Cluj). *Liceu* cl. IX. Lobonţiu Mircea (E : 2290, 305, 21, 1; 6847—9, 62, 4, 7, 79, 81).

GIURGIU. *Ş. g. 3.* cl. VIII. Isar Aurelian (E : 2276, 82, 93, 4, 6, 9, 307, 19, 50). *Liceul 1* cl. X. Gologan Marcel (6751, 2, 5—7, 9, 61, 3, 847—50, 2, 4, 9, 64, 5, 9, 79, 81, 4), Liţoiu Petrişor (6750—2, 5—8, 61, 3, 4, 96, 7, 801, 2), *Manea Adrian* (6796, 9, 801, 2, 9, 15, 31, 41, 3, 7—50, 2, 4, 9, 62, 4, 7—70, 3, 9, 81,4, 8, 96, 923, 4, 7, 30—4, 8, 41—3, 6, 9, 50, 4, 7). *Liceul 2* cl. IX. Nedelescu Iulian (6847—51, 62, 4—70, 9—81, 3, 8, 927—36, 8, 42, 6, 9, 57), Răboj Constanţa (E : 2305, 6, 20; 6750, 64, 802, 47, 8, 62, 4, 8, 70, 9, 81, 4). Co. XI. Durbac Sinica (6776, 88, 99, 847—50, 9, 64, 7, 79, 80, 1 3).

GURA HUMORULUI. *Liceu* cl. X. Buburuzan Lucian (6751, 2, 56, 7, 9, 62, 95, 7, 9, 801—3, 29, 31).

HAŢEG. *Liceu* cl. IX. Maftei Nicolae (6750, 2, 7—61, 4, 82, 3, 8, 91).

HOREZU (Argeş). *Liceu* cl. IX. Croitorescu Constantin (E : 2289, 90; 6757, 76, 88, 91, 802, 49, 62, 4, 8, 74, 9, 81), Manea Vasile (E : 2289, 90, 319, 21; 6676, 802, 47, 8, 62, 4, 79, 81), Terteci Ion (E : 2285, 90, 305, 6; 6750, 7, 8, 64, 76, 8, 83, 6, 8, 95, 802, 11, 3, 5). Cl. X. *Buşe Marcu* (6733, 48, 50—3, 5—61, 3—5, 73, 82, 3, 8, 91, 5—7, 9, 801—3, 8, 10—3, 8, 23—5, 7, 9, 31, 5, 40—4, 7—59, 62—70, 2—4, 8—84, 7—9, 95, 6, 8, 912, 5, 6), *Creţan Ion* (6758, 95—7, 9, 801—3, 17, 32, 42, 4, 7—54, 9, 62, 4, 6, 8—70, 8—81, 4, 9, 96, 927, 31, 2, 42, 5, 6, 50, 2, 4), Popa Gh. (6797, 9, 843, 4, 7, 9, 50, 2, 4, 5, 9, 62, 81, 931, 46, 56).

HUEDIN (Cluj). *Liceu* cl. IX. Opriş Lucreţia (E : 2284, 90, 305; 6; 6750, 802, 48, 66—70, 931). Cl. X. Voiculescu Emil (6796, 7, 802, 3, 8, 13, 4, 7, 22, 9, 31, 88).

HUNEDOARA. *Absolvent Căpăţînă Ion* (6797, 8, 807, 39, 42. 3, 7—55, 9—70, 6, 7, 9, 81, 3, 4, 6—8, 95, 915, 27, 31, 4, 6, 50, 1, 4), *Enciu George* (6795—803, 7, 13, 24, 7, 31, 9, 47—50, 2—5, 9, 62, 4—9, 75, 6, 9, 81—4, 6, 927—33, 5—51, 4, 7, 63). *Liceul 1* cl. VIII. Gac Maria (E : 2293—6, 301, 2, 7, 8, 16, 25), Nedelcu Violeta (E : 2293—6, 300—2, 7, 8, 15, 6, 20). Cl. IX. *Ciotescu Ion* (E : 2305, 6, 19—22, 33, 4; 6797—9, 801, 2, 41, 7—51, 4—6, 62, 4, 5, 7—70, 9, 81, 3, 4, 8, 927, 9—34, 8, 40—3, 6, 9, 50, 4, 6, 63), *Oprişa Doru* (E : 2305, 19—22 6750, 2, 5—8, 60, 3, 7, 8, 82, 3, 8, 97—9, 801, 2, 47—51, 4—6, 62, 4, 5, 7—70, 9, 81, 3, 4, 8). Cl. X. Lupu Iosif (6759, 802, 9, 48—50, 5, 6, 62, 4, 6, 8—70, 9, 81), Retegan Aurel (5751, 2, 5, 7, 63, 97, 824, 48, 9, 52, 4, 7, 9). Cl. XI. *Belu Emil* (6750—2, 4—64, 88, 95—803, 14, 7, 27, 9, 31, 9, 43, 7—52, 4, 9—70, 5, 6, 9, 81, 4—6, 8, 96, 927, 8, 30—2, 4, 6—8, 40—53, 7).

HUŞI. *Liceu* cl. X. *Diaconu Aurel* (6750—3, 5,—8, 60, 1, 3—5, 91, 5—7, 9, 801—3, 25, 47—9, 51—4, 6, 8, 9, 62, 4—6, 8—70, 4, 9—84, 7—9, 96). Cl. XI. Dariel Viorel (6752, 61, 87, 91, 6, 7, 9, 801—3, 13, 5, 7, 29, 31, 5).

IAŞI. *Ş. g. 7* cl. VII. Stavarache Mioara (E : 2282, 3, 6, 92, 4, 6, 301, 7, 8, 16). Cl. VIII. Drăgan Gh. (E : 2293—6, 301, 2, 7, 8, 16, 23—6). *Ş. g. 12* cl. VII. Ionescu Carmen (E : 2293—6, 300, 1, 16, 25, 6). *Ş. g. 13* cl. VI. Chiţanu Doina (E : 2293—7, 9, 301, 2, 7, 8, 11, 2). *Ş. g. 14* cl. VI. Proproşnicu Gabriela (E : 2300, 4, 7, 8, 10, 2, 4, 5, 8, 23, 5, 7). Cl. VIII. Stancu Viorel (E : 2311, 3, 6, 36, 9, 50; 6864, 946, 88, 90, 7002). *Liceul 1* cl. VII. Mistreanu Gabriela (E : 2293, 9, 300—2, 8, 12, 8, 24, 9), Pancu Costel (E : 2294, 6, 9, 307, 8, 11, 2, 3, 28), Purice Constantin (E : 2293—6, 8, 9, 301—3). Cl. VIII. Mirzanca Magda (E : 2299, 316, 8, 24—6, 8, 9, 33), Simion Iosip (E : 2293—6, 9—302, 7). Cl. XI. Chiriac Iulian (6750—2, 5—7, 9—61, 3, 4, 8, 83, 7, 8, 91). Liceul 3 cl. V. Lupescu Silviu (E : 2293, 4, 8, 301, 2, 7, 8, 13). Cl. VI. Mirtu Mihai (E : 2307, 8, 10, 2—4, 24,—9). Cl. VII. Burlacu Călin (E : 2293—6, 9, 301, 2, 11). Cl. VIII. Linde Radu (E : 2293—6, 8, 9, 301—3, 5), Teodorescu Octavian (6849, 62, 79, 81, 727, 32, 94—6, 9; 302, 7, 8, 12, 19, 25, 6). Cl. IX. Bejenaru

Ioan (6849, 50, 62, 4—9, 79—81, 930, 3), Donea Dragoș (E : 6847—9, 62, 4—9, 81, 4, 8, 916). Gîlmeanu Valeriu 6847—51, 862, 4, 5, 6, 9, 79, 84), *Iacob Florin* (6840, 1, 7—56, 62—70, 2, 8—81, 3—5, 7—90, 915), *Popa I. Eugen* (6922, 3, 3, 31—4, 8, 40, 4, 6, 9—51, 3—5, 7—60, 80, 3, 6, 8, 90, 9, 7003, 6—8, 14, 21, 4, 7, 8, 39, 44, 6, 7, P), Rusu Gheorghe (6847—9, 51, 62, 4—6, 8—70, 81, 1, 3, 4, 9, 90), Sandu Mihai (6798, 802, 13, 47—50, 62—4, 6—70, 8—81, 4, 8, 921, 7, 30—5, 46, 57, 63), Vasuță Virgil (6768, 82, 847—9, 62, 4, 7, 79, 81, 4, 8), Zaharia Vasile (6847—50, 62, 4—7, 79, 81, 3, 4). Cl. X. *Azicovîci Sergiu* (6799, 801, 2, 8, 9, 12, 3, 7—9, 25, 5, 7, 9, 31, 3, 5, 42, 7—52, 4—6, 62, 4—7, 70, 9, 81, 3), *Botez Constantin* (6799, 801, 3, 6847—50, 2—4, 62, 4, 5, 8, 9, 79—81, 4, 8, 922, 3, 7, 30—4, 7, 41, 2, 6, 49, 50), Chiriac Gh. (6751, 97, 824, 47—9, 52, 62, 4, 79—81, 8, 922, 4, 50), Dămătăr Andrei (6795—7, 9, 801, 2, 9, 40, 7—9, 52—5, 9, 72—70, 9—81, 930—4), Mardare Mirel (6751, 2, 5—7, 9, 61, 3, 4, 82, 96, 7, 801, 2, 17, 47—50, 62, 4, 5, 7, 79, 80, 1), Pascaru Andrei (6797, 801, 40, 7—9, 51, 2, 9, 62, 4, 7, 7, 79, 81, 8), Șerban Stan (6675, 751, 5—7, 63, 4, 7, 82, 97, 817, 24, 47—9, 62, 4, 70, 81, 8). Cl. XI. Ionescu Sergiu (6797, 8, 802, 47—9, 59, 62, 4, 79—81, 8, 927, 8), Lefter Emilian (6847—54, 62—4, 7—9, 79, 81). *Liceul 4* cl. VIII. Angelescu Romulus (E : 2307, 8, 14, 5, 9, 21, 4—8, 33—50). Cl. IX. Șerban Elena (6795, 6, 802, 3, 9, 11, 40, 7—51, 64). Cl. XI. *Ruxăndrescu Mioara* (6796, 7, 801—3, 47—50, 4, 7, 9, 62, 4—6, 8—70, 4, 9, 80, 1, 3, 923, 7, 8, 31—3, 7, 8, 45, 6, 9, 50, 4). *Liceul 7* cl. VI. Cruluicovski Adriana (E : 2282, 3, 91—6, 9, 301, 2, 7, 8, 11—3, 24—6, 8). Cl. VIII. Adomnicăi Minodora (6847, 8, 62, 4, 79—81, 927, 9, 31, 2). *Liceul 8* cl. VII. Ghilescu Codin (E : 2286—8, 91, 4, 5, 300—2, 16), Weisman Matias (E : 2294—6, 300—2, 7, 8, 11, 6, 8). Cl. X. Amariței Gheorghiță (6813, 43, 9, 50, 3, 4, 62, 4—70, 80, 1, 3, 4, 8). Cl. XI. Baraboi Adrian (6803, 11, 24, 31, 47—50, 4, 9, 62, 4, 8, 9, 84), Hanganu Iulian (6796, 7, 9, 802, 3, 4, 7—54, 62, 4, 5, 8, 9, 78—81, 3, 4, 8. 927, 8, 30—3, 954, 7), Iacob Dumitru (6848, 52, 4, 62, 4, 6, 7, 9, 81, 4, 930, 1, 41, 6, 50, 4, 7). *Liceul 9* cl. CIII. Builă Horia (E : 2293—7, 9, 301, 5). Cl. IX. Crețu Octavian (6802, 47—51, 62, 4—70, 9, 81, 927, 31). *Liceul de muzică și arte plastice* cl. VIII. Fiterman Adrian (E : X293—6, 9, 301, 2, 7, 11).

IECEA MARE (Banat). *S.g.* Ebner Franz (E : 2285, 9, 90, 305, 12—22, 36, 7, 45, 61, 3, 77, 8).

INEU (Crișana). *Liceu* cl. IX. Alexa Nicolae (6752, 5, 97, 8, 9, 12, 5, 47—52, 5, 64—9, 81, 3, 4, 8, 927—33, 8). Cl. X. Giurgiu Emil (6751, 2, 5, 6, 9, 63, 847—9, 52, 9, 64, 5, 9, 79). Cl. XI. *Vlasiu Iulian* (6795—9, 801—4, 17—9, 23—5, 7, 31, 41, 4, 7—55, 7—60, 2—70, 4, 8—85, 8, 96, 902), *Pop Marius* (6795—7, 9, 801—3, 9, 11—3, 5, 7—9, 21, 4—7, 9—32, 5, 47—50, 2, 9, 62, 4, 79, 81, 4, 6). *Absolvent Pătruț Popa Ion* (6795—803, 7—9, 12, 3, 5—8, 21, 4, 7, 9, 31, 3, 5, 9, 41—3, 6—54, 7, 9—66, 8, 9, 71—3, 5, 5, 8—82, 3—8, 92, 5, 6, 902, 2, 5, 27—9, 31—4, 8—40, 50, 4).

JOIȚA (București). *Liceu. Absolvent* Nenciu Vasile (6751, 2, 5, 6, 63, 4, 82, 9, 99, 802, 3, 47—9, 62, 4, 8, 9, 79, 80, 1, 3, 4, 927, 8).

LUDUȘ (Mureș). *Liceu* cl. X. Laszlo Ștefan (6795, 7, 9, 801—3, 5, 11, 3, 5, 47—50, 2—4, 9, 62, 7—70, 3, 4, 8, 8, 81, 3, 8, 96, 7, 9).

LUGOJ. *S.g.4.* Guțu Ioan (E : 2296, 9, 301, 2, 16, 19, 23, 6, 847, 9, 52, 930, 3). *Liceul 1* cl. IX. Borcănescu Florin (6847—50, 62, 4, 5, 7—9, 81, 8, 927, 31, 46), Ripan Iosif (E : 2320, *0*; 6847—50, 4, 62, 4, 5, 78, 70, 9, 81, 3, 4, 8), *Liceul 2* cl. IX. Duncescu Virginica (6847—51, 6, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 9, 81), Lobodă Ana (6814, 47, 9, 62, 4, 81, 4, 8, 46, 88, 7003, 14, 22). Cl. X. Frenți Elena (6847—52, 9, 60—70, 9—81, 4, 8, 915, 27, 9—34, 8, 46, 9, 50, 7); Guberan Mircea (6795, 801, 65, 81, 8, 927, 9—34, 8, 49, 50, 95), Halas Dumitru (6796, 7, 9, 802, 3, 11, 31, 40, 1, 3, 4, 7—53, 5, 7, 9, 862—70, 8, 81, 3, 4, 7, 8), *Hărăguș Stefan* (6842, 7—9, 52, 4, 5, 7—9, 62, 4—70, 3, 9, 81, 8, 93, 5, 7, 9, 902, 9, 14, 5, 9, 22 , 7, 30, 1, 4, 8, 43, 6, 9, 50, 2—5, 7, 67, 72, 5, 80), Orbulov Petru (6847—52, 9, 62—70, 9, 81, 4, 8, 915, 27, 9, 30, 1, 2, 4, 8—50, 7), Popișteanu Delia (6796, 7, 9, 801—3, 11, 48, 9, 62—4, 67, 79, 81). Cl. XI. *Brînda Rodica* (6796—803, 8, 10, 7, 25, 9, 47—50, 2—5, 9, 60, 2—70, 6, 9—86, 8, 96), *Ghera Petru* (6731, 50—64, 76, 82, 3, 6, 91, 4—803, 9, 13, 24, 42, 78, 8, 52, 60, 2, 4, 79—81, 4, 902, 27, 9—31, 4—41, 3—7, 9—55, 7, 8, 75, 90, 5, 7002—4, 6, 43—5). *Absolvenți*: *Jurcă Ioan* (6795—803, 5, 9, 13, 5, 9, 21, 4, 9, 31, 6, 8, 9, 42, 3, 6—53, 659, 70, 2, 3, 5—7, 9, 81, 3, 4, 6, 8, 95—7, 9, 902, 5, 6, 22, 4, 5, 7, 32, 6—41, 3—5, 7, 8, 73, 5), *Klein Tiberiu* (6795—7, 802, 3, 11, 5, 31, 42, 6, 9, 51, 4, 9—63, 5—70, 3, 4, 6, 9—81, 8, 9, 902, 16, 27, 9—31, 7, 41—5, 50, 1, 4, 7, 8, 7002—4, 44, 5).

MĂCIN. *Liceu* cl. XI. Simion Andrei (6795, 6, 7, 9, 801—3, 8 11, 2, 4, 5, 8, 9, 21, 4, 5, 7, 9, 31, 2, 5).

MĂRĂȘEȘTI. *Liceu* cl. IX. Apostol Ovidiu (6750, 91, 802, 47, 8, 62, 4, 9, 70, 9, 81, 4, 8).

MEDGIDIA. *Liceu* cl. XI. Jeaca Mihai (6847, 62, 4, 7—9, 81, 3, 4, 932, 46, 50, 4)

MEDIAŞ. *Liceul 2* cl. IX. Brădişteanu Smarand (6750, 7, 64, 8, 88, 802, 47—50, 62, 4—9, 79, 81, 8). Cl. IX. Georgescu Clement (6840, 50—5, 7, 63, 5, 6, 8—70, 9, 81, 4, 7, 8, 90), Orban Elek (6795—804, 7, 8, 11, 2, 4—7, 23, 30, 7, 9, 88).

MEHADIA. *Liceu* cl. XI. *Vrăjitoru Isaac* (6841—4, 7—53, 7, 9, 62—70, 4, 8—84, 7—9, 95, 6, 909, 27—38, 41—3, 6, 7, 9, 50, 24, 6, 7).

MIERCUREA CIUC. Chiş Ana (E : 2249, 51, 4, 65—8, 82, 3, 6, 7, 9, 91).

MINECIU UNGURENI (Ploieşti). Savu D. Ştefan (6750—3, 5—7, 60, 3, 95, 7, 8, 802, 24).

MERENI (Bucureşti), *S.g.* cl. VIII. Cojocaru Ion (E : 2294, 6, 307, 8, 11, 25, 6, 80, 1 96).

MOVILA MIRESII (Galaţi). *Liceu* cl. XI. Mircioiu Alexandru (6848, 50, 2—4, 9, 62, 4, 6, 79, 811, 923, 7, 30, 7, 41).

MIRŞANI (Oltenia). *S.g.* cl. VIII. Stăncele Andrei (E : 2319, 33, 6—41, 4, 50).

MÎSCA (Banat). *Liceu* cl. XI. Hera Gheorghe (6755, 7, 63, 4, 88, 97, 9, 801, 3, 8, 15, 47—50, 2, 9, 62—9, 79).

MIZIL (Ploieşti). *S.g.1* cl. VII. Bogdan Paul (E : 2282, 3, 91, 2, 4—6, 9, 301, 2), Popescu Nicolae (E : 2307, 8, 25, 6, 34, 6, 9), Vlădăreanu Doina (E : 2307, 8, 11—4, 6, 23—9).

MOGOŞENI (Argeş). *S. g.* cl. VIII. Badea Gheorghe (E : 2293—6, 9—302, 7, 8, 12—6).

MOINEŞTI (Bacău). *S.g.* cl. VIII. Badea Manuela (E : 2293, 4—6, 301, 2, 7, 8), Vrînceanu Gabriela (E : 2293—6, 8, 9, 301, 2). *Liceu* cl. IX. Mihai Nicolae (6847, 62, 4, 79—81, 3, 927, 8, 30—3, 96).

MEIEŞTI (Mureş). *Absolvent Kenyeres Andras* (6797—9, 815, 24, 5, 7, 9, 31, 7, 9, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 7, 76, 9, 81, 4, 8, 97, 904, 9, 10, 20, 7, 31, 8, 44, 6, 9, 50, 1).

MOLDOVA NOUĂ (Banat). *Liceu* cl. M. Petrovici Alexandru (6750—3, 5—8, 63, 8, 91, 2).

MORENI (Ploieşti). *Liceu* cl. IX. Leu Constantin (6840, 1, 50, 1, 68, 70, 2, 8, 83, 4, 8, 9, 921, 7, 8, 31—3, 8, 45, 6, 52, 9). Cl. X. Matei Ion (6751, 2, 5—61, 3, 4, 76, 80, 2, 3, 8, 91, 5—7, 9, 801—3, 11—3, 817—9, 24, 31, 47, 9). Cl. XI. Păduraru Dumitru (6920, 1, 3, 4, 7—37, 41—3, 5, 6, 9, 50, 4, 7, 9, 60, 3, 75).

NADLAC. *Liceu* cl. VII. Cobzaş Gheorghe (E : 2293—6, 9, 300—2), Tiriac Ştefan (E : 2314, 6, 8, 26, 40, 2, 5, 6). Cl. VIII. Ivanov Miodrag (E : 2283, 91, 5, 9, 301, 2, 7, 19).*Absolvent Babescu Gh.* (6797—9, 801, 2, 40, 7—52, 4, 60—4, 6—9, 79—81, 3, 4, 927, 8, 31—3, 6, 8, 40—4, 6, 7, 9—51, 4).

NĂSĂUD. *Liceu* cl. IX. Ceuca George (6796, 802, 3, 15, 9, 24, 50, 1, 7—53, 6,62—70, 2, 8, 9, 80, 1, 4, 8), Iloaie Vasile (6802, 47—9, 62, 4, 7, 8, 79, 81, 1, 4). Scurtu Vasile (6811, 5, 24, 47, 8, 50, 1, 62, 4, 6, 7, 9, 70, 9, 81, 3, 4, 8). Cl. XI. Kiselstein Aurel (6797, 9, 824, 9, 42, 7—50, 2, 4, 9, 62, 4—9, 73, 9, 81, 3, 4, 927, 31—3, 7, 8, 41, 3, 5, 6), *Absolvent Moraru Ioan* (6796, 7, 9, 839, 45, 7—55, 9, 60, 2—9, 76, 9—81, 4, 6, 8, 909, 27, 8, 30, 1, 3, 8, 41, 7, 9—51).

NEGREŞTI (Bacău). *S.g.* cl. VIII. Humă Ana (E : 2293—6, 9, 302, 7, 8, 25, 6), Popa Dumitru (E : 2307, 8, 19, 24—6, 33 ; 6847, 62, 79, 81, 931, 2).

NEGRU VODĂ. *Liceu* cl. IX. *Vlădulescu Petre* (6840, 7, 9, 50, 1, 2, 5, 6, 62, 4, 5, 7—10, 8, 9, 81, 3, 4, 7—90, 912, 7—9, 31, 5, 8, 45, 6, 9, 53, 7, 8, 62, 6, 7001, 2, 3, 10). Cl. X. Ciornei Virgil (6750—3, 5—7, 9, 60, 95, 6, 9, 801, 42, 3, 7—54, 9, 62—6).

NEMŢIŞOR (Bacău). *S.g.* cl. VII. Axinte Marta (E : 2294, 6, 9—302, 11, 25).

NICOREŞTI (Galaţi). *S.g.* cl. XI. Oprea Dorin (E : 2293, 4, 6, 307—9, 24—6, 8, 33).

NOVACI (Oltenia). *Liceu* cl. X. Sişiroi Constantin (6797, 9, 802, 13, 47—52, 4, 8, 9, 62, 4, 7, 73, 8, 9, 81, 4, 8, 927, 31, 2, 8, 46, 9, 50, 3).

OLTENIŢA (Bucureşti). *Liceu* cl. XI. *Sandu Mihail* (6795—7, 9, 802, 2, 11, 8, 24, 34, 40, 3, 4, 7—59, 62, 4, 5—74, 8, 9, 81, 4, 87—90).

ORADEA. *Liceu* cl. X. Bușcianu Adrian (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 50—3, 5—8, 60, 1, 3, 4, 82, 95, 801—3), *Hincu Marius* (6796, 808, 9, 11, 3, 8, 9, 21, 7, 34, 5, 53, 72, 4, 89, 90, 6—9, 921—4, 7, 21, 29—33, 8, 45, 6, 9, 50, 2, 4, 6—9, 63, 71, 2, 80), *Varna Mircea* (6795, 7, 9, 801—3, 15, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 8—70, 9—81, 927, 8, 30—3, 6, 8, 41—3, 5, 6, 9, 50, 4, 7). Cl. XI. *Negruțiu Vasile* (6744, 50—64, 70, 6, 80, 2, 8, 95—803, 8—10, 2, 3, 5—9, 24—6, 9, 31, 3, 5, 6, 8). *Liceul 2* cl. X. Mănucu Dumitru (6847—9, 54, 9, 62, 4, 7, 9, 81, 8, 927, 8, 30—2, 7, 41, 6, 9, 50, 4). *Liceul 4* cl. IX. Nemethi Csaba (6795, 802, 11, 3, 40, 7, 8, 50, 1, 5, 62, 5, 8, 70). Cl. X. Meer Petru (6796—9, 801—3, 10, 2, 3, 9, 24, 7, 9, 31). Cl. XI. But Tiberiu (6735, 6, 8, 42, 50—2, 5—8, 60—4, 83, 7, 91, 7—9, 801—3). *Absolvenți : Jacob Ştefan* (6847—51, 4, 9, 64—7, 9, 79, 81, 4, 8, 96, 927, 8, 30—4, 6, 8, 40—7, 9—51, 4, 7003, 16, 7), Memetea Ovidiu (6666—8, 70—7, 9, 80, 3, 5, 92, 8, 703, 8—11, 3, 5, 6, 20—2, 4—6, 31, 3,45).

ORĂŞTIE. *Liceu* cl. X. Işfan Petru (6796, 7, 825, 47, 9, 6, 8, 901, 9, 16, 20, 1, 3, 4, 6—58, 60, 3, 4, 8, 86—92, 5, 6, 14, 7, 28, 31, 3—5).

ORAŞUL GHEORGHIU-DEJ. *Liceu* cl. VIII. Papanicolau Lefterie (E : 2307, 8, 11, 6, 9, 25, 6, 8, 36—8, 50). Cl. XI. Chenic Leonardo 6751—7, 9, 61—4, 76, 82), Ganea Gabriel (6847—52, 4, 9, 62, 4, 5, 7—70, 9—81, 4, 8, 927—34, 6-8, 41, 3, 6, 9), Şerban Nicolae (6797, 8, 812, 5, 7, 24, 35, 48—50, 2, 65, 70). *Absolvent Timac Theodor* (6795—803, 12, 3, 7, 23, 9, 31, 7, 9, 40—3, 6—59, 61—5, 7, 70—6, 9, 81, 4, 6, 8, 90, 3, 927, 31, 4, 6—9).

ORAVIŢA (Banat). *Liceu* cl. XI. *Florescu Florian* (6796—9, 809, 12, 3, 5, 7, 8, 24, 31, 41—3, 7—30, 2, 4, 5, 7, 9, 64, 5, 7—9, 73, 8—84, 8, 92, 6, 915, 6, 20, 7—34, 6, 8, 9, 43 6, 9, 50, 5, 7, 63, 71, 3).

ORLEŞTI (Argeş). Cl. XI. Călineanu Mihai (6750—2, 5, 7, 9—61 , 3, 4, 95—7, 801—3 8, 41, 7—50, 2, 9, 62, 4, 7, 81).

ORŞOVA. *Liceu* cl. X. Creiciu Dan (6862, 4, 5, 8, 79, 80, 1, 927, 30, 50, 7002, 3), Creţoiu Mircea (6847—9, 52, 3, 9, 62—4, 928, 31, 2, 43, 6, 9, 50, 2), Dumitrescu Dan (6847—50, 62—7, 9, 70, 9—81, 3, 4, 8, 915, 27, 8, 31—4, 6, 8, 46, 9).

OŢELUL ROŞU (Banat), *Liceu* cl. IX. Tuican Floare (6841, 8, 78, 83, 7—90, 927, 9—36, 8, 41, 2, 5, 6, 52, 7, 8, 63, 87, 9, 95, 7000—3, 5, 21).

PANCIU (Galaţi). *Ş.g.* cl. VII. Luca Gheorghe (E : 2295, 8, 307—11, 3, 4, 23, 7, 38). Cl. VIII. Drăgan Dina (E : 2294—6, 8, 9, 301, 2, 11, 3, 8). Cl. XI. *Fătu Ioan* (6795—9, 801, 11, 41, 7—52, 62—70, 8—81, 3, 4, 8, 96, 927, 8, 30—3, 8). *Absolvent Tudorache Ion* (6841, 3, 6—55, 9—70, 2, 3, 5—81, 3—6, 8, 96, 914, 20, 1, 7, 52, 4, 57, 8).

PĂUNEŞTI (Bacău). *Ş.g.* cl. VI. Anghel Aneta (E : 2294, 302, 4, 8, 10, 5, 23—6), Ignat Viorica (E : 2281, 92, 3, 5, 6, 9, 307, 10, 2), Nica Lucica (E : 2302, 4, 10, 18, 23, 5, 6, 9), Neagu Viorica ((: 2304, 11, 3, 24, 6—8, 33, 4), Sandu Mariana (E : 2292, 3—8, 12, 25). Cl. VII. Anghel Glorica (E : 2265, 77, 8, 82, 3, 91, 3—6, 8, 9, 301—3), Berbece Maria (E : 2281, 6, 7, 91, 2, 5, 6, 9, 312), Gheorghiu Gabriela (E : 2288, 93—6, 9, 302, 3, 7, 12), Novac Maria (E : 2286, 93—6, 8, 99, 302, 3, 7), Rizuc Rodica (E : 2293, 99—304, 7, 8, 12). Cl. VIII. Bacalu Lucia (E : 2293, 5, 9, 302, 3, 5, 7, 8, 25, 6), Banciu Virginia (E : 2293, 6, 307, 8, 24—6, 33), Neagu Elena (E : 2298, 311, 2, 3, 20, 4—6, 32), Sandu Victoriţa (E : 2293—5, 9, 7, 8, 24—6), Vişan Ştefan (E : 2296, 9, 302, 3, 5, 7, 8, 26, 8).

PATIRLAGELE. *Liceu* cl. IX. Neacşu Dumitru (6798, 802, 3, 15, 41, 7—50, 62—70, 81, 3, 4, 8, 927, 30—4, 7, 8), Toma Veronel (6758, 64, 91, 802, 15, 47—50, 62, 4, 5, 79, 81). Cl. X. Poşoiu Const. (6750—3, 5—7, 9—61, 3, 4, 82, 3, 6, 91). Cl. XI. *Pavel Dumitru* (6795, 7—9, 801—3, 9, 13, 15, 6, 24, 9, 31, 3, 5, 9, 40, 3, 7—53, 5—7, 61—5, 7—70, 6, 8—91, 3—5).

PECIUL NOU (Banat). *Liceu* cl. X. Stoianovici Radislav (6751, 2, 5—8, 61, 3, 4, 82, 97, 802, 12, 5).

PETRILA. *Liceu* cl. IX. Coţan Nicolae (6813, 24, 9, 31, 42, 8, 9—51, 4—6, 9, 60, 2, 8, 9, 79, 81, 4, 8, 9, 95, 927, 31—4, 8, 45, 5, 6, 54).

PETROŞENI. *Ş.g. 1* cl. V. Siclovan Codruţa (E : 2282, 3, 91, 3—6, 9, 307, 12). *Ş.g. 4* cl. VII. Duda Iordan (E : 2295, 6, 303, 7, 11—4, 25, 6). *Liceul 1* cl. IX. *Popa Lucia* (6750—3, 5—61, 3—5, 86, 90, 1, 5—9, 801—3, 11, 3, 5, 7, 8, 24, 40, 1, 7—56), *Stan Mihai* (6802. 11—4, 21, 3, 4, 5, 40, 1, 7—52, 4—6, 9, 62—70, 2, 3, 8—81, 3, 4, 8—90, 909, 15, 21, 7, 8, 30—5, 8, 41, 5, 6, 9, 50, 2—4, 6—9, 62, 3, 6, 7, 75). Cl. X. *Martinovici Mihai* (6796, 7, 9, 801—3, 4, 31, 5, 43, 7—54, 7—9, 62—70, 3, 9—81, 4, 8, 92, 6, 902, 27—36, 8, 9, 41, 3, 6, 7, 9, 50, 4, 9), *Paicu Nicolae* (6840—2, 7—50, 2, 3, 5, 6, 62—5, 7—70, 2, 3, 9, 80—5, 7, 8, 90, 921, 7, 30—2, 5, 6, 8, 45, 6, 9, 52).

PEŞTEANA JIU. *Liceu* cl. IX. Anonim (6802, 11, 4, 47—51, 3, 62—4, 6—70, 8—84).

PIATRA NEAMŢ. *Liceul 1* cl. XI. Lazarovici Antonie (6797, 9, 829, 47—50, 4, 9, 72, 4—9).

PITEŞTI. *Ş.g. 10* cl. VI. Mînduţeanu Dan (E : 2293—7, 9, 301, 2, 7, 8, 10—12, 23—6, 8, 9). Cl. VII. Ruse I. Lilian (E : 2283, 8, 91—6, 9, 301, 2). Cl. VIII. Mînduţeanu George (E : 2293—9, 300—4). *Liceul 1* cl. IX. Lazăr Mircea (6840, 1, 7—50, 9, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 4, 8, 929, 9, 31—4, 8, 42, 5, 6, 9, 50, 2, 4), *Lungulescu Bogdan Eugen* (6710, 1, 3—6, 20—6, 31—3, 5, 6, 41, 5, 8, 50—66, 8, 9, 71—3, 80, 2, 3, 6, 7—9, 95—8, 80—3, 8, 9, 11—9, 35), Stoica Vasile (6795, 6, 8, 9, 802, 3, 11—3, 5, 21, 40, 1, 53, 5, 6, 8, 69, 70, 84,8—90). Cl. X. Butoianu Vasile (6840, 2—7, 9, 60, 72, 7, 87—90, 5, 8, 915, 23, 4, 57—60), Dumitrescu Ana (6795, 7—9, 802, 11, 47, 8, 62, 4, 7, 79, 81, 4, 927, 31, 2, 4, 40, 6), Grozea Elena (6796, 7, 9, 847, 9, 50, 4, 59, 79, 62, 9, 81), Pietreanu Cristian (6853, 68, 80, 3, 8, 9, 95, 6, 954, 5, 96, 7002, 3, 5), Savu Ion (6802, 42, 3, 7—9, 50, 2, 4, 8, 9, 63, 4, 6—8, 70, 4, 8, 9, 80, 5, 916), Velcescu Benone (6847, 8, 62—70, 9, 81, 8, 927, 32). Liceul 2 cl. X. Preda Vasile (6796, 803, 11, 2, 26, 9, 31, 5, 9, 62—4, 7—70, 9, 81, 3, 4, 9, 98, 927, 31—3, 5, 8, 46, 50, 4, 7). Cl. XI. Braniştе Dumitru (6796—8, 817, 41—3, 7—9, 52, 4, 9, 62, 4—6, 79—81, 4, 8, 920, 7, 8, 30—4, 6—8).

PLOIEȘTI. *Ș.g. 4* cl. VII. Matache Speranța (E : 2294—7, 9, 301, 2, 7, 8, 11, 5). *Ș.g. 12* cl. VII. Dinu Ileana (E : 2294—7, 9, 302, 7, 11, 3). *Liceul 1* cl. VII. Preda Oltea (E : 2294—6, 9—302, 7, 11, 4). Cl. IX. Bretcan Sabina (68111—3, 5, 8, 9, 40, 1, 7—50, 5, 62, 4, 5, 7, 9, 81, 3, 4, 8, 916), Coman Constantin (6812, 41, 8, 9, 62, 7—70, 2, 80, 1, 3), Dinescu Iulian (6848, 9, 64—6, 8—70, 9—82, 4, 7, 8, 920, 31, 2, 6, 8, 45, 6, 52), Crețu Zenaida (6840, 7, 64, 5, 8, 9, 79, 81, 3, 928, 9, 31, 2, 8, 46), Dumitrescu Marian (6796, 802, 3, 12, 51, 5, 6, 63, 5, 6, 72, 87, 920, 1, 33, 4, 6, 7, 42, 5, 57, 60, 3, 87, 95, 6, 8, 7002—4), Miu Vasile (6798, 9, 815, 80, 8, 927, 31—4, 40, 5—7, 9), Neguț Gh. (6796, 7, 9, 801, 3, 11, 40, 1, 50—3, 56, 63, 71, 2, 8, 80, 3—5, 8, 9, 921, 40, 2, 5, 6, 9, 52, 63), Olaru Ion (6840, 1, 7—50, 5, 62, 4—70, 9—81, 3, 4, 7, 8, 90, 988, 95, 6, 7002—5), Prelipceanu Minodora (6802, 12, 8, 9, 40, 1, 7—51, 5, 62, 4—70, 2, 8, 9—81, 4, 8, 921, 7, 31—5), Roman Dan (6849, 50, 5, 62, 3, 4, 7, 9, 79, 81, 4, 927, 31, 2, 4, 6, 8, 46, 57, 8, 61, (7002—4), State Adrian (6847—50, 62,4—9, 78—81, 8, 916, 27—34, 63, 7000—4), Cl. X. *Stănescu Dan* (6795—3, 8—19, 22—7, 31—3, 5, 8, 9, 40—4, 47—74, 8—81, 3, 4, 7—90, 2—9). Cl. XI. *Alboteanu Radu* (6842, 3, 7—50, 2—4, 62—6, 9, 70, 3, 8—81, 3—5, 927, 8, 30,4, 6, 7, 41—6, 52), *Atofanei Ramiro* (6796, 7, 9, 802, 3, 31, 47—50, 2—4, 62—6, 9, 79—81, 3, 4, 927—34, 6—9, 41—3, 45, 6, 9), Brătulescu Niculae (6841, 2, 7—50, 2, 9, 62—70, 80, 1, 4, 5, 8, 922, 7—34, 45, 6, 50), Cosma Tudor (6854, 67, 927—31, 2—50, 7003, 5), Tănăsescu Octavian (6847, 9, 50, 2, 62, 4, 5, 9, 79, 81, 927, 31, 2, 4, 49, 50, 4). *Liceul 2* cl. VI. Ioniță Violeta (E : 2297—9, 311, 3, 4, 7, 8), Miron Alexandru (E : 2281—3, 93—6, 9 , 307, 8, 11, 3, 4). Cl. VII. Vișan Marian (E : 2293—6, 9, 301, 2, 7, 8, 10—2, 5, 6, 9, 20, 1, 3—6, 30, 3, 47—50, 81, 2, 927, 30). Cl. VIII. Dumitrescu Mihai (E : 2293, 4—6, 9, 301, 2, 25, 6, 8, 33), Militaru Mariana (E : 2293, 4, 6, 7, 9, 300—3, 7, 8, 14, 24—7, 47, 8, 50, 927, 8, 30—3), Nicolaescu Traian (E : 2283, 3, 6, 9, 91, 2, 4—7), Stătescu Vivian (E : 2294—6, 9, 300, 2, 11, 6, 23—5), Steriu Alexandru (E : 2293—6, 9—31, 303, 5, 6). Cl. IX. Copoiu Florin (6795, 802, 11, 3, 40, 1, 7, 52, 6, 62, 4, 70, 2, 8, 81, 7, 90, 927, 9, 34, 6, 41, 2, 5, 6, 9, 52), Mazăre Alex. (6840, 8—53, 5, 62—7, 70, 9—81, 3—5, 8, 9, 98, 916), *Mignea Arminius* (6795, 6, 9, 802, 3, 11, 3—5, 8, 9, 21, 4, 38, 40, 2, 7—51, 5—7, 62—70, 2, 3, 8, 9), *Spiridon Maria* (6740, 1, 7—9, 51, 62—7, 70, 2, 9—81, 3, 4, 7—9, 921, 7—36, 8, 40, 2, 5, 6, 9, 52, 7, 8). Cl. X. Băltăceanu Romeo (6854, 63, 7—9, 83, 928, 32—4, 8, 43, 54), Moisescu Ana (6847, 8, 62, 8, 79, 80, 1, 927, 31, 3, 4, 46, 50), *Orășanu Laurențiu* (6887—90, 9, 20, 1, 7—38, 40—7, 9—53, 5, 7, 9—63, 5, 7, 72), *Stan Emil* (6805, 14, 6, 20—3, 5, 7, 8, 32, 4, 8, 9, 55—73, 8—81, 3—6), Tintă Mircea (6804, 6, 10, 4, 9, 25, 7, 9—31, 5, 40—4, 7—60, 2—70), *Vișan Ștefan* (6804, 5, 24—6, 9, 34, 5, 8, 40, 2—5, 7—62, 4—70, 2, 4, 8—84). Cl. XI. Dîmboviceanu Marinela (6799, 801—3, 14, 5, 7, 9, 43, 7—52, 4, 9, 62—5, 7—9), Dinu Cornel (6795—803, 8, 10, 1, 3, 6—9, 24). *Liceul* 3 cl. IX. Marinescu Cornel (6819, 24, 47, 9, 52, 62, 4, 81, 8, 927, 8, 30, 1, 2), Spiegel Wilhelmina (6795, 6, 9, 802, 3, 6, 11, 3, 40, 7—51, 5, 6, 62—70, 9, 81, 4, 7—90), Georgescu Flidia (6795, 9, 811, 40, 2, 3, 52—4, 6, 64, 7—70, 8, 927—33, 6, 8, 41—3, 5, 6, 50,2, 4). *Liceul 4* cl. X. Albulescu Mircea (9796, 8, 9, 802, 3, 47—51, 3, 5, 62—7, 9, 70, 81, 4, 7—9, 927, 9, 31—3, 57), Sachelarie Dan (6840—4, 6—74, 6—90, 5—903, 5, 6), Ștefan Roman (6796, 8, 802, 3, 47—51, 3, 5, 62, 3, 5, 6). *Liceul 5* cl. VIII. Dinu Nicolae (F : 2282, 3, 93—6, 9, 302, 3, 5). Cl. IX. *Nicolae Florea* (6842, 51, 5—7, 62—70, 3, 8—81, 3, 4, 7—90, 3, 915, 6, 20, 1, 7—9, 32—9, 41, 2, 5, 50, 72). Cl. X. Oprea Ion (6847—9, 52, 4, 62, 4, 5, 8, 9, 79, 81, 4, 8, 927, 9, 32, 3, 41, 6). *Liceul 6* cl. VII. Constantinescu Gelu (F : 2282, 6, 7, 93, 4, 9, 301, 2), Stoica Valentin (F : 2294—302, 23—9, 33, 4). Cl. IX. Tudor Doina (6716, 20, 2, 50, 60, 1, 802, 3, 11, 5, 95, 6). Cl. XI. Rizec Emilia (6710, 5, 20, 2, 35, 50—3, 5, 7—9, 63, 4, 97, 802, 47), *Oprescu Gabriel* (6759, 65, 76, 82, 3, 7—91, 5—803, 8, 10, 1, 45, 7, 8, 24, 9). *Absolvent Radu Vasile* (6793—7, 800, 9, 11, 5, 8, 9, 21, 4, 7, 32, 5, 7, 42, 6, 9, 52, 3, 5, 61, 4, 7, 71, 3, 4, 7, 80, 3, 6, 95, 902, 29, 30, 2, 3, 43, 4, 6, 50, 3, 4, 75), Soare Cristel (6795—803, 17, 36, 9, 52, 9, 62, 5—9, 71, 83, 8, 96, 927, 34, 6, 44, 6, 49, 52, 4).

PLOPENI (Ploiești). *Liceu seral* cl. VIII. Voinea Gh. (G : 2221, 5, 33—8, 40, 2, 5—8, 50, 2, 4, 8, 61, 3, 5—9, 79—83 ; 6670, 6, 7, 720). Cl. XI. *Olaru Ion* (6797, 801—3, 31, 47—50, 2—4, 9, 62—5, 8, 79—81, 5, 920, 7—9, 31—4, 6, 7, 41, 3, 5, 6, 50, 4).

PODUL TURCULUI (Bacău). *Liceu* cl. X. Tarină Ion (6750—2, 9, 60, 3, 4, 91, 802, 47, 9, 62, 4, 81).

POTCOAVA (Argeș). *Absolvent Stancu Ion* (6795—802, 24, 9, 31, 9, 42, 7—55, 62, 4—9, 79—81, 4, 8, 95, 909, 14, 20, 2, 7, 30—4, 8, 43, 4—7, 9—47).

PRUNDUL BIRGAULUI (Cluj). *Liceu* cl. VIII. Bălan Ioana (E : 2294—6, 9, 300, 7, 11, 2, 6, 9). Cl. X. Dragotă Dinu (6750, 2, 5, 6, 9, 61, 3, 4, 88, 91, 3, 5—7, 9), Platon Const. (6710, 1, 5, 720, 2, 38, 51, 2, 5—7, 9, 61, 3), Vrășmaș Ion (6710, 1, 5, 6, 20, 2, 38, 51, 2, 7, 61, 3). Cl. XI. Boieru Octavian (6750—3, 6—61, 4, 82, 7, 8, 93, 5—7, 9, 801—3, 29, 47, 50, 2, 4, 9, 62, 4—7, 9, 70, 8, 83).

PUCHENI MOŞNENI (Ploieşti). *S.g.* cl. VIII. Stan Stelian (E : 2294—6, 9, 301—3, 8, 10—2, 6, 20—2, 5, 8, 47, 81, 932).

PUCIOASA. *Liceul* cl. IX. Cimpoca Gheorghe (6863, 6, 7, 80, 3, 8, 920, 7—34, 8, 40), Comănoiu Maria (6841, 7, 51, 65—7, 70, 8, 9, 81, 4, 7—9, 932), *Diaconu Gh.* (6795, 6, 9, 802, 3, 11—3, 5, 40, 1, 7—51, 62—70, 2, 8, 9—81, 4—9, 90, 927—36), Tabacu Ion (6798, 815, 41, 65, 6, 82—4, 93, 927, 8, 31—3). Cl. X. Cîrstea M. (6796, 7, 803, 17, 47—9, 52—5, 9, 62—4, 7—70, 4, 3, 8, 81, 3, 5, 7, 96, 927, 30, 3, 8, 41, 50), Iacobescu Mihai (6751, 2, 5—7, 61, 90, 6, 7, 9, 801—3, 15, 7, 43, 7—52, 4, 5, 62, 4—70), *Mărculescu Corneliu* (6797, 841, 2, 7—9, 52, 4, 62, 4, 5, 7—70, 2, 9—81, 4, 5, 7, 8, 95, 6, 305, 16, 27, 30—4, 43, 5, 7, 9, 50, 2—4), Stoica ceciclia (6843, 7—9, 52, 3, 62, 4, 6, 8—70, 81, 4), Tabacu Florica (6847—50, 62—7, 9, 79, 82, 3, 93, 27, 8, 31), *Vasilescu Nicolae* (6811, 3, 28, 40—89, 92—7, 80—9, 92—7, 9, 903, 6, 9, 27—43, 5—7, 49—58, 63, 4, 8), *Zecheru Gheorghe* (6796—9, 801, 2, 13, 5, 41, 2, 7—9, 52—6, 62, 4—9, 79—81, 3, 4, 7, 927, 8, 31—4, 7, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 50). Cl. XI. Niţescu Ştefan (6811—3, 5, 7—9, 24, 5, 9, 31, 6, 9, 927, 31, 2, 6—42, 4), Tîrcă Mihai (6796—9, 808, 15, 8, 24, 42, 3, 7—50, 2, 4, 62, 4—6, 8—70, 2, 3, 9—81, 4, 5, 7, 916, 22). *Absolvent Bîrlog Corneliu* (6840, 1, 3—5, 7, 8, 50, 1, 3, 6, 8, 9, 62, 5, 6, 9, 70, 84, 9, 921—3, 5, 7, 9—32, 5, 8, 41, 4, 6, 8, 9, 51, 4—9, 63, 72—4). Marcu Const. (6797—800, 13, 24, 37,47, 50, 62, 4, 7, 76, 9, 81, 8).

RADOVEANU (Bucureşti). *Liceu* cl. X. Vlăsceanu Stan (6796, 8, 803, 8, 16, 7, 25, 7, 9, 31, 5, 41, 50, 5, 6, 70, 8, 80, 3, 6, 99, 909, 16, 27, 31, 8, 30, 7003).

RĂCARI (Bucureşti). *Liceu* cl. IX. Niculescu Ion (6802, 11, 41, 7—50, 62, 4—70, 9, 81, 80, 8, 931, 46, 9, 75). Cl. X. Gheorghe Niculina (6797, 801—3, 11, 47—50, 2, 4, 62, 4, 5, 7, 79), Ene Gheorghe (6808, 42, 7—50, 2—4, 59, 62, 4—70, 9, 81, 8), *Miulescu Cecilia* (6838, 55, 74, 8, 85, 90, 8, 921, 3, 4, 7—38, 40—6, 9—54, 6, 7, 60, 1, 3, 56, 7, 75, 80, 91, 7002, 5), Nincă Ion (6797, 9, 801, 2, 47—52, 4, 9, 62, 4, 70, 9, 81, 4, 927, 9, 34, 6, 8, 40, 1, 5, 6, 9, 50, 6, 7, 60). Cl. XI. Antonescu Aurelia (6796, 7, 801—3, 11, 3, 24, 9, 47—9, 51, 2, 4, 7, 9, 62, 4, 7, 9, 70, 9, 81, 4, 96, 928—31, 3, 8, 40, 1, 3, 4, 6, 9—52, 6, 7, 60).

RĂDĂUŢI. *Liceul 1* cl. IX. Guşeţu Dorin (6802, 11, 40, 7—9, 51, 2, 5, 6, 64—6, 81). Cl. XI. Weinstein Jack (6840, 2, 3, 7—52, 4, 5, 7, 9, 61—70, 2, 5, 8—86, 8, 90, P).

REGHIN. *Ş.g. 1* cl. VI. Chiciudean Anton (E : 2307, 8, 11—3, 24—7).

REŞIŢA. *Ş. g. 1* cl. VIII. Andrei Radu (E : 2293—6, 9, 301, 2, 3, 5, 6 ; 6803). Cl. XI. Ioiart Ioan (6796,8, 801, 29, 31, 42, 7—9, 52, 4, 7, 9, 62—6, 8, 70, 9, 81, 3—5, 96), Somide Horiana (6666, 7, 70—8, 80, 4, 710, 1, 5, 20, 2).

RÎMNICU SĂRAT. *Liceul 1* cl. IX. Ghiţă Mircea (6670, 1, 73—7, 82, 4, 95, 7, 704, 24). Cl. X. Panait Stan (6815, 24, 9, 31, 49, 54, 62, 4, 9, 81, 95, 927, 8, 30—3, 7, 41, 50, 4, 63). Cl. XI. *Cristea Mişu* (6841—3, 7—50, 2, 4, 5, 9, 62—5, 7—70, 9, 81, 3, 4, 8, 96, 916, 22, 7—34, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 6, 80, 7, 90, 8, 9, 7001—3).

RÎMNICU VÎLCEA. Cl. VII. Isbăşescu Georgel (E : 2299, 308, 11, 6, 8, 25, 6, 33). Liceul 2 cl. IX. Tuca Marius (6848—50, 62, 4, 8, 79, 81, 8, 927, 31, 45, 6, 9). Cl. XI. Buricescu Buricea (6851, 9, 66, 7—70, 2, 3, 8—81, 3, 5, 63, 88—90, 920, 2, 3, 27—39), Catargiu Virginia (6808, 31, 2, 5, 53, 5, 7, 66, 7, 80, 1, 8, 920, 7, 31, 3, 6, 7, 41, 6, 9, 54), Droaşcă Florin (6841—4, 7—9, 51, 2, 4, 7, 8, 64, 73, 9, 946), *Popescu Lucian* (6796—903, 47—50, 64, 6, 8, 9, 79, 81, 3, 4, 930—3, 6—47, 9—52), Voinescu Dumitru (6927, 9, 31—4, 6, 8, 41, 3, 50, 4). *Absolvent Niculicioiu Gh.* (6795—803, 7—15, 39, 41, 7—50, 2, 3, 9, 60—2, 4—9, 76—89, 4).

ROMAN. *Liceu* cl. X. *Bercovici Nelu* (6700, 3, 8, 21, 31, E : 2414, 50—65, 95—803, 11—5, 24, 57), Păduraru Ioan (6796, 7, 802, 3, 47—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 7—9, 81, 4), Rădulescu Mihaela (6847—9, 55, 62, 4, 6, 7, 9—81, 927, 31, 46, 7002), *Rugină Andrei* (6739, 50, 2, 3, 8—61, 8, 65, 80, 3, 56, 8, 90—2, 5—9, 801—3, 5, 8—15, 8, 21, 4, 5, 7—9, 31, 5, 40—4, 7—58, 60—6, 70, 2, 4, 5, 8—81, 93, 900, 15, 9—24, 7—43, 5—7, 9, 50, 2—7, 9, 60, 2—4, 9—73, 5, 80, 3, 6, 7—92, 5—7005, 7, 10, 29, 39, 40, 5), Smit Petru (6887—9, 96, 923, 4, 33, 6, 7, 41, 7, 9, 50, 2, 4), Dolteanu Temistocle (6750—60, 2—4, 80, 2, 3, 6—8, 93—804, 9, 10). Cl. XI. *Căpăţînă Valeriu* (6840, 2—4, 7—60, 2—70, 2—4, 8—89, 5—7, 902, 3, 15, 9, 21—4, 7—57, 9, 60, 2—4, 71—3, 5, 80, 3, 6—92, 5—7005, 7, 14, 21, 4, 39, 40, 5).

ROŞIORII DE VEDE. Liceul 1 cl. IX. Cîmpeanu Gheorghiţă (6764, 802, 13, 40, 7, 9, 62, 4, 5, 7, 84, 8). Cl. X. *Călin Ion* (6795—7, 801—3, 13, 7, 30, 40, 1, 7—53, 62, 4, 6, 8—70, 9—81, 927, 8, 30—8, 41, 2, 5, 6, 54, 7). Cl. XI. Săndulescu Ion (6750—3, 5—61, 3—5, 91, 5—7, 801—3, 11—5, 8, 9, 21, 3, 4, 9), Stanciu Gheorghe (6795—7, 801, 17, 29, 43, 7—50, 2, 4, 9, 62—70, 80, 1, 3, 4, 7, 8, 95, 6). Liceul 2 cl. IX. Popescu Theodor (6802, 11, 3, 50, 1, 2, 63—70, 8, 9, 81, 3—5, 927, 8, 33, 52). Cl. X. Buzea Dobra (6750—3, 5—8, 60, 3, 4, 96, 7, 9, 801, 3, 11, 7, 9, 33, 41—3, 50, 2, 4, 62, 7—7081, 96), Nicolae Maria (6796, 7, 9, 817, 43, 7, 8, 50, 62, 4, 7—81, 927, 33, 46, 9, 50, 4), Popescu Liliana (6847—9, 62, 4, 9, 80, 929, 31—3, 6, 8, 42, 5, 6, 9), Radu Gh. (6842—6, 65, 8, 84, 927, 8, 32, 50).

ROZNOV (Bacău). Liceu cl. IX. Simion Violeta (6847, 8, 62, 4, 7, 79, 84, 8, 927, 31, 2, 4, 8). Cl. XI. Istrate Maria (6848, 9, 62, 4, 927, 30—4, 8, 46, 50, 4).

RUDINA (Oltenia). *Absolvent* Giurgiuc Costel (6840, 6—57, 9—70, 6—84).

SĂRMAŞ (Mureş). Liceu cl. X. Moldovan Vasile (6711, 5, 6, 20, 2, 4, 6, 35, 8, 48, 50—2, 5, 7, 61, 3, 82, 6, 7), Sărac Ignat (6710—2, 4—6, 20, 2, 4, 6, 7, 32, 6, 8).

SATU MARE. Liceul 1 cl. VIII. Creşmeac Livia (E : 2293—6, 301, 7—9). Cl. IX. Battyan Alex. (6815, 27—9, 31—4, 8, 45—7), Ciornău Ioan (6750, 7, 8, 61, 88, 91, 7, 802, 11, 3, 47—52, 6, 62—70, 81, 1, 3, 4, 7, 8, 927, 8, 38), Noje Georgeta (6847, 50, 67, 84, 927, 30—3, 49, 55, 7003), Oprea Viorica (6802, 40, 7—50, 5, 62, 5, 7, 8, 70, 81), Sichet Margareta (6815, 27—9, 31—5, 8, 45, 6, 9, 52, 7). Cl. X. Foriş Ecaterina (6847—9, 52, 3, 63, 4, 6, 7, 9, 80, 901, 28, 30, 7), Man Gheorghe (6782, 7, 94—9, 801—3, 8, 11—3, 22, 4, 7, 8, 34, 4, 7—52, 4, 9, 62, 5, 79), Marka Gabril (6796, 7, 802, 3, 47—9, 51, 3, 9, 62, 4, 81, 4, (916), Moldovan Mariana (6715—7, 9, 801—3, 8, 11, 8, 22, 4, 5, 7, 8), Taloş Gheorghe (6710, 1,5, 20, 2, 6, 52, 5—7, 63, 4), Timoc Dorel (6750—3, 5—8, 60, 1, 3, 4, 76, 93, 7—9, 802, 3, 22, 4, 41, 7—9, 51, 2, 4, 64, 7, 81), Vakar Francisc (6847—9, 52, 3, 63, 4, 6, 7, 9, 80).

SEBIS (Crişana). Liceu cl. IX. Bilek Ladislau (6847—9, 62, 4, 9, 70, 9, 81, 932, 46), Bartiş Terentie (6795, 601, 2, 11, 47—52, 6, 62, 4, 6—70, 9, 80, 8, 9, 930, 2, 5, 6, 45, 6, 9, 54), Floruţiu Marius (6847—9, 62, 4, 5, 7—70, 9, 81, 931, 2, 4), Pantazi Nicolae (6750, 2, 7—61, 5, 95, 6, 9, 802, 3, 24, 47, 9, 51, 62, 4, 70, 8, 9, 81, 4, 7—9). Cl. X. Palicia Victor (6670—7, 80—2, 5, 6, 92, 3, 78, 710, 1, 5, 6, 20, 1, 2, 32, 5, 8, 51, 5—9).

SIBIU. *Ş. g. 1* cl. VI. Stingescu Petre (EI : 2294—6, 301, 2, 7, 8, 11, 3, 4, 24,). *Ş. g. 4* cl. VII. Laschescu Dorin (E : 2266—71, 6, 80). Cl. VIII. Tudor Horiana (E : 2293—6, 9, 301, 2, 4, 5, 7, 8 ; 6916). *Ş. g. 5* cl. VII. Niţu Oleg (E : 2323, 4, 6, 7, 36—40). *Ş. g. 9* cl. VI Mitrea Ioan (E : 2293—6, 300—2, 3, 8, 11). *Ş. g. 15* cl. VIII. Bucur Ioan (E : 2296, 9, 301, 2, 7, 8, 10 ; 6879). *Liceul 1* cl. IX. Buzoianu Mareş (6847—52, 62—70, 8—81, 937—33, 5, 6, 8, 41, 50, 2), Mitran Nicolae (6750, 8, 9, 83, 802, 41, 7—50, 62, 4—72, 81, 38, 927, 8, 31—4, 8). Cl. X. Albescu Ion (6840, 7—54, 62—7, 70, 8—81, 4, 927, 9, 31, 4, 50, 7—9, 67) Avram Ruxandra (6750—2, 5, 7, 61, 847—50, 2, 70, 9, 81), Buzoianu Rodica (6752, 5, 7, 61, 3, 96, 47, 8, 62—4, 81, 3), Cuşnir Doru (6797, 9, 802, 47, 8, 50—2, 62, 7, 9, 81 8, 46, 9, 50, 4), Rusnac Doina (6751, 2, 9, 61, 3, 99, 802, 11, 47, 9, 62, 4, 9 70, 9, 81, 4), Cl. XI. *Meţiu Nicolae* (6847—52, 9, 62, 4—7, 9, 70, 5, 6, 8, 9, 81, 4, 6, ,8, 927, 30 4, 6—40, 3, 6, 9, 50, 1, 7033, 47). Liceul 2 cl. IX. *Fulea Mihai* (6750, 2, 5, 7—61, 3—5, 8, 82, 6, 7, 94—6, 8, 9, 801, 2, 11, 8, 41, 7—51, 5, 62, 5, 4, 9—72, 81, 4). Cl. X. Enşel Horia (6795—7, 9, 801—3, 42, 4, 7—52, 4, 9, 62—70, 81, 3, 927, 30—4, 50). Oprean Constantin (6752, 3, 5—61, 3, 4, 82, 6, 87, 8, 91, 3, 4, 6, 7, 47, 8, 62, 4, 8, 9, 80, 1, 3), Trif Nicolae (6798, 9, 801, 3, 11—3, 7, 9, 21, 4, 9, 47—50, 2). XI. Bunea Mircea (6847—52, 4, 9, 62, 4—7, 70, 6, 81, 6, 8, 931, 8, 50, 1), *Fulea Ilie* (6799, 808, 12, 3, 5, 6, 9, 21, 5, 7, 31, 5, 9, 841, 7—50, 2, 4, 7, 60,—2, 4, 5, 7—9, 75—7, 81, 4, 8, 927, 31, 4, 50, 1), *Meţiu Nicolae* (6667, 72, 6, 8, 80, 92, 5, 7, 8, 700, 3, 6, 7), *Nicoară Ioan* (6797, 829, 46—52, 4, 5, 7, 9, 61, 2, 4, 5, 75, 9, 81, 6, 8, 920—2, 5, 7, 9, 30—4, 8, 44, 6, 50—4, 75). Liceul 3 cl. IX. Blăjan Petru (6751, 4, 86, 90, 4, 7, 812, 21, 21, 43, 7—50, 2, 9, 62, 4—7, 9, 80, 1, 3, 4. 8), Nicolae Traian (6848—50, 62, 4—6, 8, 9, 79—81, 930—4, 41, 2, 6, 963). Cl. X. *Zăgan Dumitru* (6756—8, 61, 3—5, 8, 80, 2, 4, 6, 8—90, 3—7, 9, 801, 2, 8, 11, 3, 6, 7, 21, 4, 5, 35, 8, 9, 47—50, 2, 4, 9, 81, 4, 99, 902). Cl. XI. *Bucur Liliana* (6808, 40—50, 2, 9, 61—4, 70, 2, 5—7, 80, 3, 4, 8, 96, 901, 5, 15, 28—32, 4, 8, 9, 50, 1, 4, 7, 63, 71, 3, 5, 98, 9, 7003, 10, 4, 5, 7, 22, 4, 44, 5, 7), *Geleriu Dan* (6687, 723, 5, 38, 9, 46, 9—64, 6—8, 70, 6, 7, 80, 2—4, 9—92), Laşiţă Ileana (6872—90, 803, 8, 10—9, 21, 3—9, 31, 5, 6, 8, 9, 40—82, 4, 6,—90, 3, 5, 6—8, 902, 5—9, 10, 4—6, 9—25, 7—45, 7—59, 63, 4, 8, 9, 7002—6, 16, 7, 21, 4, 33, 44—7, P), *Magda Radu* (6850, 3, 4, 7, 53, 7, 8, 64, 8, 70, 3, 4, 76, 83, 4, 7—9, 93, 7, 902, 20, 3, 7, 9, 31, 3—5, 8, 43, 6, 50, 4, 7, 8 8, 95, 7003), *Popescu Adriana* (6796, 801, 12, 5, 7, 8, 22, 35, 6, 40, 53, 6, 60, 6, 70, 7, 83, 5, 7, 929—32, 4, 8, 9, 41, 3—5, 9—52, 60), Pricop Sorin (6795—7, 801—3, 47, 9—54, 64—70, 9, 81, 3, 928, 30, 6, 8, 41, 2, 56, 9, 54, 7). *Absolvent Dăncilă Ioan* (6815, 26, 41, 4, 6, 53, 4, 7—81, 3, 4, 6, 8, 9, 90, 2, 3, 5—9, 902, 5, 7, 9, 11, 2, 4—6, 9—25, 7, 8, 62—4, 70—2, 5, 8, 9, 83, 6, 7000, 2, 4—9, 13, 6—8, 21, 2, 4—8, 30, 1, 5—40, 3—7).

SIGHIŞOARA. *Liceul 2* cl. VIII. Moraru Cristian (E : 2293—302, 13—8).

SÎMBATA (Crişana). *Absolvent* Moga Mihai (6796, 7, 9, 800—3, 10, 5, 6, 41—3, 57, 9, 61, 72, 3, 6, 96, 914, 24, 5, 36—9, 41, 50, 5, 9, 82).

SIMERIA. *Liceu* cl. IX. Wichman Cris (6795, 802 11, 5, 47—50, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 9, 81, 927—33, 42, 6, 9, 57, 9).

SINNICOLAUL MARE. *Ş. g.* cl. VIII. Voichiţă Doina (E : 2294—7, 9, 301, 2, 8, 11). Cl. XI. Raica Gheorghe (6752, 4—7, 62, 3, 88, 96, 8, 8003, 17, 47—9, 52—4, 9—64, 8—70, 7 9, 80, 4, 6).

SLATINA. *Liceul 2* cl. IX. Stănescu Ştefan (6795, 6, 8, 802, 3, 11, 3, 5, 41, 7—53, 5, 6, 62—70, 80—3, 9, 90, 40). Cl. XI. Cioacă Ilon (6797, 9, 804, 6, 9, 15, 7, 35, 41, 7, 50, 2, 5, 9, 64, 7, 9, 81, 8, 916, 20, 31, 2, 40, 1, 6, 8, 50, 63), Efodie Mircea (6797 , 8, 802, 3, 31, 52, 4, 62, 5, 7, 9, 70, 80, 1, 4, 30—2, 46, 50).

SLĂNIC PRAHOVA. *Liceu* cl. X. Moraru Gh. (6796, 7, 803, 13, 5, 24, 42, 3, 7—50, 2—4, 9, 62, 9, 73, 8, 81, 3, 5, 8, 927, 8, 30, 4, 46, 50).

STĂNEŞTI-GORJ. *Absolvent* David Ioan (6752, 4, 6—8, 60—2, 91—3, 808, 13, 9, 24, 41, 2, 5, 6, 8—52, 9—61, 7—70, 9, 86)..

STĂNILEŞTI (Iaşi). Chiriţoiu Neculai (6797—801, 47, 8, 54, 7, 9, 61, 2, 4—6, 9—81, 8, 927, 31, 4, 6, 50, 1, 4).

STOENEŞTI (Bucureşti). *Ş. g.* cl. VII. Năchilă Petre (E : 2308, 11, 23, 5, 6, 8, 33, 6, 7, 9).

SUCEVA. *Liceul 1* cl. IX. Filipescu Gh. (6795, 802, 11, 5, 47, 52, 5, 6, 62, 4, 70, 81, 4, 8, 921, 7, 8, 30, 6, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 5, 7, 8, 63, 96), Olaru Radu (6851, 63, 72, 84, 8, 91, 921, 7, 8, 30, 1—6, 8, 42, 6). Cl. XI. Borşan Ion (6927, 8, 30—3, 41, 3, 4, 6, 9—51, 4, 96, 7003, 6). *Liceul 2* cl. IX. Tabarcea Petru (6750—2, 5—7. 9—61, 3, 4, 76, 8, 80, 2, 3, 6—8, 91, 5—7, 802, 3, 12, 3, 21, 35, 40, 7, 51).

SUSENII BÎRGĂULUI (Cluj). *Ş. g.* cl. VIII. Vrincanu Florica (E : 2293—5, 9, 302, 7, 8, 24—7).

ŞIMLEUL SILVANIEI. *Liceu* cl. X. Atodiroaiei Mihai (6750—2, 5—8, 61, 3, 88, 97, 9, 864, 81).

ŞOMCUŢA MARE. *Absolvent David Vasile* (6797—803, 13, 4, 7, 39—42, 7—54, 61, 2, 4—9, 75, 8—81, 3—90, 927, 9—34, 43—7, 9—51, 61).

ŞTEFĂNEŞTI (Argeş). *Ş. g.* lcl. VII. Popescu Cristian (EI : 2293, 7, 9, 300, 2, 7—13, 25). Cl. VIII. Picol Gh. (E : 2293—9, 301—3, 5). *Liceu* cl. X. *Baltă Mihai* (6795, 6, 8,8 01—3, 8, 11, 3, 7, 21, 4, 32, 5, 41—3, 57, 73, 85, 7, 96, 920—4, 7—39, 41—3, 5—7, 52—7, 95—7, 7000, 3—5).

TECUCI. *Ş. g. 3* cl. VIII. Nicoară Liliala (E : 2294—6, 9, 301, 2, 7, 25, 6, 43). *Liceul 1* cl. IX. Miron Alexandru (6870, 84, 7, 927, 8, 30—3, 8, 45, 6, 88, 95, 7001—4), Turcu Anghel (6870, 83, 4, 8, 927, 30—4, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 52), Cl. X. Orpoiu Janeta (6751, 2, 5, 7, 9, 61, 3, 83, 6, 7, 91, 3, 9), Seuleanu Silvia (6796, 7, 847—50, 2, 4, 62, 4, 7, 81, 3, 923, 7, 31, 2, 4, 50, 46, 79). *Liceul 2* cl. VIII. Lazea Alin (E : 2293—6, 9, 300—2, 11, 8).

TIMIŞOARA. *Ş. g. 4* cl. VIII. Peter Cornel (E : 2293—6, 9—303, 12—6, 8, 9, 20). *Liceul 1* cl. VI. Dolga Marcela (E : 2293—6, 9—302, 11—5). Cl. X. Căpăţînă Felicia (6797, 9, 812, 28, 47—50, 2—4, 7—9, 62—5, 7—9, 79—81, 927, 8, 30—4, 41, 50, 4). Cl. XI. Mihai-, lovici Titus (6847—50, 2, 7, 9, 64, 5, 7, 9, 81, 8, 96), Teleagă Petru (6841, 35, 71, 8, 927——39, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2—7, 90, 7000—5), Viscrean Virginia (6847—50, 2, 62, 4, 7—9, 79, 931). *Liceul 2* cl. VIII. Crişincov Gabriela (E : 2290 1, 4, 6, 9, 301, 2, 20, 1). Cl. IX. Petri Roland (6750, 877, 811, 47—50, 60, 4—70, 8—80, 3, 4, 8). Cl. XI Zgureanu Viorel (6847—50, 2, 62, 4—9, 79—81, 3, 4). *Liceul 7* cl. XI. Rothenstein Ana (6847—50, 2, 9, 64, 5, 8—70, 81, 4, 927—9, 31, 2, 4, 8—41, 3, 7, 50, 4). *Liceul 9* cl. VI. Dobre Rodica (E : 2293—6, 9, 301, 2, 7, 8).

TÎRGOVIŞTE. *Liceul 2* cl. X. *Enache Gheorghe* (6799, 808, 9, 11, 2, 9, 23, 5, 7—9, 35, 8, 40, 2—4, 7, 8, 50, 3—5, 7, 9, 62, 4, 5, 7, 70, 2—4, 83—5, 7—90, 909). Mihălcescu Maria (6872, 4, 88, 90, 920 ,6, 41—3, 5, 6, 9, 52, 7), *Ptrau Constantin* (6801, 42, 7, 51—3, 65—9, 79—82, 923, 7—33, 5—8, 40—2, 5—7, 52—4). Cl. XI 40—7, 9—52, 7002—5) *Bratu Constantin* (67802, 6, 8, 90, 5—803, 11—3, 24, 9, 31, 9—41, 6—9, 52, 4, 62—5, 7, 9, 79, 81), *Vartan Florin* (6840, 1, 57, 70—2, 80, 2, 8, 90, 3, 6, 902, 20, 2, 3, 7—38, 40—3, 5—50, 2—4, 9). *Liceul 3* cl. IX. Niculescu Ştefan (6795, 8, 802, 38, 40, 1, 7—56, 62—70, 8—81, 931, 86). Cl. X. *Stanciu Virgil* (6842, 57, 8, 60, 2—70, 8—85, 7—90, 902, 16, 9, 21—4, 7—38, 41—3). *Absolvent Atanasiu Adrian* (6795—7, 9—80, 24, 5, 7, 9, e31, 5, 8, 40, 2, 3, 6—57, 61—6, 8—70, 2 | 6, 8—81, 3, 4, 6—9, 912, 5).

TÎRGU CĂRBUNEŞTI. Cătănescu Florin (6927, 33, 5, 6, 8, 43—52, 4—7, 75, 86).

TÎRGU JIU. *Ş. g. 3* cl. VIII. Comănescu Maria (E : 2293—6, 300—2, 5, 7, 8, 11, 8, 9, 21, 47, 50, 62, 4, 79, 81, 324, 8; 6927, 31, 2, 4), Dănău Pepile (E : 2293—6, 301, 2, 7, 864, 79—81). *Liceul 1* cl. IX. Mălăieş Ilie (6847—9, 56, 62—6, 8—70, 8—81, 3, 4, 927, 8, 30—4, 45, 69). Cl. X. Bratu Traian (6819—21, 31, 5, 47—52, 9, 62, 4, 79), Haranaciu Vasile (6927—34, 41, 6, 9, 50, 4, 7). Cl. XI. Baron Ion (6814, 7, 48, 9, 52—4, 9, 60, 4—70, 9, 81, 3, 8, 912, 6, 21, 7, 9—35, 54, 7), *Bîrsan Nicolae* (6808, 23, 51, 70—3, 5, 6, 82, 3, 5, 7, 92, 3, 8, 920—5, 7—57, 63—5, 71, 3—5), Buşe Florin (6750, 3, 8, 95, 801, 2, 24, 43, 7—50, 4, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 81, 4, 8, 95—7, 31, 4, 8, 49, 50). *Curcanu George* (6798, 826, 41, 7—52, 4, 8, 9, 62—71, 8—81, 4, 7, 8, 93, 5, 6, 909, 20, 7—31, 3, 4, 6—46, 52—5, 80), Giorgi Vasile (862, 81, 927, 8, 30—3, 8, 41, 6, 50, 4), *Purcaru Ion* (6795, 7—800, 2, 3, 8, 11, 2, 5,

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

31, 6, 9, 50, 1, 5—52, 4, 5, 9—66, 8, 9, 76, 7, 9—81, 8, 96; 6902, 27, 9—34, 8—44, 6). *Liceul 2* cl. IX. Cosma Dumitru (6750—8, 60, 1, 4, 87, 91).

TÎRGU LĂPUȘ. Cl. IX. Bozga Liviu (6847—50, 62, 4—6, 70, 2, 9, 80, 1, 4, 8). Cl. X. Ianos Vasile (6801—3, 12, 27, 9, 31, 5, 47—50, 2, 4, 62, 4—6, 8, 73, 9, 80, 1, 927, 9, 31, 49, 50, 4), Mureșan Roman (6784, 7, 91, 7, 8, 802, 11, 3, 24, 7, 9, 40, 2, 7, 54, 9, 62, 70, 2—4, 8—81, 4), Podea Nicolae (6851, 2, 4, 9, 62, 5, 7, 9—82, 4, 8). Cl. IX. Kerekes Iosif (6847—50, 4, 9, 62—9, 73, 83—5, 8, 902, 16, 27, 9—33, 46, 9, 50, 3, 7).

TÎRGU MUREȘ. *Liceul 1* cl. VIII. Vamoș Vasile (E : 2281—3, 6—8, 92—4, 6, 9, 301, 847, 63, 80). Liceul 4 cl. X. Doboș Alexandru 6752, 99, 801—3, 48, 52, 4, 9, 64, 79, 81), Pasat Mihaela (6847—50, 2—4, 62—70, 8, 9, 89). *Student* Elekes Istvan (6795, 7—9, 801, 2, 13, 8, 24, 9, 38, 40, 2, 7—50, 2, 5, 60—2, 4, 5, 7, 9, 12, 3, 6, 9, 81, 4, 9, 8, 95, 6, 927, 41, 3, 4, 9—51).

TÎRGU NEAMȚ . *Liceu* cl. IX. Aglaie Ion (6796, 7, 802, 3, 24, 40, 2, 7—53, 9, 62 4—70, 81, 3, 4, 7, 8).

TITU. *Ș. g.* cl. VIII. Sandu Dumitru (E : 2324—8, 30, 3, 6—40).

TRUȘEȘTI. Liceu cl. IX. Andriescu **Mihai** (6802, 13, 81, 47—52, 64—70, 9, 81, 3, 4, 928, 9, 31—4, 8, 46), Breșug Teodor (6724, 50, 7, 8, 88, 811, 3, 47—9, 64, 5, 81, 3, 4,), Corduneanu Dumitru (6812, 24, 7, 40—3, 51, 3, 5, 6, 62, 6, 8· ·72, 80, 8, 90, 909, 16, 9, 20, 1, 7—9, 31—4, 8), Hoidrog Didona (6802, 13, 48—50, 3, 62, 4, 5, 7—9, 81, 3, 4, 8, 27—34, 46, 52, 7). Cl. X. Aionesei Ion (6811—9, 21, 3—5, 9, 31, 5, 40—4, 7—55, 7, 9, 62), Cărăiuc Dumitru (6750—3, 5, 7, 8, 60—5, 7, 71, 3, 6, 8, 80, 7, 8, 91, 4). Cl. XI. Racu Ion (6847—9, 51—4, 9, 62,—70, 80—3, 8). *Absolvent Turculeț Demostene* (6750—65, 80, 2, 5, 8, 90, 2, 5, 7, 9, 801, 2, 8, 9, 11, 3, 7, 9, 21, 7, 5, 7—9, 31, 5, 6, 9, 41, 2, 6, 54, 7, 9, 65, 7—70, 3, 5, 6, 8, 9, 81, 4, 6, 8, 90, 5, 8, 9, 902, 19, 22, 4, 5, 7, 9—57, 63).

TUDOR VLADIMIRESCU (Galați). *Liceu* cl. XI. Borșan Ion (6800, 41, 6—50, 2, 4, 9, 62—4, 79, 81, 4, 8, 9[illegible]).

TULCEA. *Liceul 1* cl. VI. Stoina Maria (E : 2281, 2, 91, 3—7, 83). Cl. XIII. Filipov Victor (E : 2293, 4, 6, 301, 2, 3, 6, 25—8). Cl. XI. Conțescu Cristian (6841, 2, 7—50, 2—4, 62, 4—9).

TURNU MĂGURELE. *Absolvent* Botea Titu (6796, 7, 800, 2, 5, 8, 21, 4, 7, 31, 6, 40—2, 6—55, 9—62, 4—6), 78, 9, 86, 8, 902, 7, 31, 8, 44—6, 9—52, 5, 7, 9).

TURDA. *Liceul 1* lcl. X. Bogdan Mircea (6798, 9, 801, 17, 29, 33, 42, 3, 9, 52, 3, 5, 7, 9, 62—9, 79—81, 9, 96, 902, 27, 9, 50, 4), Chirilă Radu (6720, 2, 6, 35, 48, 50—2, 5—7, 63, 4, 90, 7, 802, 29), Russu Epaminonda (6847, 54, 62—70, 4, 9—81, 4, 5, 7—9, 902, 7, 30, 4, 6, 7, 41, 2, 6, 9), Toma Mircea (6751, 2, 5—7, 9, 63, 4, 87, 97, 801, 3). Cl. XI. Ionuț Ana (6799, 801—3, 9, 47, 9, 50, 4, 9, 62—7, 9, 70, 9—81, 4, 5, 96, 927, 8, 31—3, 49, 50). *Absolvent.* Pop Gheorghe (6840—3, 6—56, 9—65, 7—81, 3—6, 8, [illegible]. 4, 6). *Liceul 2* lcl. X. Dobre Iosefina (6797, 824, 47, —9, 62, 4, 5, 9, 76, 9, 81, 3, 4, 6, 8, 909, 27, 9, 31—3, 50, 80).

TURNU SEVERIN. *Ș. g. 1* cl. VIII. Crăiheanu F. (E : 2201, 2, 6, 13—7, 20, 32), Cruceru Pompiliu (E : 2307, 8, 12, 24—7, 33), Stocker Elena (E : 2293, 303, 5—8, 10, 2—4, 9). *Liceul 1* cl. VI. Popescu Mihaela (E : 2293—6, 307—9, 11, 23—6). Cl. IX. Axinescu Silviu (6847—52, 62—70, 81, 3, 4, 8, 927, 30, 3, 8, 46, 9, 50, 4, 8, 95, 7, 7002, 3), Guihat Rodica (6847—9, 62. 4, 5, 927, 31, 4, 8, 42, 6, 9, 52, 7003), *Popescu Marcel* (6710, 1, 4—6, 20, 2—4, 50—64, 95—9, 801—3, 10, 1, 3, 5—9), Popescu Silvia (6757, 8, 64, 97, 802, 24, 47—9, 51, 64, 5, 79—81, 3, 8, 931, 2, 6, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 4, 7). Cl. X. Anghelescu Rodica (6795, 801, 3, 48, 9, 53, 9, 62, 4, 7—70, 9, 80), Pană Nicolae (6752, 5—7, 60, 1, 3, 97, 9, 802, 3, 64, 79, 81), Sitaru Grigore (6797—9, 801, 2, 17, 31, 41, 69, 96, 939, 45, 9, 63), Stăiculescu Maria (6797, 9, 847, 8, 62, 7, 70, 9, 946, 50, 4), Stoica Maria (6670, 1, 3, 5—7, 9, 80, 715, 6, 20, 2, 3, 8), Vișan Ion (6670—8, 97, 8, 710, 1, 5, 6, 20—2, 4, 533, 5, 6, 50, 6—8, 82). *Absolvent* Vulpescu Dan (6927, 9, 30—4, 46, 9, 50—2). *Liceul 2* cl. X. Coravu Florin (6795—9, 801, 3, 8, 11, 3, 96, 906, 16, 20, 3, 7, 9, 1,3 5, 7, 8, 40, 3, 5—7, 9, 52, 4, 7).

ERATĂ.

— Problema 7141 în loc de b^3 trebuie scris a^3.
— La problema 7143 în loc de exponentul n+2 trebuie scris a+2.
— La problema 7144 se va scoate termenul a^2.
— La problema E : 2377 rîndul 2 se va scrie
$[1010010_2—100_4]\cdot 20_5—101_2\,[131_5—133_4]—609_{10} = 1$.
— La problema 7136 în loc de 25 trebuie scris 15.
— La problema 7150 după ultimul egal se va adăoga 13.

1966 FEB 4

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții probleme. Problemele propuse dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut anunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie școala, clasa și localitatea revolvitorului. Problemele propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați în rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— *Rezolvitorii de probleme din G.M.-B care în anul 1965 au întrunit peste 150 probleme rezolvate și anunțate la rubrica rezolvitorilor în primele 11 numere apărute, pot trimite redacției, pînă la 15.XII.1965, o fișe arătînd care sînt aceste probleme, pentru a face controlul la întocmirea listei elevilor care vor fi premiați pe anul 1965.*

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Informația" — c. 3940

INDEX 41601

Lei 2

MAGYAR NÉPKÖZTÁRSASÁG DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II) — decembrie 1965

12

GAZETA MATEMATICĂ
(SERIA B)
Anul XVI (II), nr. 12 — decembrie 1965

SUMARUL

		Pag.
1.	Unele proprietăţi geometrice deduse prin consideraţii de mecanică de *Aurelian Stan*	545
2.	Folosirea semnului Σ în însumarea unor expresii algebrice de *Savu Isai*, Oradea	549
3.	Note matematice de *A. Oppenheim* şi *Dan Voiculescu*	552
4.	Probleme rezolvate (6906, 6980, 6983, 6984, 6986, 6988, 7008, 7009, 7010, E: 2324)	555
5.	Chestiuni de examen (7263—7283)	562
6.	Probleme propuse (7284—7310)	566
7.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 2410—2428)	570
8.	Cărţi noi	573
9.	Olimpiada de matematică 1966 (Programa)	573
10.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	574
11.	Tabla de materii a G. M. pe anul 1965	588

ANUL XVI, 12 DECEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Dincă N., profesor; *Grosu A.*, profesoară; *Ionescu Bujor C.*, prof. univ. emerit; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor şef adjunct; *Kiss E.*, conf. univ. (Cluj); *Kovacs K.*, conf. univ. (Cluj); *Muşat I.*, profesor; *Ottescu C.*, profesor; *Plăviţu M.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.; *Ţene L.*, profesoară.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică a şcolilor, precum şi orice material informativ se vor trimite pe adresa de mai sus.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA 1883

GAZETA MATEMATICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XVI (II), nr. 12 decembrie 1965

UNELE PROPRIETĂȚI GEOMETRICE DEDUSE PRIN CONSIDERAȚII DE MECANICĂ

AURELIAN STAN, conf. univ. București

Există numeroase metode directe pentru demonstrarea unor proprietăți ale figurilor geometrice. Mai puțin obișnuite sînt însă demonstrațiile acestor proprietăți prin considerații de mecanică.

Mai jos se va arăta cum prin aplicarea unor noțiuni elementare de mecanică cum sînt acelea care se referă la: momentul unei forțe și al unui cuplu de forțe, teorema lui *Varignon* etc., pot fi deduse unele proprietăți clasice de geometrie.

1. — Pentru început să arătăm că:

Unind fiecare vîrf al unui paraleleogram cu un punct O luat în interiorul acestei figuri, suma ariilor triunghiurilor avînd drept bază două laturi opuse este o constantă (fig. 1).

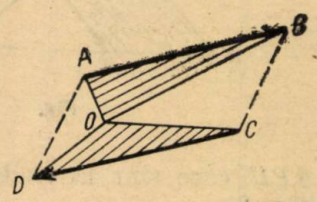


Fig. 1

Reamintim mai întîi că momentul unei forțe în raport cu un punct este numeric egal cu dublul ariei triunghiului format de forță și de punctul în raport cu care se ia momentul. Deasemenea se știe că momentul unui cuplu de forțe, care este suma momentelor forțelor ce compun cuplul, este o constantă, egală cu jumătate din aria paralelogramului format de cele două forțe ce compun cuplul.

Considerăm cuplul de forțe $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Luînd un punct oarecare O în planul forțelor, pe baza celor de mai sus rezultă că suma ariilor triunghiurilor OAB și ODC este egală cu suma momentelor forțelor egale $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ în raport cu punctul O.

Aceleași considerații de mecanică pot conduce imediat și la unele precizări:

— *constanta* de mai sus, este chiar momentul cuplului forțelor, deci jumătate din aria paralelogramului;

— proprietatea este adevărată pentru oricare din laturile opuse, după cum sînt aşezate forţele cuplului pe aceste laturi;

— în cazul în care punctul O se ia în exteriorul paralelogramului, proprietatea enunţată rămîne adevărată cu deosebirea că în loc de suma ariilor, trebuie considerată diferenţa acestora.

2. — Alte aplicaţii interesante de geometrie elementară pot fi deduse folosind teorema lui *Varignon*, referitoare la faptul că momentul rezultantei unor forţe concurente, în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul forţelor componente, în raport cu acelaşi punct.

Această teoremă este adevărată nu numai în cazul forţelor concurente, ci şi în alte cazuri, precum al forţelor paralele şi al forţelor aflate în acelaşi plan, sau care se reduc la o rezultantă unică.

Drept consecinţă a acestei proprietăţi mecanice se poate enunţa de exemplu, următoarea problemă de geometrie elementară.

Dintr-un punct P al diagonalei AC a paraleleogramului $ABCD$, ducînd dreptele EI, GH paralele la laturile paraleleogramului, cele două paraleleograme astfel formate, netăiate de diagonală, sînt echivalente.

Pentru a demonstra este suficient să aplicăm forţelor concurente $\overline{PI} = \overline{F_1}$ şi $\overline{PH} = \overline{F_2}$ precum şi rezultantei lor $\overline{PC} = \overline{R}$ teorema lui *Varignon*. Momentul rezultantei în raport cu punctul P este zero deoarece punctul P se află pe suportul acesteia, iar momentele forţelor $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$ în raport cu punctul P, sînt respectiv dublul ariilor triunghiurilor API şi

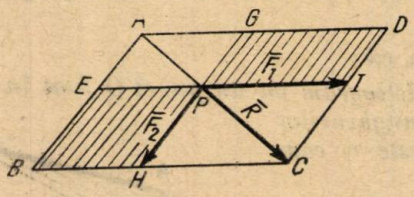


Fig. 2

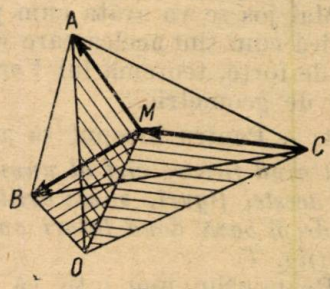


Fig. 3

APH, care sînt la rîndul lor egale cu ariile paralelogramelor haşurate (fig. 2).

3. — O altă aplicaţie este următoarea:

M fiind punctul de întîlnire a medianelor în triunghiul oarecare BAC şi O un punct oarecare în planul triunghiului, suma algebrică a ariilor triunghiurilor MAO şi ABO este egală cu aria triunghiului CMO. Ariile MAO MBO se adună sau se scad, după cum dreapta OM taie latura AB a triunghiului în exterior sau în interior.

Demonstrarea este evidentă ţinînd seamă că M fiind punctul de întîlnire a medianelor în triunghiul ABC, forţa $\overline{CM}$ este rezultanta forţelor $\overline{MA}$ şi $\overline{MB}$.

4. — Să demonstrăm cu ajutorul teoremei lui *Varignon* teoremele lui *Clairaut* şi *Pitagora*.

Reamintim teorema lui *Clairaut*, despre care în G. M. seria B anul VIII mai 1957 pag. 241—249, s-au mai publicat unele aspecte geometrice și trigonometrice.

Fie ABC un triunghi oarecare. Construim pe laturile AB și AC paraleleogramele AA_1B_1B și AA_2C_1C (fig. 4). Notăm cu M punctul de intersecție al laturilor A_1B_1 și A_2C_1. Prelungind segmentul MA dincolo de A, obținem punctul A_3, intersecția lui MA și BC; pe dreapta AA_3, dincolo de A_3, construim pe A_4 astfel ca

$$A_3A_4 = AM$$

precum și paralelogramul BCC_2B_2 cu BB_2 paralelă și egală cu A_3A_4.

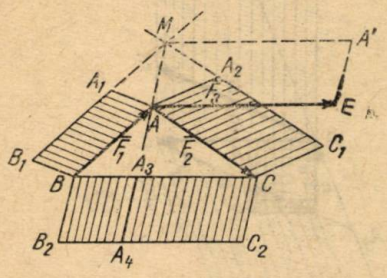


Fig. 4

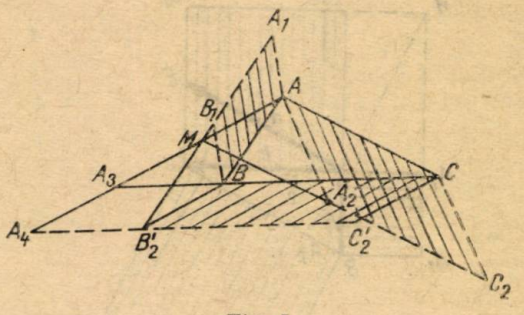


Fig. 5

Teorema lui *Clairaut* constă în aceea că *suma ariilor paralelogramelor arbitrare* AA_1B_1B și AA_2C_1C este egală *cu aria paraleleogramului* BCC_2B_2.

Pentru a demonstra teorema lui *Clairaut*, considerăm forțele $\overline{F_1} = \overline{BA}$ și $\overline{F_2} = \overline{AC}$ precum și rezultanta acestora $\overline{F_3} = \overline{AE}$, concurentă cu $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ și echipolentă cu $\overline{BC}$.

Scriind, conform teoremei lui *Varignon*, că momentul forței F_3 este egal cu suma momentelor forțelor componente F_1 și F_2 în raport cu punctul M, avem

$$\text{aria } ABB_1A_1 + \text{aria } AC\,C_1\,A_2 = \text{aria } AEA'M$$

unde A' este al patrulea vîrf al paralelogramului $AEA'M$.

Dar cum prin construcție $MA = A_3A_4$, rezultă că aria paralelogramului $AEA'M$ este egală cu aria paraleleogramului B_2C_2CB, de unde teorema lui *Clairaut*.

Ținînd seama de sensul forțelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ și deci de sensul momentului acestor forțe, rezultă imediat că teorema lui *Clairaut*, așa cum se află enunțată în diferite culegeri de probleme, rămîne valabilă atît timp cît *paralelogramele se construiesc sau numai în exteriorul, sau numai în interiorul triunghiului* ABC.

Ce se întîmplă însă cînd cele două paralelograme sînt construite *unul în exteriorul*, iar *celălalt în interiorul* triunghiului?

În acest caz (fig. 5), care poate fi ușor recunoscut din faptul că punctul A_3, intersecția dreptelor AM și BC se află în exteriorul segmentului BC, teorema lui *Clairaut* este încă adevărată cu simpla deosebire că în loc de

suma ariilor paralelogramelor construite pe laturile AB, AC trebuie luată diferența acestora.

Pe baza observației de mai sus, dedusă din considerații mecanice, teorema lui *Clairaut* trebuie completată în sensul arătat.

5. — Teorema lui *Pitagora* poate fi deasemenea demonstrată direct folosind teorema lui *Varignon*.

Construim (fig. 6) în exteriorul triunghiului dreptunghic BAC, pătratele AA_1B_1B, AA_2C_1C, BB_2C_2C.

Ducînd din A paralela la ipotenuza BC pînă taie latura CC_1 a pătratului în E, se observă că forța $\overline{AE}$ este rezultanta forțelor $\overline{BA}$, $\overline{AC}$.

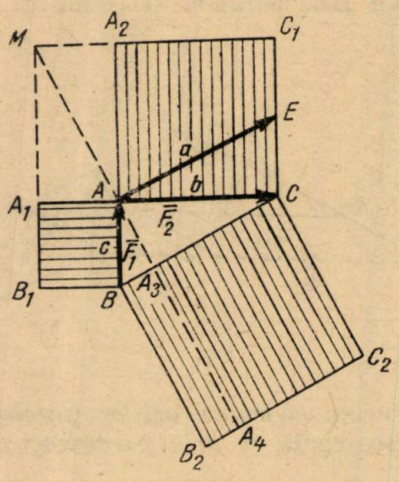


Fig. 6

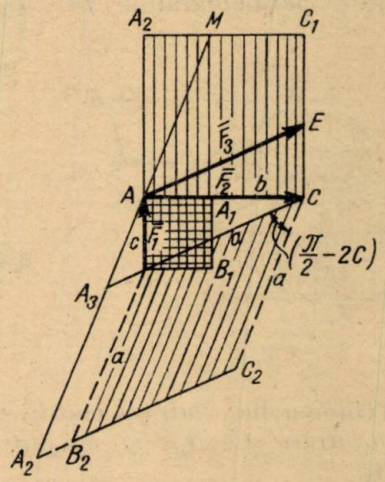


Fig. 7

Teorema lui *Varignon* în raport cu punctul M conduce la relația

$$\text{aria } ABB_1A_1 + \text{aria } ACC_1A_2 = \text{aria } BCC_2B_2$$

deoarece $MA = A_1A_2 = BC = a$ iar prin construcție $A_3A_4 = MA = a$.

6. — Să vedem ce devine teorema lui *Pitagora* în cazul în care se efectuează construcția pătratelor pe catetele triunghiului dreptunghic, unul în exterior și altul în interior (Fig. 7)

Ducînd forța $\overline{F_3} = \overline{AE}$, echipolentă cu $\overline{BC}$, cum $AM = A_2A_1 = A_3A_4$, din aplicarea teoremei lui *Varignon* forțelor $\overline{F_1} = \overline{BA}$, $\overline{F_2} = \overline{AC}$ și $\overline{F_3} = \overline{AE}$ rezultă ținînd seama de sensul momentelor forțelor $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ în raport de punctul M,

$$\text{aria } ACC_1A_2 - \text{aria } ABB_1A_1 = \text{aria } BCC_2B_2$$

adică, *diferența ariei pătratelor* ACC_1A_2, ABB_1A_1 *este egală cu aria rombului* BCC_2B_2.

Cum aria rombului BCC_2B_2 este $a^2\cos 2C$, rezultă o demonstrație geometrică a relației trigonometrice

$$b^2c^2 = a^2\cos 2C$$

relație care există într-un triunghi dreptunghic.

7. — Demonstrarea cu ajutorul unor teoreme de mecanică a anumitor relaţii de geometrie poate conduce la unele rezultate noi, aşa cum s-a arătat mai sus, dar lucru foarte important este că această metodă conduce la interpretarea unor relaţii geometrice.

Un astfel de exemplu este desigur şi interpretarea pe cale mecanică a rezultatelor arătate în *nota matematică* publicată în G. M. seria B, anul XIV dec. 1963 nr. 12 pag. 715—718, care se referă la următoarea problemă:

Dacă notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele de la un punct oarecare la laturile unui triunghi oarecare (punctul fiind în planul triunghiului) una sau alta din expresiile

$$\varepsilon_1 \cdot ad_a + \varepsilon_2 \cdot bd_b + \varepsilon_3 cd_c$$

unde ε_1, ε_2, ε_3 pot fi plus sau minus unu, este constantă (egală cu dublul ariei triunghiului), după cum punctul se află într-una sau alta din regiunile în care laturile triunghiului, prelungite, împart planul.

Demonstraţia este evidentă. Considerăm forţele $\overline{F_1} = \overline{BA}$; $\overline{F_2} = \overline{AC}$; $\overline{F_3} = \overline{CB}$, aşezate pe laturile triunghiului. Forţele avînd acelaşi sens suma momentelor acestora în raport cu un punct O interior triunghiului este chiar aria triunghiului. Cînd punctul O se află în alte regiuni ale planului triunghiului, împărţite de laturi, la scrierea momentelor forţelor trebuie să se ţină seamă de sensul momentelor.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

FOLOSIREA SEMNULUI Σ ÎN SUMAREA UNOR EXPRESII ALGEBRICE

de prof. *SAVU ISAI*, Oradea

De foarte multe ori întîlnim expresii algebrice ce prezintă anumite particularităţi, care ne permit, să le scriem concentrat cu ajutorul simbolului sumei $\sum$ (sigma). De exemplu:

(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{1}^{n} n.$

(b) $ar_a(\cos C - \cos B) + br_b(\cos A - \cos C) + cr_c(\cos B - \cos A) =$
$= \sum ar_a(\cos C - \cos B)$

(c) $x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}a^k + \ldots + a^n =$
$= \sum_{0}^{n} C_n^k x^{n-k}a^k$

Semnul se foloseşte pentru a scrie prescurtat o sumă de termeni care se pot deduce dintr-un termen zis termen general, aşa cum este cazul sumelor (a), (b), (c).

Pentru a înţelege sensul sumei din cazul (b) sînt necesare cîteva noţiuni despre permutări.

Fie a, b, c, d un sistem de patru litere, date într-o ordine determinată. Înlocuirea literei a cu litera b, a literei b cu c, a literei c cu d şi în fine, a literei d cu a se numeşte permutare ciclică sau circulară.

Folosim aceasta pentru a o utiliza în scrierea sumelor. Să considerăm suma :

$$a^2b + b^2c + c^2a,$$

care se scrie prescurtat $\sum a^2b$ sau $\sum b^2c$ sau $\sum c^2a$; dacă am face permutările circulare în cazul literelor a, b, c am obține suma dată indiferent de la care formă am porni. Se poate deci scrie :

$$\text{(I)} \qquad \sum a^2b = \sum b^2c = \sum c^2a.$$

Să aplicăm această relație în calcularea următoarei sume :

$$\Sigma(a+x)(bz-cy) = (a+x)(bz-cy) + (b+y)(cx-az) + (c+z)\cdot$$
$$\cdot(ay-bx) = \sum abz + \sum bxz - \sum acy - \sum cxy = 0$$

pentru că

$$\sum acy = \sum abz, \text{ iar } \sum bxz = \sum cxy.$$

Chiar în această exemplificare am anticipat o altă proprietate a simbolului și anume, aceea de distributivitate. Să exemplificăm această proprietate printr-un exemplu mai simplu :

În cazul literelor a, b, c pe de o parte și x, y, z pe de altă parte,

$$\text{(II)} \qquad \Sigma(a^2b - xy) = a^2b - xy + b^2c - yz + c^2a - zx = a^2b + b^2c +$$
$$+ c^2a - (xy + yz + zx) = \sum a^2b - \sum xy = \Sigma(a^2b - xy).$$

O a treia proprietate este aceea care ne permite să scoatem un factor constant de sub semnul $\sum$ în fața lui.

$$\text{(III)} \qquad \sum kab = kab + kbc + kca = k(ab + bc + ca) = k\sum ab.$$
$$\sum kab = k\sum ab.$$

Să încercăm să exemplificăm cele arătate pînă aici la cîteva transformări algebrice.

a) Pentru a se calcula patratul sumei $\sum_{i=1}^{n} x_i$ vom înmulți această sumă cu ea însăși. La înmulțire vom forma suma a tuturor produselor posibile $x_i\, x_j$, ale fiecărui termen din suma dată cu fiecare termen din aceeași sumă. În $\sum x_i x_j$ sînt conținute pătratele fiecăruia dintre argumentele x_i ; pentru $i = j$ avem $x_i x_j = x^2$.

În sumă există doi termeni egali : produsul lui x_i din deînmulțit cu x_j din înmulțitor și produsul lui x_j din deînmulțit cu x_i din înmulțitor.

Reunind termenii egali obținem identitatea

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum x_i x_j .$$

b) Să demonstrăm identitatea lui *Lagrange* :

$$\Sigma x_i^2 \cdot \Sigma a_j^2 = (\Sigma a_i x_i)^2 + \Sigma \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix}^2 .$$

Produsul $\sum x_i^2 \cdot \sum a_j^2$ este egal cu suma tuturor produselor de forma $x_i^2 a_j^2$ unde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ și $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Expresia $\left(\sum_1^n a_i x_i\right)^2 = \sum a_i^2 x_i^2 + 2\sum x_j x_i a_j a_i$

Cînd se efectuează scăderea în membrul întîi, toți termenii de forma $x_i^2 a_i^2$ se reduc. Regrupînd termenii rămași membrul întîi apare ca o sumă de termeni de forma

$$x_i^2 a_j^2 - 2x_i x_j a_i a_i + a_i^2 a_j^2,$$

care nu este altceva decît pătratul determinantului

$$D = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix}$$

și prin aceasta, identitatea este demonstrată.

Se poate alege identitatea lui *Lagrange* în cazul $i, j = 1, 2, 3$, pentru ca cititorul să poată verifica afirmațiile prin calcul efectiv.

c) Adesea într-un sistem, întrebuințarea simbolului ne indică metoda de rezolvare a unui sistem, dînd indirect unei expresii semnificația unei litere. Așa, în sistemul:

$$\begin{aligned} (x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) &= 24 \\ (x+2) \cdot (y+2) \cdot (z+2) &= 60 \\ (x+3) \cdot (y+3) \cdot (z+3) &= 120 \end{aligned}$$

după ce facem substituțiile $x+2 = u$, $y+2 = v$, $z+2 = w$, sistemul se poate scrie:

$$\begin{aligned} uvw - \sum uv + \sum u - 1 &= 24 \\ uvw &= 60 \\ uvw + \sum uv + \sum u + 1 &= 120 \end{aligned}$$

care ne impune să considerăm ca noi necunoscute pe $\sum u$, $\sum uv$ și uvw pentru care găsim valorile: $\sum u = 12$, $\sum uv = 47$ și $uvw = 60$.

Mai departe, u, v, w pot fi considerate ca rădăcinile ecuației $t^3 - 12t^2 + 47t - 60 = 0$, care sînt 3, 4 și 5.

Pentru a preciza ordinea corespunzătoare pentru u, v și w, trebuie să considerăm toate posibilitățile:

u	3	3	4	4	5	5
v	4	5	3	5	3	4
w	5	4	5	3	4	3

și corespunzător

x	1	1	2	2	3	3
y	2	3	1	3	1	2
z	3	2	3	1	2	1

Este foarte interesant istoricul folosirii semnului Σ, legat de calcularea anumitor sume. Îndemnăm pe cititori să urmărească aceste preocupări în Istoria Matematicii în evul mediu de A. R. Iușkevici, E. Șt. 1963, de unde vor reține metode geometrice pentru calcularea unor sume, precum și numeroase aplicații.

NOTE MATEMATICE

Despre inegalitățile dintre mediile aritmetice și geometrice a două mulțimi de cîte trei numere pozitive

1. Să presupunem că $a_1, \ldots, a_n$ și $c_1, \ldots, c_n$ sînt două mulțimi compuse din cîte n numere pozitive. Media aritmetică a numerelor c_i fiind mai mare sau egală cu cea a numerelor a_i, care sînt condițiile pentru ca între mediile geometrice să existe aceeași inegalitate, egalitate avînd loc atunci cînd numerele a_i (într-o anumită ordine) sînt egale cu numerele c_i?

Un răspuns bine cunoscut ne este dat în cazul cînd fiecare c_i este egal cu media aritmetică a numerelor a_i. Pentru $n = 3$ vom da un răspuns la chestiunea precedentă care include și acest caz important. Pentru a obține acest rezultat este suficient să presupunem că numerele c_i se află între cel mai mic și cel mai mare număr a_i.

Un rezultat de aceeași natură poate fi obținut pentru mediile geometrice. O extindere pentru $n>3$ ar fi foarte interesantă, dar din păcate, generalizarea ce se impune la prima vedere nu este valabilă.

2. Dăm în continuare, rezultatele pe care le-am obținut : în fiecare caz folosim ipoteza (H) că *numerele* c_1, c_2, c_3 *sînt situate în intervalul dintre cel mai mic și cel mai mare din numerele* a_1, a_2, a_3.

I. Fiind date (H) și relația $c_1+c_2+c_3 \geqslant a_1+a_2+a_3$ atunci în mod necesar $c_1c_2c_3 \geqslant a_1a_2a_3$ și $c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2 \geqslant a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă numerele a_i sînt egale cu numerele c_i într-o anumită ordine.

II. Fiind date (H) și $a_1a_2a_3 \geqslant c_1c_2c_3$ atunci în mod necesar

$$a_1 + a_2 + a_3 \geqslant c_1 + c_2 + c_3$$

(și, evident, $a_1^m + a_2^m + a_3^m \geqslant c_1^m + c_2^m + c_3^m$), unde $m > 0$, cu egalitate dacă și numai dacă a_i coincide cu c_i într-o anumită ordine.

III. Fiind date (H) și $a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2 \geqslant c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2$, atunci în mod necesar $a_1+a_2+a_3 \geqslant c_1+c_2+c_3$, cu egalitate dacă și numai dacă numerele a_i sînt egale cu numerele c_i într-o anumită ordine.

O extindere evidentă a lui II rezultă din faptul că reciprocele numerelor a_i și c_i satisfac (H) dacă numerele a_i și c_i satisfac (H).

3. Demonstrația lui I se bazează pe identitatea

$$c_1c_2c_3 - a_1a_2a_3 = c_3(c_1 - a_1)(c_2 - a_1) + a_1(a_3 - c_3)(c_3 - a_2) + \\ + a_1c_3(c_1 + c_2 + c_3 - a_1 - a_2 - a_3). \qquad (1)$$

Fără a pierde din generalitate putem presupune că :

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3; \quad 0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \qquad (2)$$

și atunci (H) ne dă :

$$a_1 \leqslant c_1; \quad c_3 \leqslant a_3. \qquad (3)$$

Se prezintă două cazuri : (1°), $c_3 \geqslant a_2$ și (2°), $a_2 > c_3$. Dacă $c_3 \geqslant a_2$ atunci identitatea (1) împreună cu ipoteza $c_1+c_2+c_3 \geqslant a_1+a_2+a_3$ ne arată mai întîi că $c_1c_2c_3 \geqslant a_1a_2a_3$ și că egalitatea este posibilă numai cînd

$$(c_1 - a_1)(c_2 - a_1) = 0\,; \quad (a_3 - c_3)(c_3 - a_2) = 0\,;$$
$$c_1 + c_2 + c_3 - a_1 - a_2 - a_3 = 0. \tag{4}$$

Cum $c_2 \geqslant c_1$ este suficient să considerăm $c_1 = a_1$ așa încît $c_2 + c_3 = a_2 + a_3$. Dacă $c_3 = a_3$ atunci $c_2 = a_2$, ceea ce ar da $(a_3 - c_3)(c_3 - a_2) \geqslant 0$, contrazicînd pe (4). Astfel, dacă $c_3 \geqslant a_2$ și dacă $c_1+c_2+c_3 \geqslant a_1+a_2+a_3$, atunci $c_1c_2c_3 \geqslant a_1a_2a_3$ cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, $a_3 = c_3$.

Rămîne de considerat cazul $a_2 > c_3$, astfel încît $a_2 > c_3 \geqslant c_2 \geqslant c_1$. Vom arăta că $c_1c_2c_3 > a_1a_2a_3$. Pentru aceasta să schimbăm indicii 1 și 3 între ei în (1) ca să obținem :

$$c_1c_2c_3 - a_1a_2a_3 = c_1(a_3 - c_3)(a_3 - c_2) + a_3(c_1 - a_1)(a_2 - c_1) +$$
$$+ a_3c_1(c_1 + c_2 + c_3 - a_1 - a_2 - a_3). \tag{5}$$

Primul termen din dreapta este strict pozitiv și ceilalți doi nenegativi, așa că $c_1c_2c_3 > a_1a_2a_3$.

Demonstrația primei părți a lui I este astfel completă. Exact la fel poate fi demonstrată propoziția II scriind identitățile (1) și (5) și folosindu-le în mod corespunzător. Propoziția II poate fi dovedită ca o reciprocă a lui I ; analog și III.

Rămîne de demonstrat al doilea punct al propoziției I. Aici e convenabil să notăm că ajunge să demonstrăm pentru cazul $c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Acum, observînd că pentru orice $x > 0$, numerele $x+c_1$, $x+c_2$, $x+c_3$ și $x+a_1$, $x+a_2$, $x+a_3$ satisfac (H) și $\Sigma(x+c_1) \geqslant \Sigma(x+a_1)$, din prima parte a lui I rezultă :

$$(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) \geqslant (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3),$$
$$x(\Sigma c_2c_3 - \Sigma a_2a_3) + (c_1c_2c_3 - a_1a_2a_3) \geqslant 0.$$

Cum x este arbitrar de mare este clar că $\Sigma c_2c_3 - \Sigma a_2a_3 \geqslant 0$.

4. Dăm în continuare unele aplicații ale acestor inegalități.

(1°) În orice triunghi

$$8\cos A\cos B\cos C \leqslant 1$$

Să presupunem triunghiul ascuțitunghi.

Expresiile $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$; $\quad c^2 + a^2 - b^2 = 2ca\cos B$;

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$$

sînt toate trei pozitive, iar numerele a^2, b^2, c^2 sînt situate între cel mai mic și cel mai mare dintre $2bc\cos A$ etc. Ambele mulțimi au aceeași sumă. Deducem din I :

$$a^2b^2c^2 \geqslant (2bc\cos A)(2ca\cos B)(2ab\cos C)$$

adică inegalitatea cerută, egalitate existînd doar în triunghiul echilateral.

(2°) În orice triunghi :

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leqslant abc.$$

Numerele pozitive a, b, c aflîndu-se între cel mai mic și cel mai mare din numerele $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ și ambele triplete de numere avînd aceeași sumă inegalitatea rezultă din I, cu egalitate doar pentru triunghiul echilateral.

(3°) Pentru numerele pozitive x, y, z și numerele pozitive m, n, cu $m + n = 1$ avem :

$$x + y + z \geqslant y^m z^n + z^m x^n + x^m y^n,$$

cu egalitate cînd $x = y = z$.

Numerele $y^m z^n$, $z^m x^n$, $x^m y^n$ se află între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele x, y, z. Ambele triplete de numere au același produs. Rezultatul este o consecință a propoziției II.

A Oppenheim
(traducere din The Mathematical Gazette, London, 1965)

Generalizarea problemei 6327

Dacă ecuația cu coeficienți reali

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

unde $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, admite două rădăcini al căror produs este 1, atunci $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$ (Enunț generalizat).

Soluția. Dacă $n = 2$, atunci avem $a_2 = a_0$ și deci

$$a_0 = a_1 = a_2.$$

Presupunînd problema demonstrată pentru $n - 1$, să trecem la cazul ecuației de gradul n.

Fie x_1 și x_2 rădăcinile reciproce, atunci ecuațiile

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

au pe x_1 și x_2 rădăcini comune.

Înmulțim prima ecuație cu a_n și pe a doua cu a_0; scăzînd găsim :

$$(a_1 a_n - a_{n-1} a_0) x^{n-1} + (a_2 a_n - a_{n-2} a_0) x^{n-2} + \ldots + (a_n^2 - a_0^2) = 0.$$

Și această ecuație admite rădăcinile x_1 și x_2 al căror produs este egal cu unitatea.

Pe de altă parte, avem în cazul cînd $a_0 \neq a_n$:

$$0 < a_1 a_n - a_{n-1} a_0 \leqslant a_2 a_n - a_{n-2} a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n^2 - a_0^2$$

după cum se poate demonstra fără dificultate.

Conform ipotezei făcute avem însă atunci :

$$a_1 a_n - a_{n-1} a_0 = a_2 a_n - a_{n-2} a_0 = \ldots a_n^2 - a_0^2$$

deci $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, supoziția $a_0 \neq a_n$ fiind contrazisă, ceea ce demonstrează, conform principiului inducției complete, propoziția din enunț pentru orice n natural.

Observație.

Dacă o ecuație cu coeficienți reali, admite rădăcina complexă X_1 de modul 1, atunci admite și imaginar conjugata ei $\overline{X_1}$ drept rădăcină și avem :

$X_1 \cdot \overline{X_1} = 1$. Dacă rădăcina de modul unu este reală atunci ea este ± 1 și nu este greu de arătat că ecuația :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

cu $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ admite o asemenea rădăcină doar dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$.

Se vede deci că din propoziția demonstrată aici, rezultatul problemei 6327 de *Gh. Lusztig* se deduce ca un caz particular.

Dan Voiculescu, elev, București

PROBLEME REZOLVATE

Problema 6906

Să se arate că pentru orice număr pozitiv α și pentru orice n numere reale strict pozitive $a_1, \ldots, a_n$ care verifică relația $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, avem inegalitatea (enunț generalizat).

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-\alpha} \geqslant n^{\alpha+1}.$$

Toma Albu și *Tudor Zamfirescu*, București

Soluție dată de *N. Teodorescu*, București..

Fie $\alpha > 0$; vom demonstra că

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{\alpha}} \geqslant n^{\alpha+1}.$$

Ținînd seama de inegalitatea lui Cauchy

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{\alpha}} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}}}.$$

Tot în baza acestei inegalități, $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ și deoarece $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, avem $\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}}} \geqslant n^{\alpha}$. Deci $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{\alpha}} \geqslant n^{\alpha+1}$.

Egalitatea are loc pentru $\frac{1}{a_1} = \ldots = \frac{1}{a_n}$, deci pentru $a_i = \frac{1}{n}$.

Pentru $\alpha = 2^{-k}$, se obține inegalitatea din enunțul inițial.

Problema 6980

Să se arate că x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației : $x^3 + px + q = 0$, avem relațiile :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q \qquad x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = -7p^2q$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2p^2 \qquad x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 = 9p^3q - 3q^3$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5pq \qquad x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} = 11pq(p^3 + q^2)$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de *E. Popa*, elev Iași și *I. Dăncilă*, elev Sibiu. — Avem :

$$x_1^3 + px_1 + q = 0\,;\ x_2^3 + px_2 + q = 0\,;\ x_3^3 + px_3 + a = 0$$

și adunînd membru cu membru și ținînd seamă că $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ avem :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3q = 0\,; \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q.$$

Avem atunci :

$$x_1^4 + px_1^2 + qx_1 = 0\,;\ x_2^4 + px_2^2 + qx_2 = 0\,;\ x_3^4 + px_3^2 + qx_3 = 0$$

și ținînd seamă că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p$ găsim :

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2p^2 = 0\,; \qquad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2p^2.$$

Avem :

$$x_1^5 + px_1^3 + qx_1^2 = 0\,;\ x_2^5 + px_2^3 + qx_2^2 = 0\,;\ x_3^5 + px_3^3 + qx_3^2 = 0$$

și ținînd seamă de relații scrise anterior găsim :

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 3pq - 2pq = 0\,; \qquad x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5pq.$$

Avem :

$$x_1^7 + px_1^5 + qx_1^4 = 0\,;\ x_2^7 + px_2^5 + qx_2^4 = 0\,;\ x_3^7 + px_3^5 + qx_3^4 = 0$$

și adunînd :

$$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 + 5p^2q + 2p^2q = 0\,; \qquad x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = -7p^2q.$$

Avem :

$$x_1^9 + px_1^7 + qx_1^6 = 0\,; \quad x_2^9 + px_2^7 + qx_2^6 = 0\,; \quad x_3^9 + px_3^7 + qx_3^6 = 0$$

şi ţinînd seamă că $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 3q^2 - 2p^3$ găsim :

$$x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 - 7p^3q + 3q^3 - 2p^3q = 0\,; \quad x_1^9 + x_2^9 + x_2^9 = 9p^3q - 3q^3$$

Avem :

$$x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} + p(x_1^9 + x_2^9 + x_3^9) + q(x_1^8 + x_2^8 + x_3^8) = 0$$

şi ţinînd seamă că : $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = -8pq^2 - 20p^4$ avem :

$$x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} + 9p^4q - 3pq^3 - 8pq^3 - 20p^4\,q = 0$$
$$x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} = 11pq(p^3 + q^2).$$

Cu aceasta, toate relaţiile sînt stabilite.

Problema 6983

Considerîndu-se şirul lui Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots$$

să se determine relaţia de recurenţă a şirului

$$1,\ 1,\ 4,\ 9,\ 25,\ 64,\ 169,\ldots$$

format cu patratele termenilor şirului lui Fibonacci.

Constantin Berdan

Soluţie dată de *N. Manolache* elev Bucureşti.

Relaţia de recurenţă a şirului lui Fibonacci este

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}. \tag{1}$$

Ridicînd la patrat obţinem :

$$U_n^2 = U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2 + 2U_{n-1}\cdot U_{n-2} = U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2 + \frac{(U_{n-1}+U_{n-2})^2 - (U_{n-1}-U_{n-2})^2}{2}.$$

Ţinînd seama de (1) se obţine :

$$U_n^2 = U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2 + \frac{U_n^2 - U_{n-3}^2}{2}.$$

Eliminînd numitorul, se obţine relaţia :

$$U_n^2 = 2U_{n-1}^2 + 2U_{n-2}^2 - U_{n-3}^2.$$

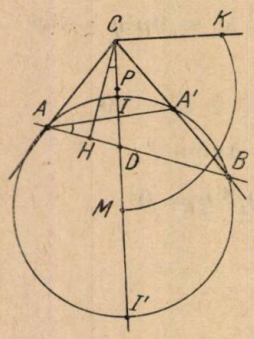
Problema 6984

Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd diferenţa d a laturilor BC, CA, diferenţa ω a unghiurilor A, B şi înălţimea CH.

Gh. Buicliu

Soluție dată de *Radu Magda*, elevă Sibiu.

Presupunem problema rezolvată și fie : D piciorul bisectoarei unghiului C ; I și I' centrele cercurilor înscris triunghiului și exînscris unghiului C ; A' punctul de pe CB așa că $A'B = BC - CA = d$.



Se știe și se arată ușor că

$$\sphericalangle HCD = \frac{A - B}{2};$$

așa că triunghiul dreptunghic CHD se construiește imediat cunoscînd cateta CH și unghiul HCD.

Deoarece

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BD},$$

urmează că A și B se află pe un cerc cu centrul M pe CD și care împarte armonic pe CD în I și I'. Acest cerc întîlnește pe CB în A', simetricul lui A față de CD și așa că

$$BA' = BC - CA' = BC - CA = d.$$

Cum, pe de altă parte $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle DCH = \omega = \text{const.}$, rezultă că cercul $AA'B$ are raza constantă și centrul pe bisectoarea CII'. Cunoscînd pe $A'B$ și pe $\sphericalangle BAA'$ se cunoaște raza ρ a cercului M. Deoarece

$$MI^2 = MI'^2 = MC \cdot MD,$$

rezultă că cercul M este ortogonal oricărui cerc care trece prin C, D și deci și cercului CDH al cărui centru P este mijlocul lui CD. Se poate deci scrie

$$MP^2 = \rho^2 + PC^2,$$

de unde rezultă construcția lui M : se ridică în C perpendiculara $CK = \rho$ pe CD și se rabate CK în PM pe CD. Descriind cercul cu centrul în M și raza ρ se obțin, prin intersecția lui cu HD vîrfurile A și B.

Problema 6986

Găsiți numărul $abcd$ cu cifre două cîte două diferite, astfel încît : $\overline{(ad)}^2 = \overline{acb}$ *și* $\overline{(da)}^2 = \overline{bca}$.

Matematica Sofia, 1963

Soluție dată de *E. Popa*, elev Iași.

Pătratul numărului $\overline{ad}$ are trei cifre și începe tot cu cifra a. Deci $10 \leqslant \overline{ad} \leqslant 14$. Pătratul numărului $\overline{da}$ are tot trei cifre, deci $10 \leqslant \overline{da} \leqslant 31$ și deci $\overline{ad}$ nu poate fi 14. De asemenea $\overline{ad}$ nu poate fi 10, căci $\overline{da}$ ar fi 1, și ar urma că $b = c = 0$, deci numărul nu ar avea toate cifrele dis-

tincte ; $\overline{ad}$ nu poate fi 11, căci $a = d = 1$. $\overline{ad}$ nu poate fi 12, căci $12^2 = 144$ și ar urma ca $c = b = 4$. Dacă $\overline{ad} = 13$, singurul caz rămas, avem : $13^2 = 169$, $31^2 = 961$, deci $c = 6$, $b = 9$ și numărul căutat este 1963, care satisface toate condițiile.

Problema 6988

Să se arate că dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$, *avem* :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție Pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$ avem :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1},$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |1 - \sqrt{x-1}| = 1 - \sqrt{x-1},$$

căci dacă $x \leqslant 2$, $x - 1 \leqslant 1$, $\sqrt{x-1} \leqslant 1$, deci $|1 - \sqrt{x-1}| = 1 - \sqrt{x-1}$.

Avem deci :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2.$$

Observare. Problema a fost dată la cl. IX-a la etapa regională a Olimpiadei 1965. S-au primit multe soluții greșite.

Problema 7008

Se exportă 1500 exemplare dintr-un instrument de tip I și 800 de tipul II. Acest instrument este produs de uzinele A și B. Uzina A produce zilnic 30 exemplare din tipul I sau 20 din tipul II ; B scoate zilnic 50 piese de tipul I sau 40 din tipul II. Cum ar trebui planificată producția în aceste două uzine pentru ca transportul să se facă în minimum de timp ?

Wissenschaft und Fortschritt, R.D.G. Berlin 1964

Soluție dată de *Dăncilă Ioan*, absolvent Sibiu. — Fie x și y timpii în care uzina A, respectiv uzina B produc instrumentele de tip I și z, t timpii în care uzinele A și B produc instrumentele de tipul II. Avem ecuațiile :

$$30x + 50y = 1\,500\,; \quad 20z + 40t = 800 \text{ sau :}$$

$$3x + 5y = 150 \quad ; \quad z + 2t = 40$$

care trebuie rezolvate în numere întregi.

Adunăm ecuațiile prima cu triplul celei de-a doua și avem :

$$3(x + z) + 5(y + t) + t = 270.$$

Cum $x + z = y + t$, din problemă, avem ecuația $8y + 9t = 270$, care rezolvată în numere întregi ne dă perechile de soluții (y, t):

$$(27; 6); (18; 14); (9; 22).$$

Ultima soluție verifică ultima ecuație ($x + 2t = 40$).

Dintre soluțiile (27 ; 6) și (18 ; 14) cea mai convenabilă este cea de-a doua deoarece $18 + 14 < 27 + 6$. În acest caz acceptînd (18 ; 14) ca soluție avem $x = 20$ și $z = 12$.

Iată cum trebuie planificată producția : uzina A să producă 20 de zile instrumentul de tip I și 12 zile instrumentul de tip II, iar uzina B 18 zile instrumentul de tip I și 14 zile cel de tipul II.

Problema 7009

Un comitet internațional este compus din 5 membri. Documentele cu care lucrează acest comitet sînt închise într-o casă de bani. Cîte broaște trebuie să aibă această casă de bani și cîte chei trebuie să aibă acest comitet, sau mai degrabă fiecare din membrii săi, pentru a nu avea acces la documente decît în cazul cînd trei membri din comitet sînt prezenți?

Matematica v școle, Moscova 1964

Soluție și *generalizare.* — Pentru orice grup de 2 membri trebuie să existe un lacăt, a cărui cheie să nu se găsească la niciunul din acești membri, dar să se găsească la toți ceilalți trei membri ai comisiei, pentru ca prezența unuia dintre acești trei membri să facă posibilă deschiderea casei de bani.

Cel mai mic număr de lacăte este egal cu numărul modurilor în care se pot alcătui din cei cinci membri, grupe distincte de cîte doi membri. Numărul lacătelor va fi deci :

$$C_5^2 = 10.$$

Pentru fiecare lacăt sînt necesare trei chei. Va fi necesar un număr de $3.10 = 30$ chei, iar fiecare membru va avea cîte $30 : 5 = 6$ chei.

Observări. — Problema se poate generaliza în cazul cînd numărul membrilor este n și casa s-ar putea deschide doar în prezența a cel puțin m membri.

Numărul lacătelor va fi C_n^{m-1}, iar al cheilor posedate de fiecare membru, $\frac{m}{n} \cdot C_n^{m-1}$.

Pentru a satisface condițiile problemei este necesar ca un grup de $m + 1$ chei distincte să se distribuie la tot atîți membri, lipsa unuia implicînd imposibilitatea de a deschide casa.

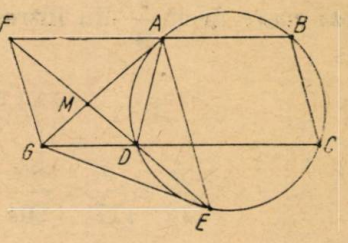
— S-a mai primit soluție bună de la *Dăncilă Ioan*, elev Sibiu.

Problema 7010

AB și CD sînt coarde paralele într-un cerc, AE este o paralelă la BC și E este situat pe cerc. DE întîlnește pe AB în F, iar FG este o paralelă la BC, punctul G fiind pe CD. Dovediți că dreapta AG este tangentă cercului.

Eureka, Cambridge 1963

Soluția I, dată de *C. Niculescu*, elev Tîrgoviște. — Prin însăși construcția figurii, patrulaterul $ADGF$ este un trapez. Aceasta pentru că AB și CD sînt paralele, iar punctele A, F și respectiv G, D se află pe aceste paralele. De asemenea sînt paralele prin construcție și FG și BC. Patrulaterul $BCGF$ este deci un paralelogram. Rezultă :



$$\sphericalangle AFG = \sphericalangle BCD\,;\ \sphericalangle FAD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD.$$

Trapezul $ADGF$ este deci isoscel, prin urmare, inscriptibil :

$$\sphericalangle GAD = \sphericalangle GFD.$$

Cum $\sphericalangle GFD = \sphericalangle DEA = \text{măs}\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ ca alterne interne (paralele : FG și AE), rezultă $\sphericalangle GAD = \text{măs}\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, deci, AG este tangentă la cercul dat.

Soluția II. — Fie M intersecția dreptelor AG și DF. Dacă $MA^2 = MD \cdot ME$, rezultă proprietatea enunțată.

Patrulaterul $AFGD$ este un trapez (AF și GD fiind paralele) isoscel (deoarece $AD = BC = FG$). Rezultă :

$$\frac{MG}{MA} = \frac{GD}{FA}. \tag{1}$$

Din trapezul $AFGE$ rezultă :

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MG}{MF} = \frac{GD}{FA}. \tag{2}$$

Comparînd (1) cu (2) rezultă $MA^2 = MD \cdot ME$.

Problema E : 2324

Pe întinderea de $\dfrac{5}{12}$ *dintr-un lot de teren rezervat pentru culturi experimentale și încă pe* 3 *ha o cooperativă agricolă de producție a însămînțat grîu, pe* $\dfrac{6}{17}$ *din același lot și încă pe* 2 *ha a însămînțat porumb, iar restul, care este cu* $1\dfrac{2}{3}$ *ha mai mare decît* $\dfrac{2}{9}$ *din întregul lot, s-a cultivat cu cartofi. Să se afle care a fost întinderea lotului de teren rezervat pentru culturi experimentale în această cooperativă ?*

D. Mirzan, R. Vîlcea

Soluție dată de *Man Augustin*, elev Cluj.

Presupunem că cele 3+2 ha au fost lăsate la urmă și ar fi fost însămînțate tot cu cartofi; deci suprafața însămînțată cu cartofi ar fi mai mare decît $\frac{2}{9}$ din întregul lot, cu $6\frac{2}{3}$ ha, căci

$$1\frac{2}{3}+3+2=6\frac{2}{3};$$

$$\frac{5}{12}+\frac{6}{17}=\frac{85}{204}+\frac{72}{204}=\frac{157}{204};\quad \frac{204}{204}-\frac{157}{204}=\frac{47}{204}$$

dar fracția $\frac{47}{204}$ este mai mare decît $\frac{2}{9}$ din întregul lot cu $6\frac{2}{3}$ ha deci:

$\frac{47}{204}-\frac{2}{9}=\frac{141}{612}-\frac{136}{612}=\frac{5}{612}$ și $\frac{5}{612}$ reprezintă $6\frac{2}{3}$ ha atunci $\frac{612}{612}$ reprezintă 816 ha.

CHESTIUNI DE EXAMEN *

Subiecte date la lucrări scrise la admiterea în Facultatea de Matematică—Mecanică a Universității București, septembrie 1965

7263. Axele Ox și Oy fiind perpendiculare, se dau: curba (H) $xy=1$ și cercul (C) $x^2+y^2+\lambda(x-a^2y)-a^2-\frac{1}{a^2}=0$, unde a este constant și λ variabil. Să se arate că:

a) (C) trece prin două puncte fixe A și A' simetrice față de origină, situate pe (H).
b) Celelalte două puncte comune cercului (C) și curbei (H) sînt diametral opuse pe (C).

7264. a) Punînd în evidență că $\cos n\alpha$ (n natural) este un polinom în $\cos\alpha$, să se deducă de aici că pentru $x\in[-1,1]$,

$$P_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

este un polinom în x de gradul n, care are coeficientul lui x^n egal cu 2^{n-1}.

b) Să se rezolve ecuația

$$\cos(n\arccos x)=0,\qquad x\in[-1,1]$$

Să se verifice că această ecuație are numai n rădăcini și să se precizeze poziția lor pe axa Ox.

c) Să se determine valorile lui $x\in[-1,1]$ pentru care $P_n(x)$ este maxim sau minim.

d) Să se verifice identitatea:

$$2\cos(n\arccos x)=(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n$$

e) Să se deducă relația:

$$P_{n+1}(x)-2xP_n(x)+P_{n-1}(x)=0$$

f) Să se verifice toate rezultatele obținute pentru $n=6$.

---

* Se primesc soluții pînă la 15. IV. 1966

6265. a) Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x + (m^2 - 1)\sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{m^2+1}{2}$$

m fiind un parametru real.

b) Să se determine soluțiile pentru care $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, oricare ar fi m.

c) Să se arate că singurele soluții ale ecuației date pentru care $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ sînt cele obținute la punctul b).

d) Să se calculeze valoarea fracției:

$$E(x) = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

pentru $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a < 0$, $b < 0$.

În ipotezele $a \geqslant b$, $a < b$.

7266. Becul unei lanterne de buzunar este situat la 1 m depărtare de un perete. Între lanternă și perete se așează o lentilă convergentă cu distanța focală de 9 cm. Becul și axul optic al lentilei sînt la aceeași înălțime. La ce distanță de bec trebuie așezată lentila pentru ca pe perete să se formeze imaginea clară a acestuia?

Pentru ce valori ale distanței dintre bec și perete este posibilă formarea imaginii izvorului luminos pe perete folosind aceeași lentilă?

7267. Un mobil de masă m este lăsat să alunece fără viteză inițială de la marginea superioară a unui plan înclinat care are înălțimea h, unghiul de înclinare α și un coeficient de frecare k. Se cere:

a) Să se găsească expresia vitezei V_B și a energiei cinetice E_c a mobilului, cînd ajunge la baza planului înclinat.

b) Cantitatea de energie consumată prin frecare.

c) Înălțimea H la care ar ajunge mobilul dacă ar fi lansat în sens invers pe planul înclinat cu o viteză inițială egală cu V_B.

d) Să se calculeze H pentru $h = 10$ m, $\alpha = 45°$ și $k = 0{,}25$.

7268. Un microscop este alcătuit dintr-un obiectiv cu distanța focală $f_1 = 5$ mm și dintr-un ocular cu distanța focală $f_2 = 20$ mm. Un obiect se găsește la 5,2 mm de obiectiv. Să se determine:

a) Poziția imaginii dată de obiectiv.

b) Raportul între o dimensiune a acestei imagini și dimensiunea corespunzătoare a obiectului.

c) Distanța dintre obiectiv și ocular pentru ca imaginea dată de ocular să fie virtuală și situată la distanța de 25 cm de ocular.

d) Raportul între dimensiunile corespunzătoare ale acestei ultime imagini și cele ale obiectului. Să se construiască aceste imagini.

e) În ce sens și cu cît ar trebui să fie deplasat ocularul pentru ca imaginea finală să devină reală și situată la 25 cm de ocular?

7269. Un corp cu densitatea d mai mică decît a apei este lăsat să cadă de la înălțime într-un bazin cu apă. Neglijînd orice fel de frecare și știind că în aer corpul parcurge distanța l pînă la suprafața apei se cere:

a) Să se găsească adîncimea h la care corpul ajunge în bazin.

b) Timpul t scurs de la începutul căderii pînă la ieșirea la suprafața apei.

c) Să se calculeze h și t pentru densitatea $d = 0{,}5$ g. cm^{-3} și înălțimea $l = 1$ m. Densitatea apei se ia egală cu unitatea, iar accelerația gravitației $g = 9{,}81$ m. s^{-2}.

★

7270. Coordonatele unui mobil M în raport cu un reper ortonormat sînt definite în funcție de t ($t > 0$) prin formulele următoare: $x = 1/t$, $y = t^2$.

a) Să se formeze ecuația traiectoriei sale. Să se construiască această curbă. Să se indice sensul deplasării lui M pe curbă.

b) Să se calculeze componentele vectorului viteză și ale vectorului accelerației a mobilului M la un moment oarecare al mișcării sale.

Să se determine hodograful acestei mișcări, construit din originea O a coordonatelor.

c) Să se construiască poziția mobilului M la momentul $t = 1$, precum și vectorul său viteză și vectorul său accelerație, la acest moment.

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

7271. a) Pornind de la expresiile $\cos 2a$ și $\sin 2a$, în funcție de $\cos a$ și $\sin a$, să se stabilească formula exprimînd $\cos 3a$ în funcție de $\cos a$.

b) Un mobil M se deplasează pe o axă $x'Ox$; mișcarea sa se efectuează după legea următoare: $x = 4\cos^3 2t - 3\cos 2t - 5$. Să se arate că mișcarea acestui mobil este o mișcare vibratoare simplă. Să se indice centrul oscilațiilor, perioada și amplitudinea mișcării.

c) Să se determine valorile lui t pentru care mobilul se găsește la punctul A al axei $x'Ox$, avînd ca abscisă $-\frac{11}{2}$. Să se calculeze viteza la fiecare din trecerile în A.

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

7272. Să se determine cuplul de numere întregi admițînd ca cel mai mare comun divizor 36 și ca cel mai mic comun multiplu 7560.

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

7273. Se consideră mișcarea rectilinie definită prin ecuația orară

$$x = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}t + \sin\frac{\pi}{3}t\right)$$

a) Să se demonstreze că această mișcare este oscilatoare simplă. Care sînt centrele de oscilație, perioada, amplitudinea? Care este faza inițială?

b) Să se determine viteza și accelerația la momentul t.

c) Să se construiască diagrama spațiilor corespunzătoare unei perioade începînd la momentul $t = 0$. Să se precizeze dacă mișcarea este accelerată sau întîrziată.

Bacalaureat, Maroc, 1964

7274. Să se enunțe principiul probabilităților compuse. O urnă conține 210 bile numerotate de la 1 la 210. Se trage o bilă la întîmplare.

a) Care este probabilitatea să se obțină un număr divizibil cu 5, cu 6 (5, 6 sînt divizori ai lui 210)?

b) Mai general, fie b un divizor al lui 210. Care este probabilitatea de a obține un număr divizibil prin b?

c) Care este probabilitatea de a obține un număr divizibil în același timp cu 5 și 7, cu 6 și 10?

Bacalaureat, Maroc, 1964

7275. Dacă luna văzută de pe Pămînt este un corn, Pămîntul văzut de pe Lună are și el forma unui corn? Cînd de pe Pămînt se vede Luna plină, cum se vede de pe Lună, Pămîntul?

Bacalaureat, New-York, 1964

7276. Să se găsească doi întregi naturali cunoscînd că cel mai mare comun divizor al lor este 17 și diferența pătratelor lor 1445.

Bacalaureat, Tahiti, 1964

7277. Se dau într-un plan, două cercuri (B) și (C), de raze respectiv R și $\frac{R}{2}$, tangente exterioare într-un punct A. Se notează cu (Γ) toate cercurile tangente la cercurile (B) și (C) în două puncte M și N, distincte de A.

a) Să se construiască cercul (Γ), cunoscînd raza a. Să se indice numărul soluțiilor după valorile lui a. Să se arate că mulțimea centrelor cercurilor (Γ) este o hiperbolă, ale cărei asimptote se vor construi.

b) Să se arate că dreapta MN trece printr-un punct fix I. Să se calculeze distanța AI în funcție de R. Să se construiască un cerc (Γ) cunoscînd punctul său de contact M, cu cercul (B).

c) Se efectuează inversiunea de centru A, de putere negativă $-2R^2$. Se notează (b), (c) transformatele cercurilor (B) și (C). Să se arate că transformatele (γ) ale cercurilor (Γ) sînt cercuri egale și că cercurile (Γ) sînt ortogonale unui cerc fix, al cărui centru și rază se vor determina. Să se găsească mulțimea punctelor de contact ale celor două cercuri (Γ) tangente între ele.

d) Fie (D) o dreaptă care trece prin A. Să se arate că există în general, două cercuri (Γ) tangente la (D) și să se construiască. Cercurile (Γ_1) și (Γ_2) astfel obținute sînt tangente la cercurile (B), (C) și la dreapta (D).

Să se arate că mai există un cerc (Ω) care trece prin A și e tangent la (Γ_1) și (Γ_2). Să se găsească mulțimea centrelor (ω) ale acestor cercuri (Ω) cînd (D) variază trecînd mereu prin A.

Bacalaureat, Mexic, 1963

7278. Se consideră ecuația de gradul doi în x, în care m este un parametru:

$$(m-1)\,x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0.$$

Se cere să se determine pentru care valori această ecuație admite o rădăcină cuprinsă între 1 și 2, cealaltă rădăcină fiind inferioară lui 1.

Bacalaureat, Antille, 1964

7279. Dintre parabolele (P) de ecuație (axe ortonormate)

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (P)$$

se consideră cele tangente la dreapta (D) $x-y+2=0$, în punctul A de abscisă $+1$.

a) Să se demonstreze că ecuația acestor parabole (P) poate fi scrisă sub forma

$$y = a\,(x-1)^2 + x + 2.$$

b) Să se găsească o relație independentă de a verificată de coordonatele x_v, y_v ale vîrfului S al unei parabole (P) și să se precizeze mulțimea (locul) acestor vîrfuri.

c) Pentru care valori ale lui a aceste parabole taie pe $x'x$ în două puncte M' și M''? Să se studieze după valorile lui a semnul abscselor x' a lui M' și x'' a lui M''.

d) Să se arate că dacă a variază, M' și M'' rămîn conjugate armonic în raport cu $E\,(-5,\ 0)$ și $F\,(+1,\ 0)$.

Bacalaureat, Cambodgia, 1964

7280. Se dă triunghiul ABC. Fie P un punct nesituat pe laturile acestui triunghi. Se consideră fascicolele armonice (BA, BC, BP, Bx) și (CA, CB, CP, Cy).

a) Dreapta AP taie pe BC în I; Bx taie pe AP în Q. Ce se poate spune de punctele A, I, P, Q?

b) Să se arate că dreptele Bx, Cy și AP sînt concurente.

Bacalaureat, seria modern, Istanbul, 1964

7281. Se consideră curba variabilă (C) de ecuație

$$y = mx^2 - \left(8m - \frac{1}{2}\right)x + 7m - \frac{1}{2},$$

unde m este un parametru.

Să se demonstreze că (C) trece — oricare ar fi m — prin două puncte fixe A și B, ale căror coordonate vor fi căutate.

Se notează cu K punctul lui (C) situat pe axa y-ilor și cu I al doilea punct comun lui (C) și paralelei dusă din K la $x'x$. Să se calculeze în funcție de m, coordonatele punctului I, cînd m variază. Nu se cere graficul.

b) Fie (Γ) aceea dintre curbele (C) care corespunde valorii $m = \frac{1}{4}$ a parametrului. Să se verifice că (Γ) trece prin punctele $A(+1,0)$ și $B(+7, +3)$. Fie C punctul de coordonate $+4$ și -3. Să se calculeze componentele scalare ale vectorilor $\overline{CA}$ și $\overline{CB}$; să se calculeze pantele tangentelor la (Γ) în A și B. Ce concluzie se trage din compararea rezultatelor? Să se construiască în cele din urmă curba (Γ).

c) Să se formeze ecuația înălțimii care pleacă din vîrful C al triunghiului ABC. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție E și F ale acestei înălțimi cu (Γ). Să se compare distanțele de la punctul E la dreptele BA și BC, ca și distanțele de la punctul F la aceleași drepte. Ce concluzii se pot trage?

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

7282. Să se rezolve și să se discute ecuația următoare:

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = m,$$

în care necunoscuta x este un unghi cuprins între 0 și π iar m este un parametru variabil.

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

7283. Să se reducă expresia următoare:

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - 2x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x).$$

b) Să se rezolve ecuația $E = 0$. Să se însemneze pe cercul trigonometric extremitățile arcelor care sînt soluții ale acestei ecuații.

Subiect tip, bacalaureat, Franța, 1964

PROBLEME PROPUSE *

7284. Un grup de elevi a hotărît să viziteze o instalație industrială care se găsea departe de localitatea din care porneau. Știind că la ducere autobuzul cu care au făcut călătoria a mers cu viteza medie de 45 km/oră, iar la înapoiere a parcurs 60% din distanță tot cu viteza de 45 km/oră, iar restul cu viteza medie de 40 km/oră, din care cauză la înapoiere a făcut cu 40 minute mai mult decît la ducere, să se afle distanța pînă la localitatea vizitată.

D. Mirzan, Rm. Vîlcea

7285. Un conducător auto parcurge distanța dintre orașele A și B, formată dintr-o orizontală de 120 km, urcușuri și coborîșuri. Pe partea orizontală a drumului a mers cu viteza de 40 km/oră, pe urcușuri cu 36 km/oră, iar pe coborîșuri cu 45 km/oră. Știind că la ducere a făcut 17 ore, iar la înapoiere 16 ore, să se afle distanța dintre orașele A și B.

* * *

7286. Să se arate că dacă $a \neq b \neq c \neq a$, avem:

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$

Ovidiu Vasiliu, Ploiești

* IX (7284–7288), X (7289–7300); XI (7301–7306), S (7307–7310). Soluțiile se primesc pînă la 15. IV. 1966.

7287. Să se arate că dacă $x \neq y \neq z \neq x$, avem:

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-y)(x-z)}+\frac{ay^2+by+c}{(y-z)(y-x)}+\frac{az^2+bz+c}{(z-x)(z-y)}=a.$$

Matei Constanța, București

7288. Doi tractoriști au arat într-o săptămînă 84 ha. În săptămîna următoare primul tractorist și-a depășit norma zilnică cu 10% în primele 3 zile și cu 20% în următoarele 3 zile. Tractoristul al doilea, în săptămîna următoare și-a depășit norma zilnică cu 5% în primele 2 zile și cu 15% în următoarele 4 zile. În cea de-a doua săptămînă al doilea tractorist a arat cu 12,2 ha mai mult decît primul. Cît a arat zilnic în prima săptămînă fiecare tractorist?

G. Climescu, profesor Brașov

7289. Fie fracția $\frac{4n+3}{5n+2}$. Să se afle valorile lui n pentru care fracția se poate simplifica.

I. Velescu, Pitești

7290. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi oarecare se consideră punctele M, N astfel ca $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$. Să se demonstreze că dreapta MN trece prin centrul de greutate al triunghiului.

Mihalca Dan, elev București

7291. Care este numărul de două cifre în baza 10, astfel încît micșorat cu 5 să fie egal cu triplul răsturnatului său?

Corneliu N. Popescu, București

7292. Să se arate că:

$$(p-1)!\cdot\frac{(2p-1)!}{p!}\cdot\frac{(3p-1)!}{(2p)!}\cdot\ldots\cdot\frac{[(n+1)p-1)]!}{(np)!}\cdot p^n=$$
$$=(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot[(n+1)p-1],$$

unde $p\geqslant 2$.

L. Pîrșan, București

7293. Să se arate că:

$$\frac{\sec 20^\circ}{\sec 100^\circ+\sec 140^\circ}+\frac{\sec 100^\circ}{\sec 20^\circ+\sec 140^\circ}+\frac{\sec 140^\circ}{\sec 20^\circ+\sec 100^\circ}+$$
$$+\frac{\sec^2 20^\circ+\sec^2 100^\circ+\sec^2 140^\circ}{\sec 20^\circ\cdot\sec 100^\circ\cdot\sec 140^\circ}=0.$$

Laura Constantinescu, profesoară Sibiu

7294. Să se determine un număr k astfel încît suma oricăror k termeni consecutivi ai șirului lui Fermat

$$2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ 2^{2^2}+1,\ \ldots;\ 2^{2^n}+1,\ldots$$

să se dividă cu 7.

Dan Voiculescu, elev București

7295. Dacă $y \geqslant x \geqslant 1$ și $E = 2xy - x - y + 1$ să se arate că: $xy \leqslant E < 2xy$; $2x^2 - 2x + 1 \leqslant E \leqslant 2y^2 - 2y + 1$; $x + y - 1 \leqslant E \leqslant (x + y - 1)^2$; $E \leqslant x^2 + y^2 - 1$.

* * *

7296 În triunghiul ABC se duc înălțimile AA', BB' și CC'. Să se arate că: $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'$.

G. Curcanu, elev Tg. Jiu

7297. Să se arate că numerele $E_1 = \dfrac{n^2!}{(n!)^n}$ și $E_2 = \dfrac{(pn+1)!}{(n!)^p}$ sînt întregi.

Perl Toma, absolvent Cluj

7298. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, atunci avem:

$$\frac{a^2}{-a+b+c} + \frac{b^2}{a-b+c} + \frac{c^2}{a+b-c} \geqslant a + b + c.$$

G. G. Niculescu, student București

7299. Să se arate că polinomul

$$f(x) = x^{3n+2} + ax^{3n+1} + a^{3n+2}$$

este divizibil cu $x^2 + ax + a^2$. (Generalizarea problemei 6736).

Daniel Pestroiu, elev Tîrgu Jiu

7300. Să se arate că

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

Traian Ionescu, Brăila

7301. Să se demonstreze că între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + px + q = 0$ are loc relația

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) = 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Gh. Buiclin

7302. Se dă funcția $f(x) = (x^n - 1)\sec\dfrac{\pi x}{2}$ (cu $n \in N$) și se cere: a) domeniul maxim de definiție; b) semnul funcției pe domeniul ei de definiție; c) să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Miron Oprea, Ploiești

7303. Se consideră un cerc oarecare și doi diametri ficși AB și CD, perpendiculari unul pe altul. Din punctul M variabil pe cercul dat se duce $MN \| AB$, N fiind situat pe CD. Fie P mijlocul segmentului AN și Q mijlocul lui MP. Prin P și Q se duc dreptele (Δ_1) și (Δ_2) paralele respectiv cu AB și CD. Se cere : a) locul geometric descris de punctul Q ; b) locul geometric descris de punctul I, intersecția dreptelor (Δ_1) și (Δ_2).

C. Săndulache, profesor Negrești Iași

7304. Se dă un unghi drept xOy și un punct A pe Ox ; se duce prin A o secantă variabilă care taie pe Oy în B. Fie M mijlocul lui AB, iar Q piciorul perpendicularei coborîte din O pe AB. Perpendiculara în A pe AB întîlnește pe OM în A', iar perpendiculara în M pe AB întîlnește pe Oy în N. $A'Q$ întîlnește pe Ox în P. a) Să se arate că NP este perpendiculară pe OQ ; b) Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor OQ și NP.

Grigore Lohănel, profesor Suceava

7305. Să se demonstreze că în orice patrulater există relația :

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \cos\frac{A - B + C - D}{2}$$

unde e și f sînt diagonalele.

* * *

7306. Să se determine triunghiurile în care pot avea loc simultan relațiile :

$$(a + b - c)c - (b + c - a)a + (c + a - b)\,b = bc,$$

$$\sin(A + B - C) + \cos\,(B + C - A) + \operatorname{cotg}(C + A - B) = 1.$$

Gh. Bazacov, Tr. Severin

7307. Fie tetraedrul $ABCD$ și G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate ale fețelor sale. Să se demonstreze că, în valoare absolută, suma puterilor punctelor G_a, G_b, G_c, G_d în raport cu sfera circumscrisă tetraedrului $ABCD$ este egală cu suma puterilor punctelor A, B, C, D în raport cu sfera circumscrisă tetraedrului $G_aG_bG_cG_d$.

Ion Tomescu, București

7308. Fie triunghiul ascuțitunghi ABC, iar O centrul cercului circumscris triunghiului. Distanțele lui O la laturi se notează respectiv cu x, y, z. Să se arate că avem inegalitatea :

$$x + y + z < \frac{3\,abc}{8S}$$

S fiind aria triunghiului.

* * *

7309. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural, atunci $E = n^4 + n^2 + 1$ nu poate fi nici patrat perfect, nici cub perfect. (În legătură cu problema 6695).

F. Kacso, Tg. Mureș

7310. Se dau punctele A, B, C, D în același plan. Paralela dusă prin D la BC intersectează dreptele AB și AC respectiv în punctele A_1 și A_2. Analog se obțin punctele B_1, B_2, C_1, C_2. Fie $A_1B_1 \cap A_2B_2 = M$; $B_1C_1 \cap B_2C_2 = N$; $A_1C_1 \cap A_2C_2 = P$. Să se arate că punctele M, N, P sînt colineare.

C. Ionescu-Țiu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII *

E : 2410. La o școală au fost propuși mai mulți elevi pentru odihnă. Dacă fiecare din elevi ar participa cu cîte 75 lei, nu ar ajunge pentru acoperirea cheltuielilor 125 lei. Dacă fiecare elev ar da cîte 100 lei, ar mai rămîne 75 lei. Cîți elevi au plecat la odihnă?

B. Baieră, Păunești

E : 2411. La sfîrșitul anului 1964 numărul tractoarelor, semănătoarelor și combinelor din agricultura regiunii Iași era de 10 011 bucăți. Știind că numărul tractoarelor era cu 1 180 mai mare decît cel al semănătoarelor, iar cel al combinelor cu 1 987 mai mic decît cel al semănătoarelor, să se calculeze numărul tractoarelor, semănătoarelor și combinelor.

Octavian Sulea, Văleni Iași

E : 2412. Două școli din regiunea Galați au făcut împreună o excursie care a costat 3 200 lei. În prima școală sînt 16 elevi. Cei din prima școală au dat cu 13 lei mai mult fiecare decît cei de la școala a doua. Să se afle cîți lei a adus fiecare școală.

Ioniță Marin, Panciu

E : 2413 La un cinematograf sătesc s-au vîndut într-o zi 103 bilete, a doua zi de două ori mai multe, iar a treia zi de 3 ori mai multe decît în prima și a doua zi. Să se afle cît costă biletele dacă a doua zi s-au vîndut cu 3 lei biletul, iar în prima zi și a treia zi s-au vîndut cu 2,50 lei.

* * *

E : 2414. O cooperativă agricolă de producție a depozitat 20 tone grîu în două magazii. Știind că 5/8 din cantitatea de grîu din prima magazie împreună cu 1/4 din cantitatea de grîu din a doua magazie reprezintă 9,674 tone, să se afle cît grîu a fost depozitat în fiecare magazie.

* * *

E : 2415. În vederea refacerii patrimoniului forestier o brigadă de muncă patriotică și-a propus să planteze zilnic cîte 10 000 puieți de stejar. Organizîndu-și mai bine munca, brigada a reușit să planteze zilnic cîte 14 000 puieți, plantînd în plus față de plan 28 000 bucăți și în acest fel

---

* V (E: 2410–2414), VI (E: 2415–2418), VII (E: 2419–2423), VIII (2424–2428). Soluțiile se primesc pînă la 15. IV. 1966.

termină lucrarea cu 8 zile mai devreme față de termenul stabilit. Ce economii a realizat această brigadă dacă plantarea unui puiet e socotită 0,75 lei.

Nelu Dobre, Merei, Buzău

E : 2416. La un aprozar s-a primit pentru vînzare 2 370 kg mere, 1 500 kg pere și 810 kg struguri costul total fiind 10 920 lei.

a) Să se afle cît costă 1 kg mere, 1 kg pere și 1 kg struguri, dacă 3 kg mere costă cît 2 kg struguri, iar 4 kg pere costă cît 5 kg mere;

b) Cu cît s-a vîndut kilogramul din aceste fructe dacă prin vînzarea lor s-a încasat suma de 13 260 lei.

B. Baieră

E : 2417. O pereche de pantofi, un costum de haine și un pardesiu costă împreună 1 840 lei. Să se afle cît costă fiecare articol în parte, știind că costul pantofilor reprezintă 20% din costul costumului, iar costul costumului reprezintă 70% din costul pardesiului.

Petru Grăjdeanu, profesor Tansa, Iași

E : 2418. Gestionarul unui magazin mixt primește pe lîngă salariul de încadrare o cotă de 0,75% din volumul desfacerilor, ceea ce pe luna iunie 1965 a reprezentat 48% din salariul lunar. Să se calculeze salariul de încadrare al gestionarului, știind că pe luna iunie 1965 volumul desfacerilor a fost 80 000 lei.

Ion Mangu, profesor Gilort, Oltenia

E : 2419. Să se rezolve ecuația :

$$(3{,}2 - 2x)\ 2{,}5x + x\ (5x - 0{,}5) = 1{,}5$$

și să se facă proba.

Lucrare de control la cl. VI-a, 1964, U.R.S.S.

E : 2420. Se dau dreptele KL și MN. O a treia dreaptă taie KL în A și MN în B. Unghiul ABN este de 48°. Prin punctul A se duce bisectoarea unghiului obtuz LAB pînă la intersecția ei cu MN în punctul C. Să se afle unghiul ACB.

Lucrare de control la cl. VI-a, 1964, U.R.S.S.

E : 2421. Să se restrîngă expresia :

$$(x + y)\ (x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4)$$

și să se afle valoarea ei numerică pentru $x = -\frac{1}{2}$ și $y = 1$.

Lucrarea de control la cl. VI-a, 1964, U.R.S.S.

E : 2422. La cererea unor magazine alimentare, un depozit a livrat acestor magazine într-o săptămînă bomboane de două feluri. Cantitatea de bomboane din felul întîi s-a raportat la cantitatea de bomboane din felul al doilea ca 4 : 9. Costul unui kg bomboane din felul întîi s-a raportat

la costul unui kg din felul al doilea ca 7 : 5. Toate bomboanele din felul al doilea au costat cu 510 lei mai mult decît toate bomboanele din felul întîi, iar un kg bomboane din fiecare fel a costat mai mult de 10 lei și mai puțin de 30 lei. Să se calculeze costul unui kilogram și cantitatea de bomboane din fiecare fel ieșită din depozit.

Florea I. Dumitrescu, profesor Craiova

E : 2423. Să se arate că dacă $a^2 \neq 1$, avem :

$$\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1-a} + a\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}\right) = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

E : 2424. Să se determine x din proporția :

$$\frac{202020_3}{303030_4} = \frac{x_5}{101010_2}$$

indicii indicînd baza de numerație.

I. Bogatu, profesor Tecuci

E : 2425. Se dau două pentagoane asemenea. Una din laturile pentagonului întîi adunată cu 2 cm ne dă latura a doua a aceluiași pentagon, care la rîndul ei adunată cu 2 cm dă latura a treia ș.a.m.d. Știind că perimetrul primului pentagon este de 120 cm, iar diferența dintre prima latură a fiecărui pentagon este de 10 cm să se afle perimetrul celui de-al doilea pentagon.

S. Constantinovici, profesor Galați

E : 2426. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $AB = 18$ cm și $AC = 24$ cm, se notează cu M mijlocul ipotenuzei BC; proiecțiile lui M pe catetele AB și AC sînt respectiv N și P. Dreptele AM și BP se intersectează în O. Se cere :

a) Să se precizeze natura patrulaterului $BNPC$; b) Să se afle distanța AO; c) Să se arate că înălțimea NE a paralelogramului $BMPN$ este de 7,2 cm.

Al. Țigănoiu, Timișoara

E : 2427. Să se arate că dacă :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca, \text{ avem :}$$

$$(a - b - x)(a - b) + (b - c - x)(b - c) = (a - c + x)(c - a),$$

oricare ar fi x.

C. Ionescu-Țiu

E : 2428. Un călător a parcurs în prima zi $\frac{2}{9}$ din drumul pe care îl avea de făcut, iar a doua zi $\frac{3}{4}$ din rest. Ca să ajungă la destinație el a trebuit să parcurgă a treia zi o distanță cu 2,5 km mai mică decît în prima zi. Să se afle lungimea întregului drum.

Examen la școli pedagogice, august 1965

CĂRȚI NOI

N. N. Mihăileanu, Complemente de geometrie sintetică. Editura didactică și pedagogică 1965, 280 pagini.

Materialul acestei lucrări corespunde în linii mari lecțiilor de geometrie sintetică pe care autorul le-a tratat, cîțiva ani, la Facultatea de matematică, conform programei analitice de atunci.

Autorul s-a menținut în cadrul geometriei sintetice, fără considerații sistematice de geometrie afină, proiectivă sau analitică ; s-a evitat astfel utilizarea dreptei de la infinit, a raportului armonic și a semnului segmentelor.

În lucrare nu se recurge la probleme prea specializate de geometrie sintetică. Ca o primă treaptă de depășire a manualului de școală s-a urmărit să se pună la dispoziția profesorilor și a elevilor interesați o lucrare accesibilă și atrăgătoare.

Cartea cuprinde : I) *Geometrie plană* : A. Deplasări. B. Omotetie. C. Inversiune. D. Geometria cercului. E. Dualitate. F. Puncte pe laturile triunghiului. G. Geometria triunghiului. H. Geometria patrulaterului. I. Poligoane regulate. J. Conice.

II) *Geometrie în spațiu* : A. Aplicații. B. Geometrie descriptivă. C. Unghiuri poliedre. D. Geometrie pe sferă. E. Deplasări în spațiu. F. Omotetie. G. Inversiune. H. Dualitate. I. Geometrie a sferei. J. Geometrie a tetraedului K. Poliedre.

III) *Metode* : A. Construcții grafice. B. Locuri geometrice. C. Relații metrice. D. Relații trigonometrice. E. Metode areolare. F. Metode vectoriale. G. Generalizări. H. Rolul spațiului. I. Axiomatică. J. Geometrie elementeră dintr-un punct de vedere mai înalt.

IV) *Aplicații practice.*

V) *Istoric* : A. Dezvoltarea geometriei sintetice. B. Geometria sintetică în țara noastră.

a Gazetei Matematice seria B pe anul XVI — 1965

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1966

Programa materiei cerută pentru olimpiada de matematică, pe etape

Etapa locală — 5 februarie 1966

Clasa a IX-a : — *Algebră* pînă la cap. IV, Puteri cu exponent rațional, pag. 139.
— *Geometrie* pînă la cap. VI, Patrulatere, pag. 83

Clasa a X-a : — *Algebră* pînă la cap. IV, Numere complexe, pag. 138
— *Geometrie* pînă la cap. VI, Poliedre, pag. 67
— *Trigonometrie* pînă la Cosinusul unei sume de arce, pag. 108.

Clasa a XI-a : — *Analiza matematică* pînă la cap. IX, Derivate, pag. 132
— *Geometrie analitică* pînă la cap. VII, Cercul, pag. 85

Etapa regională — *13 — 15* martie *1966*

Clasa a IX-a : — *Algebră* pînă la cap. V, Funcții de gradul I, pag. 189
— *Geometrie* pînă la cap. IX, Segmente proporționale, pag. 157.

Clasa a X-a : — *Algebra* pînă la cap V, Proprietăți ale polinomului, pag. 179
— *Geometrie* pînă la cap. VII, Corpuri rotunde, pag. 105
— *Trigonometrie* pînă la Relații în trunghiul oarecare pag. 149

Clasa a XI-a : — *Analiza matematică* pînă la Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor, pag. 179.
— *Geometrie analitică* pînă la Elipsa, pag. 133.

Etapa finală — *2* — *5* mai *1966*

Clasa a IX-a : — *Algebră*, pînă la Inegalități, pag. 230
— *Geometrie*, pînă la Asemănarea poligoanelor, pag. 184.

Clasa a X-a — *Algebră* pînă la Transformarea ecuațiilor, pag. 198
— *Geometrie* pînă la Sfera, pag. 125
— *Trigonometrie* pînă la Sisteme de ecuații trigonometrice, pag. 222.

Clasa a XI-a : — Toată materia.

★

— Pentru școlile pedagogice anul I, II și III, școlile profesionale anul I și II, școlile tehnice de maiștri anul I și II, la fiecare etapă se cere materia făcută la zi, conform programelor respective.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

(urmare)

TURNU SEVERIN *Liceul 2.* clasa XI Simcelescu Virginia (6847, 8, 55, 62, 4, 7, 79,81, 927, 9, 31, 36, 7003). *Absolvent* Stoian Victor (6841, 7—50, 9, 60, 2, 4, 5, 7—9, 79, 1, 9, 927, 9—31, 3—5, 43, 5, 6, 9, 50, 2, 7, 8). *Liceul 3* cl. VIII. Bivolaru Simion (E : 2293—7, 9—302, 7, 8), Sever Anghel (E : 2307, 11, 2, 5, 6, 9, 20, 1, 4—8, 31, 3, 6 — 40, 2, 4—6, 8—50, 3 ; 6848,64, 81, 927, 96). Cl. XI. Popescu Mariana (6801, 3,17, 35, 50, 1, 3, 9, 62, 8, 96, 932, 6, 40,2, 3, 56, 7001—3, 5).

URLAȚI (Ploiești). *Ș. g.* cl. VIII. Enescu Emilia (E : 2293, 4, 9, 307, 8, 12, 309, 25, 6). Zenelovici Victoria (E : 2299, 30, 9, 12, 6, 24—6). *Liceu* cl. IX. Zotta Dan (6750, 7, 8, 60, 1, 4, 83, 6, 9, 91, 5, 802, 11, 3, 5, 47—51, 4, 62, 4, 5, 7—70, 8, 81, 3),

UȘUREI. *Ș. g.* cl. VIII. Deaconu Sabina (E : 2293—6, 9—302).

VADUL CRIȘULUI. *Liceu* cl. X. Buzlea Aron (6752, 5, 6, 63, 96—9, 802, 16, 7, 47, 8, 65, 81).

VALEA LUI MIHAI (Crișana). *Liceu* cl. X. *Vesa Ioan* (6803, 13, 9, 24, 7—9, 31, 47—9, 51, 4, 7, 9, 64, 5, 70, 1, 8, 9, 81, 3, 7—9, 921, 7, 8, 33—8, 50, 2).

VALEA MARE (Argeș). *Ș. g.* cl. VIII. Dindirică Florea (E : 2250, 8, 9, 61, 3, 8, 70, 7, 8, 80 ; 6722).

VÎLCELE (Argeș). *Ș. g.* cl. VIII. Cioacă Ion (E : 2294, 7, 9, 301, 2, 5—9, 11, 8, 34, 47, 50, 62, 4, 6, 79, 916, 27, 31, 2, 41). *Student Burecea Cornel* (6797—9, 801, 2, 4, 6, 10, 33, 2—5, 7—9, 21—6, 40, 1, 3—5, 7—52, 4, 7, 8, 62, 71, 6, 8, 9, 81, 3—8, 907, 9, 15—8, 20, 9—34, 8—43, 8—50, 3—6, 75, 82).

VINGA (Banat). *Ș. g.* cl. VII. Mnevie Ștefan (E : 2294—9, 301, 2, 8, 11, 6, 23, 6, 8).

VIȘINEȘTI (Ploiești). *Ș. g.*. cl. VIII. Badea Carmen (E : 2299, 301, 12, 6, 28).

VLAHI (Dobrogea). *Ș. g.*l. cl. VIII. *Poenaru Paraschiva* (E : 2098, 307—35, 97, 9, 809, 17—9, 47—52, 62—6, 8, 70, 8—83, 28—32).

ZALĂU. *Liceu* cl. IX. Cărpineanu Claudiu (6847—50, 62, 4—70, 9—81, 8).

Pînă la 1 Octombrie 1965 s-au mai primit soluții bune de la :

ABRUD. *L. 1* cl. X. Bolunduț Ioan (6847, 9, 52, 62—5, 7—81, 3—5, 8, 927, 8, 30—3, 7, 8, 41, 5, 6, 50, 4), Prida Toma (6927, 30—4, 7, 8, 41, 6, 50, 4, 7). Cl. XI. Todea Petru (6927, 8, 30—4, 7, 8, 41, 6, 50, 4).

ADÂNCATA (Ploiești). *S.g.* cl. VIII. Ene R. Bujor (E : 2307, 8, 10, 2, 4 ; 6927, 8, 30—3, 8, 46, 9, 50, 7003).

ADJUD. *L. 1* cl. VII. Bocăneț Paula (E : 2323—8, 36, 7, 9). Cl. VIII. Păuș Viorica (E : 2324—6, 8, 33, 6—9, 50, 6—60, 6, 6). Cl. XI. Ceaușoglu Nicolae (6928, 31, 8, 41, 3, 4, 6, 9—51, 4, 63).

AIUD. *L. 1* cl. VII. Maftei Doina (E : 2311, 8, 23, 7, 33, 4, 6—8). C. X. *Srulla Dumitru* (6795—7, 9—803, 11, 3, 5, 24, 40—2, 7—9, 51—5, 6, 8, 64, 7, 9, 70, 4, 8, 84, 922, 3, 30, 1, 3, 5—7, 41, 3, 5, 50, 2—4). Cl. XI. Hámorezky (6841, 1, 51, 68—70, 5, 88, 927, 34, 43, 9, 50, 80, 7003).

ALBA IULIA. *L. 1* cl. IX. Magda Mircea (E : 2353 ; 6841, 7—9, 55, 6, 62, 4—70, 8—81, 4, 8, 916, 20, 7—33, 45, 57, 88, 97, 4). *Oargă Gh.* (E : 2320, 1, 34, 50—3 ; 6840, 7—51, 55, 6, 62—70, 2, 8—81, 3, 4, 8—90, 916, 20, 1, 7—38, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 3, 5, 7, 63, 4, 89, 95—9, 7001, 3—5, 19, 21, 4), Rus Vasile (E : 2319, 20 ; 6847, 20 ; 8, 62, 4, 8, 9, 70, 8, 9, 81, 8, 916). Cl. X. Miclea Cornel (E : 2323—8, 30, 48, 50 ; 6920, 7, 8, 30—4, 7, 8, 41, 2, 6, 9, 57, 60, 1, 3, 72, 995—7, 9, 7001—4, 14).

ALBENI *S.g. 1* cl. VII. Belega Viorica (E : 2336—9, 54, 6—9, 61, 2, 6). Cl. VII. Burlan Elena (E : 2336, 7, 9, 54, 7, 9, 61, 2, 6).

ALEXANDRIA. *S. m. 2* cl. VIII. Ciobanu Ștefan (E : 2307, 8, 20, 4, 5, 8, 42 ; 6848, 62, 79, 81, 930—2). *L. 1* cl. X. Comărescu Gheorghe (6847—9, 52, 62, 4, 8, 9, 79, 81, 4, 96, 927, 8, 30, 1, 3, 6, 8, 41, 2, 6, 50, 4, 7000, 3), Stoica I. Gh. (6842, 7, 64, 79, 81, 927, 33, 6, 45—7, 51).

ANINA. *L. 1* cl. X. Miloiu Livia (6797, 9, 801—3, 15, 24, 47—9, 52, 4, 62, 8—70, 2, 9, 81, 3, 4).

ARAD. *L. 1* cl. VIII. Decis Florin (E : 2297, 8, 300—3, 8, 11, 27—30, 3, 6, 8, 56, 9). Cl. X. Balla Ioan (6927—33, 8, 40, , 5, 6, 9, 50, 2, 63), Betea Dan (6927—34, 8, 42, 6, 98,

*) Evidențiații sînt scriși cu litere cursive.

9, 7002, 3), Gligor Alexandru (6929, 30, 4, 6, 41, 2, 5, 9, 56, 63, 96, 7003), Kuligovsky Iosif (6927, 9—34, 8, 95, 6, 8, 7002), 3), *Lucuța Petru* (6940, 1, 2, 7—56, 9, 62—72, 8—81, 3—5, 7, 8, 90, 916, 20, 1, 7—30, 2—9, 40—7, 9—57, 9, 63, 5, 6, 95—7000), *Parvănescu Horia* (6848, 9, 51, 2, 9, 62, 3, 7, 8, 70, 9, 87—91, 920—4, 8, 32, 3, 5—7, 9, 41, 2, 5, 7, 52, 3, 5—7, 9, 63, 73). Cl. XI. Marton Rozalia (7002. 3, 5, 28, 45, 51, 4, 5, 63, 4, 6, 70, 3). C. XI serală Kuhel Ecaterina (7002, 3, 5, 28, 45, 51, 4, 5, 63, 70, 3). *L. 2* Cl. VIII. *Boșcoiu Voicu* (E : 2323—36, 9—14, 5, 6, 50—62; 6927, 8, 30—4, 41, 2, 6, 57, 86, 85, 7, 7002—5), Decis Florian (E : 2313—6, 23—6). Cl. X. Vereș Traian (6847, 52, 9, 62—6, 8—70, 9, 85).

AVRIG. *L. 1* cl. X. Holmoghi Mircea (6847—50, 62, 4, 9, 79, 81, 931, 3, 46).

BABADAG. *L. 1* cl. X. Tudor Petre (6841, 7, 8, 50, 2, 9, 62, 4, 8, 70, 9, 81).

BACĂU. *L. 1* cl. VIII. Knoll Raul (E : 2326, 39, 50, 1 ; 6927, 31—4, 57—95, 6, 7002, 3). Olteanu Mirela (E : 2307, 8, 12—4, 6, 7, 9, 21, 4—6, 33, 6, 50). Cl. IX. Țarălungă Lucian (E : 2319 ;6847—51, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 8, 9, 81, 8, 927, 31, 2, 46). Cl. X. Dogaru Angelică (6841, 7—50, 2, 9, 62, 4, 5, 7—70, 9, 81, 4, 7—9), Godeanu Vladimir (E : 2321, 53 ; 6847—9, 52, 4, 79, 81, 931—3), *Ciochină Silviu* (6842, 3, 7—52, 4, 6, 7, 9—65, 7, 9, 70, 4, 7, 9, 81, 3, 4, 7—90, 5—8, 902, 16, 9, 23, 7, 31—3, 6—8, 41—7, 9—52, 4, 5, 7, 8, 60, 4, 75, 80). *L. 3* cl. VI. Giurgian Valeriu (E : 2307, 8, 10—2, 23—6, 8, 9, 32—5). Cl. X. Leibu Marc (6927, 31—4, 6—8, 41—3, 5, 6, 9, 50, 4, 6), Zisman Carol (6850, 1, 9, 69, 84, 937, 8, 45, 6, 50, 4, 6). Cl. XI. Hártescu Ana (6847—9, 54, 62, 4, 7, 79, 81, 916, 27, 31, 4, 50).

BAIA MARE. *S. g. 5.* Buteanu Aurelia (E : 2323, 5, 6, 34, 6, 8, 56, 9, 65, 6). *L. 1.* Oprea Alexandru (6848, 9, 54, 9, 64, 5, 7, 9, 79, 81, 4, 8). Cl. X. Fried Zoltan (6920, 1, 7—9, 31—6, 8, 41, 2, 6, 9). *L. 3* cl. VIII. Ambruș Horia (E : 2319, 21 ; 6850, 62, 7, 79, 81, 927), Condor D. Diana (E : 2305, 7—13). Cl. IX. *Apșan* Dan (E : 2319—22 ; 6840—3, 7—53, 5—7, 9—70, 2, 3, 4). Anonim (E : 2333, 4, 50, 2, 64—6 ; 69—4, 7, 8, 41, 6, 58, 61, 3, 87—9, 95, 6, 8—7005, 7, 21, 2, 30). Cl. X. *Grosfeld Mihai* (6866—70, 2, 8—85, 7—90, 916, 20, 1, 7—36, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 5, 7—9, 61—4, 6, 7, 71—3, 5, 80, 5—90, 2, 5—8, 7000—3, 7), Pop Livia (6854, 9, 62, 4, 85, 915, 6, 31, 6, 7, 41, 5, 6, 9, 50, 4, 9, 61, 73, 82, 97, 7001—3, 5, 7, 45), Vasilov Angela 6863, 5, 80, 4, 5, 928, 9, 32, 43, 5, 57, 90, 7002—4).

BAIA SPRIE. *L. 1* cl. IX. Trif Ioan (E : 2346 ; 6864, 925, 45, 5, 9, 95, 7001—3, 5, 7, 10, 22, 7, 73, 80, 4, 91). Cl. X. Plăcintă Valentina (6847—51, 62, 4, 7—70, 9, 80, 1, 927, 9, 31, 3, 7, 41, 2, 5, 6, 50, 4, 7).

BALȘ (Oltenia). *L. 1* cl. IX. Alexandru Ovidiu (E : 2320, 1, 33, 50, 3 ; 6841, 7, 8, 50, 64, 7—70, 931—3, 42, 6, 9, 88, 7003).

BĂICOI (Ploiești). *L. 1* cl. XI. *Roman I. Ion* (6840—4, 7—50, 2, 4, 9, 62, 4, 7, 9, 79—81, 4, 7, 909, 19, 27—38, 40—7, 9—52, 4, 6, 62, 3, 80, 8, 90, , 6, 7003—5, 7, 23, 45).

BĂLCEȘTI (Oltenia). *L. 1* cl. XI *Diaconu Constantin* (6842, 7—52, 4, 9, 62, 4, 5, 9, 79, 81, 3, 4, 916, 27—36, 8, 41—3, 5, 6, 9, 50 4, 7).

BĂNEASA (Dobrogea). Absolvent *Filimon Nicolae* (6920, 2, 3, 5, 7—41, 3—58, 61, 9, 70, 3, 5, 80, 2—4, 6).

BECHET (Oltenia). *L. 1* cl. IX. *Popa Ion* (E : 2319—22, 33, 50 ; 6847—9, 51, 5, 62, 4, 5, 8, 9, 79—81, 3, 4, 920, 7, 31—4, 8, 45, 6, 9, 63, 88, 95, 6, 8, 7002, 21).

Beiuș. *L1* cl. VII. Covaci Iosif (E : 2323—8, 37, 8, 56, 9, 65). Laslău Ioan (E : 2308, 9, 14, 24—6, 8, 33). Cl. IX. Gavruță Pascu (6842, 7—9, 52, 4, 9, 62, 4, 7, 9, 70, 9, 81, 3, 90, 902, 30—2, 8, 46, 9, 50, 4, 7003), Toma Ioan (6848, 62, 6, 7, 79, 81, 8, 927, 8, 31—3, 8).

BISTRIȚA. Absolvent *Verveagă T.* (6840—2, 6—57, 60—6, 8—70, 2, 3, 5—89, 96, 901, 5, 20, 2—4, 6—38, 40—7, 9—52, 4—9, 62—4, 73). *L. 1* cl. IX. Borșa Mariana (E : 2323—6, 33, 6, 8, 9, 56—9, 65, 6), Gagea Alexandru (E : 2319 ; 65—70, 927, 31—3). Cl. X. Cotoc Ion (6847——9, 51, 5, 6, 62, 4, 6—70, 8—81, 3, 4, 8, 9), 927, 8, 30—5, 8, 41, 2, 6, 57), Crișan Radu (6927, 30—3, 6, 42, 57, 7002, 3, 5, 77). Cl. XI. *Lupșa Nicolae* (6840, 7—50, 2, 4, 5, 9, 62, 4, 5, 9, 73, 9, 81, 4, 7, 8, 96, 8, 901, 22, 3, 7—32, 6, 41, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 64, 83). Mihăilaș Liana (6920—3, 30—3, 6, 7, 40, 1, 3, 5—7, 9, 52, 4, 7, 63, 71, 2, 5, 80, 7045). *L. 2* cl. X. Mreneș Tudor 66921, 52, 7, 9, 61—3, 7005, 10, 48, 9, 91).

BÂRCA (Oltenia). Absolvent *Crânguș Florea* (6840, 1, 5, 9—53, 5, 8, 60, 2, 6—70, 3, 6—81, 3—6, 8, 909, 22, 7—31, 3, 4, 41, 6, 9—51, 4). *L. 1* cl. VIII. Popa Ștefan (E : 2307, 8, 10, 12, 8—20, 2, 4—7, 33, 56 ; 6847—50, 2, 62, 4, 79—81, 927, 8, 31—3, 46, 95, 6, 7002, 3). Cl.IX. Teodorescu Dalia (6847, 8, 51, 5, 6, 621, 5, 9, 70, 88, 934, 5, 57). Cl. X. *Drăgoi Marin* (6842, 7—9, 51—4, 7, 9, 62, 5, 6, 8—70, 3, 83, 4, 96, 927, 9—33, 6, 8, 9, 41—3, 5, 6, 8, 9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 3, 4, 95, 6, 7002, 3, 45). Cl. XI. *Mitu Ion* (6840—2, 7, 9—53, 7, 62—70, 3, 9—81, 3, 4, 8, 93, 916, 21, 7—30, 2, 3, 6, 9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 4, 6, 7, 63, 86, 96—8, 7002, 4, 45, 110).

BARCII (Argeș). *S. g.* cl. VIII. Radu Hristache (E : 2307, 8, 12—5, 8—21).

BÂRLAD. *L. 1* cl. X. Țibuleac Mircea (6847—9, 54, 64, 79, 81, 96, 927, 31, 4, 41, 6, 50, 4, 6, 7002, 3). Cl. XI. Ciobotaru Maria (6927, 36—8, 41—3, 6, 9, 57, 63, 7001—3, 21, 4), Gălușcă Dan (6840, 53, 9, 62, 6—9, 79—81, 4, 8, 923, 4, 7, 8, 30—2, 8, 50, 2, 4). *L. 2* cl. IX. Manza Sorin (E : 2324—6, 8, 36—9, 50, 6, 9, 65, 6). Radoveanu Eadu (2324—6, 36, 7, 9, 50, 8, 9, 63, 5, 6). Cl. X. Agafiței Alexandru (6920, 37, 42, 56, 88, 90, 5, 7002, 3, 5, 45, 54—6, 63, 6, 8, 70, 7, 80). L. 3 cl.VIII. Agafiței Silvia (E : 2308, 11, 3, 6, 9, 33, 6, 8, 51, 7, 8, 65; 6927, 31, 7053, 63), Duda Doina (E : 2316, 20 4—8, 33, 05 ; 6847, 8, 68, 930—3, 96). Cl. IX. *Cânepă Victor* (E : 2333, 4, 48, 50, 1, 5 ; 6852, 4, 920, 1, 7—38, 40—2, 5, 9—52, 4—7, 63, 95—7003, 10, 4, 21, 2, 4), Hâncu Dan (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 8, 9, 79, 81, 8, 938, 46, 50, 4, 63). Cl. X. *Nichifor Ionel* (E : 2319—21, 33—5, 49—52 ; 6841, 7—51, 5, 62—70, 9—81, 3, 4, 8, 916, 20, 1, 7—36, 42, 5, 6, 9, 57, 8, 60, 3, 83, 6—9, 95, 6, 8, 9, 7001—3, 8, 20, 2, 4).

BOLINTINUL DIN VALE (Titu). *L. 1* IX. Dumitru Constantin (6847—9, 51, 64—6, 79, 81, 928, 32, 8, 46, 57), Niculae Pavel (6847, 9, 62, 4, 81, 4, 8, 90, 927, 31, 2, 4, 8, 32, 42, 7, 7003), Tudose Constantin (6847—9, 62, 4, 79—81, 8, 9, 927, 31, 3, 46, 57 ; E : 2319).

BOROAIA (Suceava). Cl. VIII. Petrescu Viorica (E : 2307, 8, 13, 8, 24—6, 8, 33, 6, 7, 9, 50, 9, 65, 6).

BORȘA. *L. 2* cl. IX. Timiș Pricop (E : 2319—21, 33, 4 ; 6847—9, 62—70, 8—81, 3, 6, 915, 6, 27—34, 6—8, 41, 2, 5, 6, 57).

BOTOȘANI. *L. 1* cl. X. Vexler Dan (6888, 95, 916, 22, 3, 7, 8, 31—4, 6, 8, 41—3, 6, 9, 50, 6, 7, 90, 5—7, 7002, 3, 5, 45), Zăiceecu Marian (6853, 64, 7, 80, 5, 927, 8, 30, 2, 3, 46, 50, 4). Cl. XI. Griogoriu Livia (6847, 8, 52, 4, 9, 62, 4, 5, 79, 81, 3, 4). *L. 2* cl. VIII. Tașcu Stefanica (E : 2301, 2, 7, 8, 11, 4—6).

BOZOVICI (Banat). *L. 1* cl. VIII. Ignea Ana (E : 2307, 9, 10, 23—9, 33, 4, 6—9, 41, 56, 9, 61), Orbulescu Petre (E : 2323, 5, 6, 8, 40, 56, 7, 9), Piescu Călina ÎE : 2323, 4, 7, 8, 37—9, 54). Cl. XI. Burac Iosif (6841, 3, 9, 67, 9, 927, 8, 30—4 8, 46, 9, 50, 4), Lopătiță Tiberiu (6945, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 90, 1, 5, 6, 9, 7000, 3), Rădulea Grigore (6848, 50, 2, 62, 5, 7, 9, 79—81, 927, 30—4, 41, 6, 9, 50, 4), *Vălușescu Ilie* (6847, 8, 52, 3, 60—6, 8—70, 7—88, 96, 905, 14, 6, 27, 9—38, 41—7, 9—523, 4, 6—8, 63).

BRAD. *S. g. 1* cl. VII. Năstăsoiu Lidia (E : 2301, 2, 11, 6, 23—6). S. g. 2 cl. VII. Cordonescu Gabriel (E : 2323—8, 33, 6—8, 50). *L. 1* cl. X. Clesiu Romulus (6847, 9, 51, 2, 64, 6, 8, 79, 81, 927, 31, 2, 6—8, 41—3, 9, 50, 2, 4, 95—7, 7002, 3, 5, 19, 45), Drig Simion (6847, 8, 52, 4, 62, 4—70, 9, 81, 922, 7, 8, 30—3, 6, 41, 50, 4), Janky Alexandru (6920, 2, 4, 36—9 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 8, 60, 1, 3, 80, 90—2, 7005, 7, 24, 5, 8, 45). Cl. XI. Fornade Corneliu (6927—34, 7, 41, 2, 6, 50, 4, 96, 9, 7002, 3, 5, 45).

BRAȘOV. *S. g.* 3 cl. V. Corniciuc Ionel (E : 2302, 7—9, 11, 2, 25, 8). Cl. VIII. Corniciuc Mircea (E : 2307—9, 11—22, 4—6, 8, 9, 33, 6—9, 50), Glușan Ileana (E : 2307, 8, 12, 20, 4—6, 9, 33, 7—9, 50). *L. 1* cl. IX *Bătătorescu Anton* (6840, 1, 7—51, 5—7, 61—4, 6, 8—70, 2, 8, 81, 8, 9, 920—2, 7—33, 5, 6, 8, 42, 6, 9, 57). *L. 4* cl. VIII. Olteanu Valentina (E : 2324, 37—9, 56, 7, 9, 60, 6). Cl. IX. *Bontaș Vasile* (E : 2333, 50, 1, 3 ; 6872, 80, 3, 4, 7—90, 915, 21, 7, 35, 6, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 7—9, 62—4, 5, 87—9, 95—7, 9, 7001—4, 10, 3, 9, 21—4, 40). Cl. X. Nichita Victor (6846—50, 2, 4, 7—9, 62, 4—70, 3, 4, 8—82, 9, 915), *Pitiș Gh.* (6922, 7, 8, 30—4, 6—46, 9—54, 6, 7, 60, 4, 6, 75, 80, 8, 90—2, 5, 6, 8, 9, 7002, 3, 5, 7, 16, 7, 21, 2, 44, 5, 7). Cl. XI. *Colceriu Mihai* (6842, 9, 52—4, 6, 7, 63, 65, 6, 8, 70, 8—80, 2—4, 8—90, 8, 912, 20—4, 30—3, 5, 6, 8, 411, 2, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 9), *Colora Gheorghe* (6840, 2, 7—59, 62—70, 3—85, 7—90, 6—8, 912, 5, 6, 20—2, 7, 8, 30—5, 8, 46, 9, 50, 2, 7, 63, 5, 80, 6), *Marinov Corneliu* (6842, 6—54, 7—9, 61—9, 4—81, 3—8, 96, 8, 902, 5, 9, 20—3, 5, 7—9, 31—42, 4—8, 63, 4, 7, 9, 75, 8, 80, 7—91, 3, 5—7006, 10, 3, 4, 6, 7, 21, 31, 43—47). *L. 5* V. Constantinescu Iulia (E : 2307, 13, 25, 6, 8, 33, 6, 7). Cl. X. Enache Valeriu (6847—9, 62—6, 9, 79, 81, 8, 930). *Seral* cl. XI. Prună Simion (6846—52, 4, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 81, 4 8, 927, 9, 31—4, 6, 8, 43, 6, 9, 50, 4, 7, 63).

BRĂILA. Absolvent *Frangu Octavian* (6841, 3, 7—55, 7, 9—70, 6, 8—81, 3—90, 5, 6, 903, 9, 14, 21, 7—57, 60, 2—5, 8, 61, 3, 80, 95, 6, 8—7000 2, 3, 5, 22, 4, 37), *S. g. 18* cl. VII. Vintilă Tiberiu (E : 2336—9, 55—7, 9, 62). *S. g.* 22 cl. VIII Dragomir Gh. (E : 2323—7, 33, 4, 7—9, 45, 53). *L. 2* cl. X. *Lemnaru Liana* (6920, 1, 7—36, 8, 42, 5, 6, 52, 5, 7—9, 63, 6, 7, 87—9, 95, 6, 8—7003, 10, 21, 3). *L.* cl. IX. Bucur Camelia (E : 2319, 21 ; 6864, 9, 70, 9, 81, 3, 4, 8, 927, 38, 49), Cărbunaru Mihai (E : 2307, 8, 11, 2, 6, 9, 21, 3—9, 33 ; 6847, 8, 62, 79—81, 927, 8, 31—3).

BRĂNEȘTI (București). Cl. XI. Șeitan Marian (6847, 9, 50, 2, 4, 9, 64, 8, 81, 938, 46, 54, 7002).

BREAZA (Ploiești). *S. g.* cl. VII. Muscalu Gh. (E : 2323—5, 8, 9, 36, 8, 9). Absolvent Toader Marian (6841, 5—9, 52—4, 9, 611, 2, 5, 73, 4, 6, 9, 81, 6, 8, 96). *L. 1* Albescu C. 6840, 7—9, 62, 4, 5, 9, 78, 80, 1 ; 2319), *Cărtoage Vasile* (E : 2319—22 ; 6840, 1, 3, 7—52,

4—7, 9, 60, 2—70, 2, 8, 9, 81—4, 7—90. 5, 6, 8, 909, 12, 5, 6, 20, 1, 4, 7—36, 8—43, 6—7, 9, 50, 2—64, 6, 7, 9, 71—3, 5, 80, 5—9, 91, 5—8, 7000—5, 7, 10, 3—5, 9, 24, 6, 7, 31, 48—51, 9—62, 6, 7, 9, 70, 3, 4) Tăleanu Constantin (E : 2319, 20, 2 ; 6440, 1, 7—50, 62, 4—71, 8—81, 4, 6). Cl. X. Piuaru (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 9, 7, 79, 81, 4, 8, 920, 7, 31, 8, 46, 50, 4, 7003, 28). Cl. XI Firescu Teodor (6847, 9, 53, 62, 4, 9, 79, 811, 927, 30, 4, 6, 41, 3, 50, 95, 7002—4), Oancea Petru (6864, 8, 70, 80, 4, 927—9, 31, 3, 4, 6, 41, 6, 9).

BUCUREȘTI. Absolvent Anton Gheorghe (6988, 95—8, 7000, 2—4, 6, 17, 21, 44, 5, 7), Kirmaier Eduard (6847—9, 52, 9, 62, 4, 6, 79, 81, 927, 30—3, 8, 44, 6, 9—51, 4, 7, 86). Student *Cărbunaru Const.* (6840, 4, 6, 55, 6, 8, 60, 1, 72, 5, 6, 87—90, 6, 920, 2, 3, 8, 30, 5—45, 7, 8—55, 60, 1, 3, 71, 5), Dache Const. (6934, 9, 71, 83, 6, 8, 93, 6, 8, 7017, 21, 2, 37, 43), *Dumitraș C. Dan* (6920—4, 7—57, 64, 73, 5, 7, 87—91, 3—7006, 14, 6, 39, 43—5, 7), Gonciar Ștefan (7017, 21, 2, 35, 7, 40, 3—5, 7, 66, 91, 107, 14), *Marinov Corneliu* (7048—56, 9, 64, 6, 8—70, 2—4, 6—8, 80, 1, 4, 6—9. 91, 3, 4, 6, 102, 5, 10, 4, 7), *Mircan Marius* (6840, 1, 5—9, 52—6, 61—71, 4, 8—81, 3, 4, 8—90, 6, 8, 909, 12, 4, 6, 20, 1, 3, 7—38, 40—54, 6), *Oproescu V. Gabriel* (6854, 902, 20—4, 7, 57, 9, 63, 4, 72, 5, 7, 80, 3, 8—91, 5—7007, 16, 7, 21, 4, 5, 73. 6, 110), *Ursulescu Octavian* (6840—55, 7, 9—70, 2—4, 6, 7, 8—81 3, 4, 6—8, 96—8, 903, 5, 9, 14, 6). *S. g.* 3 cl. VIII. Stoiciu Gh. (E : 2307, 8, 11, 24—6, 8, 3, 7, 8, 54, 6, 9, 62, 5). *S. g.* 5, cl. VII, Tițeica Ștefana (E : 2307, 11, 2, 4, 23—6). *S. g. 11* cl. VIII. *Necula Gheorghe* (E : 2307—14, 6, 8, 23—9, 33, 7—50, 3 ; 6849, 64, 6, 8, 70, 80, 928, 30, 2, 3, 95, 6, 7002). *S. g.* 32 cl. VII. *Celenti Dan* (E : 2307, 8, 11, 4—6, 23—8, 33, 6—40, 2, 7002 ; 6930, 2, 3, 57). *S. g. 50* cl. VII. Ianuș Gh. (E : 2307, 8, 13, 4, 21, 8, 31, 8, 40 ; 6916, 27, 32). *S. g. 51* cl. VIII. Eeremia Mihaela (E : 2315, 8, 9, 21, 4—8, 33, 6, 6, 9, 44, 50, 6—9, 63—6). *S. g. 56* cl. VII. Spătaru Dan (E : 2323—8, 37, 8, 53, 4, 6, 9, 64—6), Voinescu Radu (E : 2323—8, 37, 56, 9, 64, 5). *S. g. 71* cl. VIII. *Sergiescu Vlad* (E : 2323—8, 30 ; 6847—52, 62, 4—8, 70, 8—81, 3, 916, 27—36, 41, 2, 5, 6, 57, 9). *S. g.* 76 cl. V. Arapu Mircea (E : 2307, 8, 11, 23—8, 36—9, 45, 54, 6—60). *S. g.* 103 cl. VIII. Marinescu Viorel (E : 2324—9, 33, 6, 40, 5). *S. g. 111* cl. VIII. Herman Stelian (E : 2307, 8, 12, 3, 24, 5, 7, 8). *S. g. 121* cl. VIII. Ionescu Florin (E ; 2313, 6, 8, 25—8, 31, 3, 56—60, 2—6). *S. g. 122* cl. VII. Brătescu Șt. Anca (E : 3337—40, 2, 54, 6—8), Floricâ Georgiana (E : 2324—6, 37, 44, 6, 7, 50, 65), Leonte Viviana (E : 2336—9, 54, 6, 54, 6, 37, 44, 6, 7, 50, 64), Nistor Irina (E : 2307, 8, 14—6, 24—6, 8, 33), Rotschild (E : 2323—8, 36—8). *S. g. 142* cl. VIII. Dobre Silvia (E : 2295, 301, 11, 3, 5, 23, 5, 6). *S. g. 146* cl. VIII. Bădescu Smaranda (E : 2311, 3—5, 7, 7, 20, 3—8, 30, 3, 4 ; 6870, 928, 30, 2, 3). *S. g. 156* cl. VII Ștefănescu Dan (E : 2307—12, 4—6, 8, 23—30, 3). *S. g. 164* cl. VIII. Șăruleșteanu Daniela (E : 2311—4, 6, 7, 9, 21, 3, 9, 30, 56, 62 ; 6927, 8, 30, 1, 3, 4, 6, 42, 5, 57). *S. g. 166* cl. VII. Cernescu G. Marina (E : 2307—14, 23—9, 33, 6—9). *S. g. 169* cl. VII, Hoisescu Nicolae (E : 2323, 5—8, 36—8). Cl. VIII. *Vijelie Luminița* (E : 2307, 8, 10, 2—31, 3, 4 ; 6920, 3, 7—9, 31, 5, 8, 57, 63). *S. g. 173* cl. V. Andrievici Bogdan (E : 2307, 8, 24, 5, 36—9). *S. g. Vasile Alecsandri* cl. VIII. Trutzer Victor (E : 2316, 9—22, 32, 5, 46, 50, 1 ; 6927, 32, 3, 96, 7, 7002, 5). *Fără frecvență* cl. VII. *Drăgușin Alexandru* (E : 2307, 8, 10—3, 6, 9, 20, 2, 5, 6, 8, 33, 4, 6—9, 53 ; 6847—9, 52, 62—5, 8, 9, 79—81, 916, 27, 8, 31, 2, 46, 51, 86, 95, 7002, 3, 22). *L. 1* cl. IX *Adrian Sorin* (E : 2319—21 ; 6853, 5, 9, 80, 7, 9, 90, 921, 7—34, 6, 8, 41, 5, 6, 9, 52, 7, 61, 4, 7, 88, 95, 6, 7002, 3, 21), Boca Cristian Werner (E : 2322, 3 ; 6849, 66, 8, 70, 80, 3, 927, 30—3, 57, 96, 7002), Ciobanu Mihaela (E : 2324—6, 8, 36, 9, 50, 7—9, 65, 6), Misescu Marieta (E : 2323—31, 7—9), Rușinoiu Carmen (E : 2324, 5, 8, 58, 9, 64—6, 927, 8, 31—3), Teișanu Cornel (E : 2333, 50, 1 ; 6851, 3, 5, 66, 8—70, 83, 4, 7, 8, 927, 8, 30—3, 6—8, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 96, 7002—4). Cl. X. Croitoru Stibina (6988, 7001—3, 20, 2, 30, 65, 6, 8, 70, 3, 80, 1, 91, 110), Hahn Radu (6850, 3, 65, 6, 9, 70, 80, 4, 7, 8, 931—3), Jiletdovici Iulian (6860, 936—9, 41—3, 5—7, 50, 2, 4, 6, 7045), Popa Cornel (6933, 95—7, 7002—4, 59, 61, 6, 73, 6, 8, 80, 110), Udrea Mirică (6928, 32, 4, 7, 41, 5, 52, 75, 95—7, 7002—5, 21). Cl. XI. Andrei Romulus (6841, 7—9, 53, 4, 7, 9, 62, 3, 5, 6, 70, 9, 84, 91, 931, 6—42, 4, 6, 9, 51, 2, 4, 5, 75), Cipere Lavinia (6927, 31, 46, 9, 50, 4, 63, 90, 7003, 14, 28, 45, 80). *L. 3 Ion Neculce* cl. VIII Georgescu Doina (E : 2319, 21 ; 6848, 62, 7, 9, 81, 927, 31, 4), Nicolescu Nicolae (E : 2324, 5, 36, 56, 8, 9, 65, 6 ; 6927, 32, 96, 7054). Cl. IX. Georgescu M. Cornelia (E : 2319, 21 ; 6847—9, 62, 4, 5, 7, 79, 81, 927, 31, 4, 46). Cl. XI. Popescu Mihail (6853, 80, 927, 30—4, 41, 5, 9, 50, 4). *L. 5 Mihail Sadoveanu* cl. VI. Paul Cristina (E : 2323, 5—7, 36—40). Cl. VII. Cosma Gheorghe (E : 2308, 11—3, 5, 24, 6—8), Doran Andrei (E : 2324, 7, 8, 8—40, 2, 56, 7, 9). Cl. VIII. Kaufman Miron (E : 2337—9, 50, 6—9, 64—69 6995, 6, 7002, 3, 5, 59). Cll. IX. Horia Liviu (6921, 7—36, 8, 41, 3, 5, 6, 9, 54, 64, 7002), Marinescu Ruxandra (E : 2307, 8, 19 ; 6847—9, 62, 4, 5, 8, 9, 79, 81, 916). Cl. X. Basch Vladimir (6842, 3, 7—50. 2, 4, 9, 62, 4, 6—70, 4, 9—81, 3, 4, 88, 927, 8, 30—2), *Manolache Nicolae* (6872, 8, 90, 1, 7, 920—2, 4, 8, 32, 3, 5, 6, 42, 62, 4, 5, 7, 83, 7—90, 3. 5—7004, 7, 8, 17, 8, 20—2, 4, 44, 5, 7, 9, 50—2, 4, 9, 64, 9, 73, 6—8, 80, 1, 3, 9, 95, 111, 17, P), Cl. XI. Mariotti Răsvan (6920—3, 7, 8, 32, 3, 5—7, 9, 41—3, 53, 62, 87, 9, 90 7005, 21, 4.

45). *L. 6* cl. VIII Weiner Irina (E : 2307, 8, 10—4, 6, 7, 23—32, 6, 8—42, 5—7, 50). Cl. XI Frăţilă Fliade (6920—2, 7—39, 41—7, 9—56, 63, 75). *L. 7 I. L. Caragiale* Cl. VII. Brădăţeanu Mihaela (E : 2307, 8, 11—3, 23—5). Cl. VIII. Mateescu Alexandru (E : 2307, 8, 11, 2, 9, 21, 4—6, 8, 47—9, 52, 6, 8, 79, 81, 927, 8, 31, 2, 4), Nichita Anca (E : 2307, 8, 11, 3, 9, 21, 4—6, 36—8 ; 6847, 8, 52, 62, 927, 8, 30—3, 95, 6, 7002), Redlinger Daria (E : 2323—32, 6—40, 2, 50, 3). Cl. IX. Badea V. Teodor (6887, 8, 90, 936, 7, 41, 2, 5, 6, 52, 7, 9). *L. 8* cl. VIII. *Cinteza Mircea* (E : 2312—8, 9—22, 4—36, 8—41, 4—6, 50, 3—9, 61, 2, 4—6, 7077). *L. 10* cl. VII. Brateş Nanu (E : 2308, 11, 3, 4, 7, 8, 33, 6—8, 45, 56, 7, 9, 66), Coriciu I. Cezar (E : 2323—9, 33, 6—41, 4, 5, 50), Gafiţa Gabriel (E : 2337, 8, 40, 54, 6, 7, 9, 66). Weintraub Andrei (E : 2308, 11—3, 6, 24—8). Cl. VIII. Tigoiu Victor (E : 2319, 21, 33 ; 6847, 8, 62, 4, 7, 79, 81, 927). Cl. IX Mihăileanu Nicoleta (E : 2333, 50, 63—80 ; 6927, 34, 7076). Cl. X. Benescu Marina (6802, 11, 2, 55, 6, 87—90, 920, 1, 57), Bordei Carmen (6842—4, 8, 9, 51, 9, 62, 4, 8—70, 9—81, 927, 8, 31—3, 41, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 90, 5, 6, 7002, 3, 23, 32, 45). *L. 11* cl. VIII. *Pascaru Aurel* (E : 2333, 50, 1, 64—6, 5851, 3, 5, 63, 80, 3—5, 8, 920, 7—33, 5—8, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 7, 63, 4, 95—8, 7002—5, 28). Cl. IX. Popescu Eugeniu (E : 2348, 50, 1, 3, 63, 4, 6 ; 6995—7, 9, 7002, 5, 6, 24, 77), Vladu Adrian (E : 2324, 8, 34, 7, 9, 45, 7, 53), Vlăduţescu Radu (E : 2319, 22, 3, 508 6847, 9, 62, 4, 5, 67, 79—81, 3, 7, 927, 31, 2, 7, 41, 6, 9, 96, 7, 7003, 24). Cl. X. Sutaşu Marius (6840, 1, 53—5, 63—86, 92, 6, 909, 20, 1, 7—38, 40—3, 6, 7, 9, 50, 2—4, 6, 7, 63, 4, 72, 86). Cl. XI. Diaconescu Ştefan (6848—54, 7, 8, 62—70, 3, 88), *Rădulescu Dorin* (6920—4, 7—39, 41—7, 9, 50, 2, 4, 7, 60, 3, 9, 71, 87, 8, 95—7, 7000, 2—4, 17, 21, 7), *Teodorescu Valentin* (6840—4, 7—55, 7—9, 62—70, 4, 8—84, 6). *L. 12* cl. VI. Rizescu Marieta (E : 2323—6, 36, 9, 56, 9). Cl. IX. *Cartianu Dan* (6840, 1, 5, 7—55, 9, 60, 2—70, 2, 7—9, 8, 47—90, 920, 1, 7, 9, 31, 4—8, 41—7, 9—52, 4, 5, 7, 9, 87—9, 91, 3, 8—7001, 3, 6, 13, 4, 6, 21, 4, 8, 31, 43, 4 ; E : 2319—22). Cl. X. Drăgoi Nicolae (6841, 51, 2, 4, 67, 84, 8, 923, 7, 8, 31—3, 67, 50, 4, 7) *Ralescu Dan* (6924, 7—34, 6—41, 6, 9, 51—3, 5, 7—9, 6 3, 75, 82, 3, 7—90, 5, 7001—4, 14, 21, 4, 8, 35, 42, 4, 5, 7). E : 2348, 50, 51 P) *L. 13* cl. IX. *Arapu Bogdan* (E : 2319, 21, 2, 33, 48, 50, 1, 3, 63—6 ; 6862, 3, 5—7, 78, 80, 3, 9122, 6, 27, 8, 30—5, 8, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 7, 8, 86, 7, 9, 95—7005, 10, 3, 9, 21, 2, 4, 48—52, 9—62, 4, 6, 8—70, 6, 7, 80, 91), Bănuţă Florea (E : 2333, 50, 64—6 ; 6840, 1, 8—50, 64—7, 70, 80, 3, 4, 927, 9- 32, 4, 45, 6, 9, 60, 2, 88, 96, 7003, 24, 91), *Dumitrache Cristian* (E : 2307, 8, 11, 2, 5, 9—21, 3—8, 33, 6—9, 45, 7, 50 ; 6847—9, 62—6, 79, 81, 5, 927, 8, 32, 3, 96, 7, 7002—5), *Lăzărescu Răducu* (E : 2333, 48, 50, 1 ; 6927, 8, 36—8, 42, 5, 54, 5, 8, 61—3, 87—9, 95—7005, 10, 3, 9, 51, 9—61, 8—70, 6, 81), *Lăzărescu Sorin* (E : 2333, 50, 1, 65, 6 ; 6820, 1, 7—35, 41, 6, 9, 50, 4, 5, 7, 60, 2, 87, 9, 95—7002, 5, 66, 80, 91), Roşu Eugen (E : 2348—51, 3 ; 6987—9, 95, 6, 8—7000, 2, 4, 14, 20, 3, 4, 51, 2, 77, 8, 80, 91). Cl. X. Capră Livia (6927, 8, 30—2, 4, 7, 9, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 4, 6, 7, 7002, 3, 5), Şerban Cristian (6842, 4, 47, 9—54, 62, 4, 5, 7—70, 3, 8—81, 3, 916, 27, 8, 30—6, 46, 46, 88, 96, 7, 7002, 3, 5). *L. 15* cl. IX. Ghica S. (E : 2305, 6, 19, 20—2 ; 6811, 87, 8 90, 915, 57), *L. 16* cl. IX Vasiliu Alexandru (E : 2324—7, 31, 3, 4, 6, 7, 9, 45, 61). *L. 17* cl. X. *Boiangiu Theodor* (6840, 1, 3, 51—3, 5, 63, 6—70, 2—4, 8, 9, 81, 3, 5, 7, 920, 1, 3, 4, 7, 8, 30—9, 41—3, 5, 63, 6—70, 2—4, 8, 9, 81, 3, 5, 7, 8, 920, 1, 3, 4, 7, 8, 30—9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 3, 5—7), *Botez Dan* (6842, 3, 7, 8, 50, 2, 5, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 81, 93, 902, 16, 27, 34, 8, 46, 9, 50, 3, 9, 73, 83, 7021, 2, 50—2, 3, 65, 6, 73, 81). Cl. XI. *Almer David* (6840—50, 2—5, 61—9, 72—7, 9—81, 3—8, 95—6, 901, 2, 9, 14, 9, 22, 7, 9—31, 4, 8, 46, 50, 4, 6), *Suciu Paul* (6840—5, 7—70, 2—90, 2—8, 901, 2, 4, 5, 9, 12, 4—6, 9, 21, 2. 4, 7, 8, 30—8, 41—5, 7, 9, 54, 9, 60, 2, 4, 6, 79, 72, 3, 5, 83). *L. 18 Mihail Eminescu* cl. X. Musceleanu Ion (6928, 30, 2, 3, 77, 8, 41, 3, 5, 6, 50 4, 9, 60, 3, 97), Schein D. Alexandru (6927, 8, 31—6, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 56, 7, 60, 95, 6, 9, 7002, 3, 5, 10, 21, 2, 68, 70, 3, 6, 80). *L. 19* cl. XI. *Ilie C. Romeo* (6843, 54, 66, 80, 8, 90, 5, 921, 7—33, 6, 8, 43, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 6, 95—7, 7001—3, 5, 24, 49, 55, 60, 1, 3, 4, 6, 9, 77, 8, 80). *L. 20 Gheorghe Şincai* cl. IX. Angelescu A. Cornelia (6842, 4, 7, 9, 50, 3, 62, 4, 7—70, 3, 8, 9, 81, 3, 916, 27, 8, 30—3). Cl. X. Velula Timucin (6847—50, 64, 5, 7—9, 79, 81, 3). Cl. XI. Sfaiţer Luiza (6844, 9, 52, 4, 62, 4, 8, 84, 936, 41, 3, 9, 50, 2, 6). *L. 21* cl. VI. *Enescu Ion* (E : 2307—9, 11, 2, 4, 3, 9, 50, 2, 6). *L. 21* 6, 24—8, 30, 2, 36—40, 5 ; 6849, 52, 66, 8, 70, 8, 809, 916, 28, 30, 2, 3, 5, 6, 42, 5, 57, 7002). cl. VIII *Sergiescu Vlad* (6921, 49, 52, 95—97, 7001, 6, 19, 24 E : 2231—8, 40, 2, 4 Cl. X. Singer Claude (6840, 7—9, 62, 4—9, 79, 81, 4, 7). *L. 22 Gheorghe Lazăr* cl. IX. Strujan Vladimir (E : 2319—22, 50, 1 ; 6887—90, 916, 57, 60—2, 7021, 4). Cl. X. Cristoloveanu Sorin (6987—9, 95—7, 9, 7000, 2, 4, 5, 21, 48, 50—2, 9, 66, 8, 70, 3, 6—8, 80), Stoian Liviu (6883, 927, 9, 31, 2, 4, 6, 8, 9, 41—3, 5—7, 9, 50, 2, 4, 5, 63, 8, 71, 3, 90, 1, 5, 6, 8, 7002, 3, 7, 14, 21, 4, 45). *L. 23* cl. IX. Nicolaescu M. A. Traian (6849, 62, 4, 5, 79, 81, 927, 30—2, 46, 9 ; E : 2319). Cl. X. *Moroiu Alexandru* (6842, 7—52, 4, 6, 9, 62—6, 9, 70, 8—81, 3—5, 8, 920, 1, 7, 8, 30—4, 6, 41—3, 6, 9, 50, 3). C. XI. Băluţă Tudor (6847—50, 2, 62, 4, 5, 8, 9, 79, 81,

8, 95, 920, 7—32, 4, 6, 8, 45, 6, 9, 50, 4, 63, 8, 95, 7, 9, 7002, 3, 45), Zaharia Dragoş (6927, 8, 30—4, 6, 8, 46, 9, 50, 4, 7, 80, 9, 95—7, 7002—4, 60, 1, 4, 9, 73). *L. 23* cl. VIII Lutaşu Liliana (E : 2307, 8, 11, 4, 6848, 62, 4, 7, 79, 81). *L. 25* cl. IX. Adam N. Silviu (E : 2321 ; 6840, 69, 80, 927, 8, 31—3, 46, 96, 7002), Odobescu Grigore (E : 2333, 50 ; 6928—30, 4, 6, 45, 95, 6, 9, 7002, 3, 24). Cl. X. Anonim (6841, 7, 9, 50, 69, 70, 8, 80, 3, 4, 927—9, 31—4, 42, 6, 9, 52, 63, 89, 96, 9, 7003, 24). Dumitru Silviu (6921, 3, 7, 8, 30, 3, 6—8, 42, 3, 5, 50, 2). *L. 26* cl. IX. Cotariu Roland (E : 2335, 48 50—3, 62—6 ; 6957, 63, 7022, 77, 80), Stoica Valentin (6840, 1, 7—51, 5, 6, 62—7Ş, 9, 81). *L. 28* cl. VIII. Brill Vlad (E : 2307, 8, 11, 4—6, 23—30, 4 ; 6849, 63, 4, 6, 8, 70, 83, 916, 30, 2, 3, 57), Ceuca Dan (E : 2325, 6, 36—9, 45, 54, 6, 9, 63,4, 6), *Kleinerman Sergiu* (E : 2307, 8, 11—4, 6, 8—22 ; 6840—3, 7—52, 4, 7, 9, 62—71, 3, 9, 81, 2, 4, 7, 8, 92, 6, 7, 915, 6), Mureşan Mihaela (E : 2307—16, 9—21, 6487—9, 52, 62—4, 6—9, 79—81, 3, 927, 41). Cl. X. Abramovici Paula (6930, 2, 43, 61, 95, 95, 6, 7003, 25, 66, 9, 7003, 25, 66, 9, 70, 3, 7, 80, 91, 117), *Bercu Mihai* (6849—54 7, 9, 62—4, 7—71, 9, 81, 31—3, 6, —8, 41, 3, 6, 9, 50, 3, 4, 63). *L. 32* cl. VII. Popovici Liviu (E : 2323—6, 8, 38, 52, 3). Cl. X. Bacivorov Ioan (6843, 7—9, 52, 5, 9, 62, 4, 6—70, 9, 80, 1, 5, 8, 927, 8, 30—4, 6, 49, 50, 4, 7, 95, 6, 9, 7002, 3). Cl. XI. *Mihai Gh.* (6841, 2, 4 7—54, 8, 9, 62, 4, 6, 9, 73, 4, 9—73, 4,9—83, 8, 902, 22, 3, 7—35, 7, 8, 41, 3, 5—7, 9, 50, 2, 4, 772, *L. 33* cl. XI *Ionescu B. Liana* (6840, 2, 3, 7—9, 51—4, 9, 62—70, 9—81, 4, 7, 8, 928, 30—2, 5, 6, 8, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 4, 9, 63, 95—7, 9, 7001—3, 5, 59, 60, 63, 9, 73, 5, 7, 81, 8), Mitrescu Vasile (6850, 3, 87, 933, 46, 9, 50, 4, 80, 95, 7002, 3). *L. 34* cl. X. Grabovski Adrian (6848, 9, 62, 4, 8, 9, 79—81, 4, 7, 8, 928, 30—2, 43, 6, 9—51, 7, 7002). *L. 35* cl. VII. Sabău Dan (E : 2336—9, 45, 55—7, 9, 60). *L. 36* cl. VI. Logofătu M. Anca (E : 2307, 8, 11, 3, 4, 6, 23, 4). *L. 37* cl. X. Kalisz Eugenia (6849, 51, 6, 65, 6, 8—70, 8, 83, 4, 7—90, 912, 27, 9, 30—6, 42, 5, 6, 9, 52, 7, 62, 95, 7003), Pantelimon Florinela (E : 2324, 54, 6—9, 63—6). Cl. VIII, Ursache Elena (E : 3708, 13, 4, 6, 25, 6, 8, 33). Cl. IX. Vrejoiu Vlad (E : 2337—9, 50, 6, 7. 9, 63—6). Cl. X. *Ioniţă Georgeta* (7920, 1, 7—36, 8, 9, 41—3, 5—7, 9, 52—4, 6, 7, 9, 62, 3, 71, 85—90, 5—7, 9000—4, 10, 3, 5, 21, 4, 8, 30, 2, 45).

BREBU (Ploieşti). *S. g. 3* cl. VIII. Vişa Florian (E : 2305, 7, 16, 25, 5 ; 6862, 79, 81).

BUFTEA (Bucureşti). *L. 1* cl. XI. Iliescu Elena (6954, 89, 95, 6, 7001, 2, 5, 54, 69, 77, 80, 91).

BUJOR (Galaţi). *L. 1* cl. X. Lepădatu Dumitru (6847—9, 62, 4, 5, 8, 79, 81, 3, 4, 8, 927—9, 31—3, 8, 41, 6, 9).

BUŞTENI (Ploieşti). *L. 1* cl. IX. Georgescu Georgeta (E : 2352, 65, 6 ; 6927, 8, 30, 2, 3, 6, 46, 96, 7003).

BUZĂU. *Absolvent* Negruţ A. Gh. (6927, 31—3, 7, 8, 41—6, 50—2, 4, 7, 95, 6, 7002). *L. 1* cl. VII. Croitoru Viorica (E : 2308, 16, 8, 25, 6, 8, 33, 7), Grigorescu Adriana (E : 2307, 8, 12—5, 25, 8). Cl. IX. Manea Dumitru (E : 2307, 8, 10—2, 4, 5, 9, 20—2 ; 6847—50, 62, 4, 6, 7, 9, 81). Cl. XI. *Gavrilă Ştefan* (6922, 39, 43, 7, 50, 2, 4, 7—9, 62—4, 6, 72, 5, 87—90, 5, 6, 7000—5, 10, 4, 21, 4, 8, 48—53, 66), Marinescu Marian (6972, 3, 5, 86, 8, 9, 90, 2, 7007, 22, 4, 45, 71), *Purice Emil* (6841—3, 7—50, 2, 4, 9. 62—6, 8, 9, 79—81, 3, 4, 8, 96, 927—34, 6, 8, 9, 41, 3, 6, 9, 60, 4, 6, 7, 96), Ştefănescu G. Geraldine (6847—51, 62, 87—9, 927—9, 31, 2, 4, 8, 45, 6, 52, 7, 61, 3, 4). C. XI. *Andreescu Liviu* (6847—50, 2, 9, 62—6, 8—70, 8—81, 3, 4, 8, 93, 6, 920, 7—47, 9—54, 7, 86), *Gheorghe Petre* (6842, 3, 7—50, 2, 3, 9, 62—4, 6, 8, 70, 3, 8—81, 3, 4, 8, 920, 7, 8, 30—5, 7—9, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 4), *Manea Nicolae* (6841—3, 9—51, 3, 7, 9, 63, 6, 8, 70, 3, 80, 4—6, 909, 16, 20, 7—34, 6—43, 5—50, 2—4, 6—8, 60, 3, 71, 5, 80, 6). Marin Ion (6849, 65, 8, 70, 80, 3, 8, 927, 30, 2, 8, 46, 9, 50, 4, 6, 95, 7002, 3, 5). *L. 2* cl. VIII. Constantin Nicolae (E : 2313, 4, 9 ; 6842, 62, 4, 7, 79, 81, 916). C. IX. Matei Elena (E : 2307, 8, 12, 6, 24—6, 9, 36, 7, 50). Cl. X. Dincă E. Luiza (6927—9, 31—3, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 57, 63, 88, 95—7, 7002, 3), Ioniţă Mircea (6922, 3, 7, 8, 30, 1, 3, 6, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 5, 63, 82), *Miron Nicolae* (6840—4, 7—59, 62, 4—70, 81, 4, 7, 8, 96, 901, 2, 20, 1, 3, 31, 8, 43, 9, 50, 4, 6—8, 80, 90). *L. 3* cl. XI. Codreanu Ion (6840, 2, 4, 5, 56, 8—61, 72, 7, 87—92, 6—9, 902).

CALAFAT. *L. 1* cl. IX. Ruiu Adrian (E : 2319—21 ; 6846—9, 55, 64—4, 9, 78, 9, 932, 63), cl. XI Voican Dan (6848, 9, 52—4, 62, 4—9, 79, 81, 4, 5, 7, 8, 927, 8, 30, 1, 3, 4, 6, 9, 50, 4).

CARACAL. *L. 1* cl. IX. *Sîrbu G. Traian* (6847—50, 5, 62—4, 6—9, 79—81, 3, 5, 916, 27, 31—4, 6—8, 41, 2, 6, 95—7, 9, 7002 ; E : 2319, 33, 50), *Virtosu Mihail*, (6921, 7—36, 8, 40—3, 5—7, 9, 50, 4, 6, 7, 60, 3, 87, 8, 95—7005, 10, 4, 21, 4, 8 ; E : 2333, 4, 50, 1, 63—6), cl. X. Marin Mihai (6847—9, 55, 62—4, 8—70, 9, 931—3, 8, 46, 9163).

CARANSEBEŞ. absolvent Man Carol (6842, 3, 53, 5, 9—70, 3, 8—81, 3, 4, 8, 95, 927, 9—33, 44, 6, 9, 50, 4, 7, 60). *L. 1* cl. IX *Budrugeac P.* (6852, 5, 6, 8, 4, 90, 916, 21, 7—9, 31—6, 8, 40—2, 5, 6, 9, 52, 68, 95, 8, 7002, 3 ; E : 2321—4, 50, 1), Eliass Regina (6847, 8, 62,

4, 7, 79, 81, 927, 31, 2, 4, 6 ; E : 2319—21), Geană Nistor (6847, 9, 62, 4, 8, 9, 79, 81, 4, 927, 31, 2, 4, 96, 7003), Ştefănescu (6848), 9, 79, 81, 929, 31, 8, 46, 9, 50 ; E : 232, 1), *Ştefănescu Mircea* (6842, 3, 7, 50—2, 6, 7, 63, 5, 6, 8, 72, 8, 83, 6, 8—90, 2, 5—7, 902, 9, 21, 27—32, 4, 8, 43, 5—7, 9—52, 4—7, 60, 4, 6, 71, 3, 5, 80, 6—8, 95, 6, 8, 7001—3, 12, 19, 21, 2, 4, 8, 48, 50—2, 9, 61, 2, 6, 9, 73, 6, 7, 80, 1 ; E : 2321, 34, 50—3, 63—6), cl. XI Miloştancu (6927, 8, 30, 1, 3, 4, 41, 3, 4, 6, 9, 50, 86, 7002—5). *L. 2* cl. IX *Fred Bortoff* 6847—51, 6, 62, 4—6, 8—70, 2, 9—81, 3, 4, 8, 9, 927—35, 8, 46, 52, 7, 60, 3, 4 ; E : 2319—22), cl. XI Brebu Ion (6841, 4, 7—9, 52, 4, 7, 9, 65, 7, 8, 83, 4, 8, 96).

CAVNIC — MARAMUREŞ. *L. 1* cl. IX Moldovan Ana (6847, 9, 62, 4, 7, 79, 81, 8 ; E : 2319—22).

CALAN — HUNEDOARA. *L. 1 cl.* IX. Găpşărescu Gh. (6840, 1, 7—51, 5, 6, 62, 4, 5, 7—70, 21 ; 9—81, 4, 8—90, 917, 21, 7—34, 8, 45, 6, 9, 57—9, 62 ; E : 2319—22, 33, 4), cl. XI Cubineţ Ion (6920, 1, 4, 7—34, 7, 41, 65, 6, 9, 50, 2, 4, 5 ,7, 8, 59, 71, 83, 91, 7007), Marincaş Mircea (6921, 7—36, 41—3, 6, 9, 50, 3, 4, 7).

CĂLĂRAŞI — BUCUREŞTI. L. 1. cl. IX. Miţa Gh. (6838, 71, 2, 82, 5, 7—91) ; E : 2305), 22), Rotaru Arvanitopol (6847, 9, 50 64, 7—70, 8—81, 3 ; E : 2319), *Sorici Ion* (6841, 7—50, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 8—81, 3, 5, 8, 927, 8, 30—4, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 57, 63 ; E : 2319—21), Stefănescu V. Radu (E : 2324—6, 9, 33, 6, 8, 40, 5, 6, 60, 1, 6, 9, 65, 6), Vişa Justinian (6847—9, 62, 4, 79, 81, 8, 927—31, 3) ; E : 2319), Vasile Eugen (6840, 1, 7—53, 5, 9, 62—7, 9, 70, 2, 8, 9, 81, 4, 8, 9), cl. X Farmache Constantin (6921, 2, 7, 30—3, 8, 6, 9, 50 7003, 73), cl. XI. Ştefănescu Ştefan (6840—4, 7—52, 4—8, 60, 2—4, 8—81, 3—5, 7—90, 2—9, 901, 2, 9, 12, 5, 6, 8, 9).

CĂLIMĂNEŞTI, *L. 1.* cl. XI. Giornoiu Doina (6923, 31, 2, 6, 8, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 6), Taloş Anca (6841, 2, 4, 8, 9, 52, 5, 6, 62, 4, 81, 8, 927, 41, 50, 7003).

CEAHLĂU — BACĂU. S. 8 ani cl. VIII. Chirilă Viorel (E : 6307, 8, 11, 2, 4, 5, 9—22), abs. Trifu Ştefan (6842, 4, 8—50, 2, 4, 60, 2, 4, 5, 8—70, 6, 8—81, 4, 7, 8).

CHIŞINĂU — CRIŞ. L. 1 cl. VIII. Puta Mircea (E : 2307, 8, 11, 3—6, 8—21, 2—8, 30, 1, 3, 5, 8, 50), cl. XI, Mara Petru (6922, 3, 7, 30—3, 6—8, 41—3, 5—7, 9, 50, 4).

CÎMPENI (Cluj). L. 1. cl. IX. Mucea Ioan (6847, 8, 50, 62, 4, 6, 8, 78, 9, 81, 3, 927, 8, 30, 32, 3, 5, 41, 5, 57, 95, 6, 7002, 61 ; E : 2319, 22, 34, 50, 2, 3, 63, 6).

CÎMPIA TURZII (Cluj). L. 1 cl. VIII. Ganea Monica (E : 2324—9, 42, 5), cl. VIII Bogdan Octavian (E : 2324—6, 8, 37, 8, 40, 56, 7, 9, 63, 5), Ganea Marius (6996, 7059 ; E : 2324, 5, 8, 9, 64—6). cl. XI. Lupescu Corina (6936—8, 43, 5—7, 9, 50, 2—5).

CÎMPINA L. 1 cl. IX. *Alexandru Doru* (6840, 7—51, 3, 5, 6, 9, 62—72, 8—81, 3—5, 7—90, 2, 80, 902—15, 6, 20, 1, 4, 7—38, 41—3, 5, 6, 9, 52, 7—64, 6, 7, 75, 86, 9, 9, 95—7005, 10 ; E : 2319—22, 33—5). Constantinescu Florin (6936, 45, 9, 62, 3, 87—9, 95, 6, 7002—4 ; E : 6333, 47), Constantinescu Valerica (6847—60, 62, 4—7, 79, 81 ; E : 2320, 1), Cucu Lucia (6927—33, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 6), Dumitrescu Ruxandra (6847—50, 62, 4—7, 79, 81 ; E : 2319—21), Dumitru Rodica (6847—50, 64, 5, 7, 8, 79, 81, 7002, 3), Mărăşescu Adrian (6847—50, 62—4, 6—9, 79, 81, 920, 7—35, 7 ; E : 2319—21), Niculescu Eugen (6863, 8, 70, 83, 930, 3, 6, 8, 42, 5, 9, 7003), Pietrovschi D. Viorel (6850, 62, 927, 30, 2—4, 6, 96, 7002—4 ; E : 2365, 6), Popa Gabriel (6847—50, 62—5, 7, 79, 81, 930—3, 46, 96, 7002, 3 ; E : 2319, 21, 33), Văcăroiu Ioana (6928, 9, 41, 5, 52, 95, 6, 8, 7002, 3 ; E : 2320—2), Birsan Horia (6847, 52, 62, 4, 79, 81, 927, 31, 44, 6, 50, 4), cl. X. Ivaşcu Florin (6929—31, 3, 5, 42, 5, 6, 52, 7, 9, 62, 3), Medvediuc Alexandru (6797, 852—4, 7, 54, 63, 4, 9, 70, 9, 81), Olteanu Luminiţa (6927—34, 41—3, 6, 9, 50, 4, 96, 7002, 3), Popescu Florin (6842, 3, 7—56, 62—72, 8—81, 3—5, 8, 9, 927—38, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 4, 7, 8, 60—3), Sfetcu Sergiu (6840, 1, 7—54, 9, 62—5, 7—70, 9—81, 3—7, 9, 927, 8, 30, 1, 3—8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 7, 8), Tănase Gabriela (6927—33, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 96), cl. XI. Cazan Marin (6847—50, 2, 4, 62, 4, 7, 9, 81, 3, 927, 8, 31, 2, 46, 50, 4) Matei Nicolae (6842σ4, 7, 54, 62, 4, 5, 7, 9, 79, 81, 4, 95, 7002, 3, 5), *Palade Mihail* (6920, 3, 7—34, 7, 9, 41—3, 6, 9, 50, 4, 6, 7, 63, 88, 95, 7001—5, 24, 45, 8, 60—4, 6, 9, 70, 80), Palade Gh. (6927—31, 3, 4, 7, 8, 41, 3, 6, 9, 50, 4), Vioreanu Marius (6840—4, 7—54, 7, 62—70, 3, 4, 9—81, 3, 4, 96, 9). L. 2 cl. V. Piperescu C. Mihai (2310, 12, 24—8, 36—8), cl. IX. Ungureanu Iliaş (6841, 7, 8, 50, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 927, 8, 30, 1, 3, E : 23 9, 20), Vişan Ion (6847—51, 62, 6—70, 9—81, 3, 9, 927, 31—4, 6, 8, 42, 6, 9, 57, 7002, 3 ; E : 2319—22), cl. X Filipescu Remus (6854, 65, 79, 80, 3, 927, 8, 31—3, 41, 6, 50, 4, 6, 7002, 3), Samoilă Gh (6847, 52, 4, 62, 4, 5, 7, 79, 81, 928, 30—2, 50, 4), Sfetcu Sergiu (6989, 95—8, 7002—4, 24, 60, 1, 3, 4, 9, 70).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. L. 1 cl. IX. Scharf Solomon (6847, 8, 62, 4, 6, 7, 9, 81, 3, 931, 2, 46), cl. XI. *Lău Gh.* (6840—43, 6—57, 9, 61—73, 6, 78—81, 3—9, 93, 5, 6, 902) 20—4, 7—57, 62, 8, 9, 71, 3, 5, 80, 7—93, 5—7005, 7, 14, 6, 21, 2, 5, 8, 37, 9, 44, 5, 7),

Motolea Fănică (6922—4, 7—34, 6—9, 41—3, 6, 7, 9, 50, 2, 4, 5, 7, 8, 60, 3, 90, 5—7, 7000, 2—4, 20, 45), Ungureanu Dragoș (6927, 8, 31—4, 41, 3, 6, 9, 50, 4).

CÎMPULUNG MUSCEL. L. 1 cl. IX Vlaicu Gh. (6847—9, 62, 4, 79, 81, 8, 932, 45 E : 2319—21), cl. Filipovici Constantin (6840, 2—4, 7—54, 7, 9, 62, 5—70, 2, 8—81, 3, 4, 9, 92, 8, 902), Hurdubeţu Sorin (6848, 50, 65, 9, 88—90, 921, 27—36, 42, 45, 9, 52, 7, 62, 87—9, 95, 6, 8, 9, 7001—4, 48, 9, 73).

CLUJ. Sc. 8 ani nr. 2 cl. VII Coţiu Neguţa Lia (2324—6, 8, 39, 54, 6, 7, 9).

Sc. 8 ani nr. 5 cl. VII Pop Traian (6928, 7002 ; E : 2307, 8, 10—2, 5, 6, 8, 23—6, 8, 30, 3, 7—40, 53),

Sc. de 8 ani 7 cl. VII. Zglobiu Nicolae (2310, 2, 3, 8, 23—8, 33, 6—9), Abs. *Begea Constantin* (6920—60, 2—5, 7, 8, 70—2, 80, 3, 86, 8, 90, 3, 5—7007, 12, 14—18, 21, 2, 4, 5, 8, 30, 1, 3, 5, 8, 4, 5, 7, 8, 50—2, 45, 9—66, 8—70, 2, 3, 6—81, 2, 3, 6—81, 4, 7—91, 3, 8, 8100, 3, 5, 7, 9, 10, 2, 4, 5, 725, 30, 1, 5, 7, 51, 9, 64), *Ianko Alexandru* (6847, 9, 50, 2, 4, 9, 62—7, 9, 70, 9—86, 8, 9, 96, 902, 5, 20, 7, 9—34, 6, 8—52, 4—7).

L. 2 cl. IX Berceanu Corneliu (2324—31, 3, 4, 45, 50, 3), Cîmăeanu Radu (6847—51, 62—6, 8, 70, 8—81, 3, 927, 8, 31—3, 6, 42—6, 9, 52, 61, 5, 95—7, 7002—4 ; E : 2319—21, 33, 50), Mihălceanu Dan (E : 2307—9, 11—4, 6, 8, 21, 3, 5—8, 33, 4, 6950, 6—8, 957, 60, 2, 71, 2, 86), Stenerman Viorica (E : 2325, 6, 33, 8, 54—7, 9, 65, 6),

L. 5 cl. VII. Ordentlich Ana (E : 2325—6, 33, 7, 8, 56, 9, 93)

L. 6 cl. VIII. Bălosu Virgil (E : 2307, 8, 15, 24—6, 8, 33), Gabriel Tudor (6847—51, 6, 62—70, 2, 8—81, 3, 7—9, 927, 8, 30, 2—6, 8, 41, 2, 5, 6, 57, 95, 6, 7002—4), Hudrea Vasile (E : 2336—40, 4, 9, 50, 6—9, 62—5).

L. 7 cl. XI Kovacs Ladislau (6852, 96, 920, 8, 9, 55, 7, 63, 96, 8, 7002, 3, 5, 7, 25, 7, 25, 8, 45).

L. 8 cl. VIII Bercea Corina (6847—9, 65, 81, 927, 31, 2), Tudoran Tudor (6847, 8, 62, 4, 8, 70, 81, 927, 31—3) E : 2307, 8, 10—2, 6, 8, 20, 3—7, 33, 4), cl. IX. Man Augustin (6847, 8, 62, 6, 8, 70, 9—81, 5, 916, 27, 8, 30, 3—4, 97, 7002, 4) E : 2307, 7, 8, 10—3, 5, 6, 9, 23—8, 33, 7—9, 45, 50), cl. X Dumitreasa L. Carmen (6927, 31, 6—9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 7, 8, 62), Oraș Lucian (6840, 1, 7—61, 62—70, 2, 8, 91, 5, 6, 8, 9, 7002, 3, 14, 51, 2, 5, 77, 80). *8* cl. XI. Farkaș (6920—4, 7—39, 41—3, 5—7, 9, 50, 52, 4—64, 6—71, 3, 5, 80, 3, 4, 6—92, 5—7003, 7—9, 14, 7—23, 6, 8, 30, 1, 7, 9, 40, 8—52, 4—6, 9—66, 8—73, 5—83, 7—9, 91, 3 — 6, 100, 5, 7, 8, 12, 4, 7) Mareș Maria (6928, 43, 7, 56, 95, 7002—4, 60, 1, 3, 70, 7), *Perl Toma* (6842—54, 9—71, 3—86, 9, 95, 6, 905, 22—5, 7—47, 9—53, 5, 7, 64, 83, 8, 90, 3—9, 7001—5, 14, 7, 43—5), Trif Damian (6921—4, 36—9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2—5, 7, 83).

L. 9 cl. IX Pop Maria (6862, 4, 7, 8, 70, 9—81, 4, 927, 31—2, 45, 6, E : 2322, 33, 50, 1).

L. 15 cl. VII Bogdan Mariana (6927, 31 96 ; E : 2324—8, 33, 6—9).

CODLEA (Brașov). student Servatius Gerhard (6850—2, 4—6, 69, 84, 7, 8, 96, 9, 931, 6—9, 41—6, 4, 6—8, 61—4, 73).

COLACU (București). L. 1 cl. X. Marcu Sz. Ioana (6864, 927, 31, 4, 6, 41, 5, 6, 9, 50, 4, 6, 7).

COMARNIC (Ploiești). L. 1 cl. IX Buzatu Constantin (6879, 84, 927, 8, 30, 2—4, 41, 2, 5, 6, 57 ; E : 2320—2), cl. X Aldasora Augustin (6942, 5, 9, 52, 7, 64, 988, 9, 95—8, 7001—4), Ghenea Ion (6921, 8, 31—3, 5, 41, 2, 5, 52, 88, 9, 95, 7, 7001, 4, E : 2333, 50, 3).

COMANEȘTI (Bacău). L. 1 Mîntici Dan (6842, 3, 7—54, 62—70, 9, 81, 3, 4).

CONSTANȚA. abs. *Răduinea C.* (6840—3, 7—54, 60—2, 4, 6, 70, 2, 4, 6, 70, 2, 3, 6, 8—81, 4—6, 9, 95, 60, 902, 27—30, 2—4, 7, 8, 40—2, 4—6, 8—50, 4, 6, 88, 7003).

Șc. de 8 ani 12 cl. VIII Ioaneș Mircea (E : 2308, 24—9, 33, 6, 8, 9, 54, 6, 7, 9—61, 3—5).

Șc. de 8 ani nr. 8 cl. VIII Trandafir Titi (6851, 62—4, 7, 80, 916 ; E : 2307, 8, 11, 2, 5—9).

L. 1 cl. IX Mîndruță Rodica (6855, 87, 927, 36, 42, 88, 9, 95, 6, 8—7000, 2—5, 24, 29, 66, 70, 8, 7, 11 ; E : 2363—6).

L. 2 cl. X Văituș Anca (6842—4, 7—50, 7, 2, 5, 8, 70, 2, 4, 8, 9, 81, 4, 7, 8, 90, 2, 6—8, 903, 19, 29, 34, 43, 6, 9, 51). cl. IX Puiu Anastase (6848, 9, 52, 62, 4, 79, 81, 902, 27, 302, 49, 7003, E : 2314, 6, 9, 20—2, 5). cl. X Blană Ionel (6840, 1, 7—54, 9, 61, 2, 4, 6—70, 2, 6, 8, 9, 81, 4, 6, 8, 9, 95, 6, 902, 22, 7—38, 41, 3, 4, 7, 9—52, 4—7, 63, 83, 7—9, 96, 9, 7000, 2, 3, 7, 47, 3, 7, 8, 80, 3, 91, 105, 8, 10, 3, 7), Chiriac Călin (6921, 1, 7, 9, 31, 4, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 52, 7).

L. 3 cl. VII Vlase Liliana (E : 2307, 9, 11, 6, 23, 33, 6—40), cl. IX Bedivan Mara (6921, 30, 4, 6, 42, , 9, 57, 96, 7000, 2, 3, 10, 49, 51, 9, 68, 76), Brînzeanu Laurențiu 2324—8, 36, 7, 9, 58, 9, 66 ; 6932, 96, 7002), Ghița Gh. (E : 2324—6, 3, 8, 60, 6, 9, 65, 6, 6996, 7002),

L. 4 cl. VIII *Mircea Maria* (E : 2310—3, 9—26, 30, 3, 4, 6—40, 2, 4—6, 50, 1, 4, 6—9, 62—6; 6847, 62, 95, 96, 7002).

CORABIA (Oltenia). L. 1 cl. 10 Filip Nicolae (6853, 6, 7, 9, 63, 8—70, 80 5, 938), Orzaţă Petre (6931—3, 8, 41, 6, 50, 4, 6, 71, 7002—4), cl. XI. Enescu Gabriela (6799, 6852, 9, 62, 4, 8, 9, 81, 946, 50, 4).

CORBU (Argeş). Sc. de 8 ani cl. VIII Rădman Adrian (6864, 7, 81 ; E : 2301, 2, 7, 8, 12).

CRAIOVA Şc. de 8 ani nr. 2 cl. VIII Gheorghe Felicia (6843, 7—50, 2, 9, 62—70, 7—81, 3—5, 8, 916 ; E : 2307, 8, 11, 2, 6, 8—27).

Şc. de 8 ani nr. 9 cl. VI Voicu n. Rugen (E : 2323—8, 33, 6—9, 54—7, 9, 60, 6), abs. *Ghiţulescu Dan* (6848, 52, 4, 60—4, 6—70, 3, 6, 84, 927, 9—31, 3, 6—55), abs. Licoiu Dorian (6840—52, 4, 7, 9, 61, 2, 4, 7, 9, 61, 2, 4, 8, 73, 6, 9, 81, 4, 6, 8—90, 6, 902, 4, 19), Stănescu C. Constantin (6840—90), *Tăndăreanu Nicolae* (6847—9, 52, 4, 9, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 4, 6, 927, 31—3, 6, 8—41, 3—7, 9—51, 4, 7, 68, 7021).

L. 1 cl. IX Anton Viorica (6927, 9—36, 49, 50, 4, 7, 63, 95, 8, 7002, 3, 5, E : 2333), Gavrilescu Elvira (6847, 50, 64, 7, 81, 927, 31—4, 57 ; E : 2319, 22, 33), Sandu Viorel (6847——50, 62, 4—7, 79, 81, 927, 9, 31, 34, 46 ; E : 2319, 21), cl. X Bănică Marian (6852, 65—70, 8—81, 3, 4, 8, 9, 912, 7—33, 5, 7, 8, 41, 2, 6, 50, 4, 95, 6, 8, 9, 7003, 4), Bănuţă Valeriu (6921, 3—33, 5—8, 41, 6, 9, 57, 8), Dediu Luminiţa (6902, 20, 8, 38, 63, 81, 5—7, 7002, 35, 45, 63), *Hamzescu Doina* (6847—50, 2, 4, 9, 62—5, 7—70, 9, 81, 3, 4, 8, 96, 927—9, 31—4, 7, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 7), *Ştefănescu Dorina* (6847—50, 2, 4, 7, 9, 62—9, 79—81, 3—5, 8, 96, 3—5, 8, 96, 920, 7, 8, 31—4, 41, 3, 6, 9, 50, 4, 80), cl. XI *Grimalschi Nicolae* (6847—9, 53, 62, 4—6, 8—70, 8—81, 83, 4, 927, 8, 30—3, 6, 8, 41—3, 5, 6, 95, 7002, 3), Pascu Doina (6840—3, 7—54, 7—9, 62—9, 72, 8—85, 7, 8, 90), *Dandu Darius* (6840—89, 95, 5, 907, 9, 14, 20—5, 7—54, 7, 75, 8, 80, 8, 93—5, 7002, 3, 14, 6, 7, 44, 5), Vasilescu Ion (6847, 9, 52—4, 9, 62, 4—6, 8, 9, 79, 80, 1, 3, 4, 8, 97, 927, 27, 30—3, 6, 7, 41, 5, 6, 9, 50, 4). L. 2 cl. IX Andrei Aurel (6897—50, 5, 62, 4—70, 2, 8—81, 3, 4, 916 ; E : 2319—24), Circiumărescu Ion (6850, 5, 65, 80, 8, 927, 35, 46, ; E : 2320, 1, 33), Ştefănescu Corneliu (6841, 7—51, 5, 62, 4, 8—70, 2, 9, 81, 8, 927, 31, 36, 45, 6, 57), cl. X. Buşe Gabriela (6923, 8—30, 2—4, 6—8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 54, 6, 7, 63, 80), *Cojocaru Florian* (6847—55, 7, 63—70, 8—81, 927—34, 6, 7, 41, 2, 5, 6, 50, 4), Creţu Adrian (6847—52, 4, 9, 62—4, 6—70, 9, 81, 4, 927, 30, 4, 45, 6, 50, 4, 6), Croitoru Adrian (5847, 8, 50, 62, 7, 9, 70, 9, 81, 927, 9, 31, 2, 4, 6, 8, 46, 52, 60, 7001, 23, 39, 51, 2, 69, 70, 8, 80, 91), Pană Ionel (6847—9, 62, 4—6, 79—81, 3—5, 927, 8), *Popa Magdalena* (6841—4, 7—58, 62—60, 2—4, 7—81, 3, 4, 7, 8, 92), Popescu R. Gheorghe (6928, 38, 43, 6, 9, 56, 7, 95, 6, 7002. 3, 5, 61, 4, 6), Popescu I. Traian (6927, 8, 30—3, 7, 95, 6, 7002, 3, 5, 61, 4, 6), Popescu I. Traian (6927, 8, 30—3, 7, 41, 2, 96, 7002—5), Sîrbu Vasile (6847—8, 50, 2, 4, 62—5, 7—70, 4, 8, 80, 1, 3, 8). cl. XI. *Barabanda Ion* (6840—5, 7—55, 7, 9—70, 2—4, 6, 8—81, 3—6, 8, 95, 6), *Diaconu Ştefan* (6847—54, 9, 62—70, 9, 80, 1, 3, 4, 7, 8, 927—34, 7, 41, 56, 50, 2, 4), *Georgescu Dan* (6920, 8, 30, 2—7, 9, 41. 3, 5, 7, 57, 96—7005 30, 45, 52, 9—64, 70, 80), *Iordache Eugen* (6840—2, 7—52, 4, 6, 9, 62, 4, 5, 7—70, 2—4, 8, 9, 81, 3, 8, 920, 7, 8, 30—6, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 9, 60, 3), Locuşteanu M. (6847, 9, 50, 3, 4, 9, 62—72, 9—81, 3—5, 8, 927—34, 6, 8, 46, 9, 50, 2, 4, 7, 63), Petrescu Ioan (6040—4, 47—55, 8, 9, 61—72, 9—81, 4, 5, 7, 8, 95, 6, 927, 9—34, 6, 46, 9, 50, 4, 7), Petrescu Liviu (6847—4, 9, 62, 4—70, 9, 81, 3, 90, 923, 7, 8, 30, 1, 3, 4, 6, 41, 5, 6, 52, 63) 7002, 3), Topan Dumitru (6936, 8—40, 52, 8, 88, 90, 1, 7003, 62, 4, 6, 9, 801, 91).

L. 3 cl. VII Polizu Sorin (2307, 8, 13, 23—6, 8, 33, 7, 8), cl. IX. Muscalagiu Nicolae (6847—9, 62, 3, 5, 6, 79—81, 927, 8, 30—3), cl. X. Antonovici Constantin (6842—9, 51, 26. 7—70, 9, 81, 3, 4, 927, 8, 32, 6, 41, 6), cl. XI. Diaconescu Mihaela (6847—54, 60—5, 8—70, 6—9, 81, 3, 4, 8, 31, 46, 50), Popescu D. Lionel (6847, 8, 62, 4, 81, 927, 31, 2, 4, 6, 8, 43, 6, 8, 43, 6, 50, 4),

Şc. ped. cl. VII. Ciulin Luminiţa (E : 2307, 8, 23—6, 8, 33, 6).

CRASNA. *L. 1.* cl. IX Ostricea Lăcrimioara (E : 2325, 6, 36—8, 56, 9, 65, 6).

CUCA (Argeş). Abs. Matei Petre (6812, 5, 51—4, 9, 65—70, 8, 84, 5, 7, 96, 916, 28—30, 5—45, 8, 9, 51, 2, 4, 61, 3).

CUGIR. *L. 1* cl. IX. Munteanu Traian (6856, 9, 63, 8, 9, 80, 3, 7, 9, 927, 8, 30—4, 6, 8, 41, 2, 6, 9, 50, 2, 4, 7, 60), cl. X. Dologa Ion (6922, 7, 8, 30—4, 6—41, 3, 6, 9, 50, 2, 4, 88, 90, 5, 7, 8, 7000, 2—5, 22, 39, 45).

CURTEA DE ARGEŞ. *L. 1.* cl. IX. Mircescu Gh. (6847—9, 51, 62, 3, 5, 6, 7, 70, 9, 88, 930, 1, 3, 9, 42, 8 ; E : 2319, 21, 33), cl. XI. Popa O. Valeriu (6842, 3, 7—51, 5, 7, 8, 70, 8—81, 3, 4m 8, 915, 30—3, 5, 6, 46, 50, 4).

DĂENI (Dobrogea). Sc. de 8 ani cl. VIII. Enciu Aurel (E : 2325, 6, 8, 36, 8, 8, 54, 6, 9, 65, 6).

DEJ (Cluj). L. 2 cl. VIII. Morariu Marcel (E : 2323—9, 37—42, 5, 6, 53), cl. IX. Barth Ferenc (E : 6840, 1, 7—50, 3, 62—8, 81, 8 ; E : 2319—22).

DETA (Banat). *L. 1* cl. VI Mocofan Cornelia (E : 2307, 8, 13, 23—9), cl. VII. Cioloca Adam (6927, 80, 30—3, 41, 57, E : 2333).

DEVA *L. 1* cl. IX Mirza Cornel (6698, 792, 881, 6 ; E : 2307, 8, 11, 2, 23—25, 53), cl. X. Ban Octavian (6841, 8, 9, 59, 64, 9, 79, 84, 938, 46, 50, 4, 7003), Herban Virgil (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4, 5, 7, 79—81, 2, 4, 8, 927, 31, 8, 41, 5, 6, 50, 4).

DOLHASCA (Suceava). *L. 4* cl. IX. Iosubescu Dan (6848, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 79, 81, 4, 8, 927, 31, 46, 9, 63) ; E : 2319—22).

DOMASNEA. Sc. de 8 ani cl. VIII. Galescu Maria (6847, 8, 9, 81, 932 ; E : 2307, 12, 4, 9, 20, 5, 6, 37, 8).

DOROHOI Ab. Anghel Izu (6847—50, 2, 62, 5—7, 79, 81, 3, 4, 8, 927, 9—34, 6, 8, 40, 3, 4, 6, 7, 9—51, 4, 5, 71, 95, 8, 7000, 2, 3, 51, 2, 9, 66, 73, 80, 115).

Şc. de 8 ani cl. VII Grigor Dorina (E : 2323, 5, 6, 33, 54, 6, 7, 62). *L, 1* cl. IX Căruceru Dina (2324—6, 38, 9, 50, 4, 6—9, 65), Coller Bella (E : 2324, 5, 36, 8—50, 4, 6—9, 65, 6), Tamac Florin (E : 2325, 23, 6, 8, 50, 4, 5—9, 65, 6), cl. XI. Grigoraş Lucian (6922, 7—33m, 8, 41, 5, 6, 50, 7077), Odăianu Maria (6927, 7—32, 7, 8, 41, 5, 6, 50, 4, 6, 87, 7002), L. 2 cl. IX Botezatu Elena (6927, 31, 4 ; E : 2328, 36, 9, 54, 6, 8, 9, 62, 6).

DRĂGANU (Argeş). Sc. de 8 ani cl. VIII Diaconescu Natalia (E : 2308, 18, 24—6, 9, 33, 8).

DRĂGĂNEŞTI-OLT (ARGEŞ). L. 1 cl. VIII Dumitra V. Angela (6847, 9, 50, 62, 81, 96 ; E : 2307, 10, 2, 6, 21, 33, 9), cl. IX — Enache R. Victor (6841, 7—52, 4, 6, 9, 62, 4, 5, 7—70, 2, 8—81, 3, 4, 9, 927—34, 6, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 6, 7, 60 ; E : 2319—22, 33), Rotaru Alexandru (6847—9, 55, 6, 62—4, 7, 9, 79, 80, 6, E : 2319, 21), cl. X. Durigu C. Mircea (6921, 7—34, 8, 46, 9, 96, 8, 7003), cl. XI. Popa M. Ion (6840—3, 7—52, 4, 7, 9, 62—5, 7—70. 2, 3, 9—81, 3, 8, 95, 921, 2, 41, 2, 5, 9, 50, 2, 4, 7, 9).

DRĂGĂŞANI (Argeş). Sc. de 8 ani cl. VIII Oltu Mihai (6847, 8, 62, 4, 79, 81, 927, 32—4 ; E : 2307, 8, 12, 3, 6, 9, 24—6). *L. 1* cl. IX. Mărculescu Ilie (6847—9, 51, 62, 4, 5, 79, 81, 8, 927, 7002), cl. X. Titu Gh. (6840—3, 7—9, 51—4, 6, 62, 4—70, 9—81, 3, 4, 7—90, 921, 7—34, 8, 50), cl. XI. Oprea Ion (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4 —9, 79—81, 3, 4, 8, 927, 8, 30—3, 6, 8, 41, 6, 9, 50, 4, 86, 96, 7000, 2, 3, 5), Sgelea Gh. Constantin (6840—3, 9, 51, 5, 7, 9, 63, 4, 79, 80, 3, 4, 7, 8, 916, 27—33, 6, 8, 3, 6, 9, 50, 52—4, 6, 7002, 3).

DUMBRĂVENI (Braşov). *L. 1* cl. IX. Teodorescu Marilena (6865, 7, 930, 8, 42, 9, 63, 96, 7002, 3 ; E : 2320, 1), Widmann Wilhelm (6920, 1, 7—33, 5—8, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 7, 8, 63, 4, 88, 95—7005 ; E : 2323—34, 47, 8, 50, 1), cl. X. Boitaş Marius (6841, 7—50, 2—4, 9, 62—6, 8, 9 79—81, 4, 8, 909, 20, 7—34, 6—8, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 7, 80).

EPURENI (Iaşi). Sc. de 8 ani cl. VII. Lefter Victor (E : 2307, 10—3, 6, 8—21).

FĂGĂRAŞ. *L. 1* cl. X. Sajin Gh. (6840, 53, 63, 5, 6, 8—70, 8—81, 4, 8, 9, 915, 6, 7, 41, 52), cl. XI. Grovu Nicolae (6936—8, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 7), *Otrocol K* . (6843, 55, 63, 6, 72, 916, 53, 6, 89, 95—7, 9—7005, 7, 24, 45, 51, 60, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 73, 6, 7, 80, 9, 91, 112).

FĂGET (Banat). abs. Costea Dumitru (6849, 54, 63, 4, 78, 85, 920, 7—38, 41—5, 7—52, 4, 5, 60, 80).

FĂLTICENI. Abs. Croitoru Gh. (6847—9, 52, 64, 7, 9, 81, 927, 31, 2, 6, 8, 40, 4, 6, 7, 9—51, 6, 93, 5—7, 7000—3, 44, 5). *L. 2* cl. X. Jitaru Mihai (6927, 31, 8, 43, 6, 9, 50, 4—6, 7003, 7, 28, 45).

FETEŞTI. Abs. Tudorache Niculina (6847—52, 4, 5, 9, 60, 4, 5, 73, 7, 9, 81, 3, 4, 6, 8, 905, 27, 31—4, 41, 3, 6, 8—51, 4).

FIENI (Ploieşti). Abs. Arapu C. Constantin (6841—8, 50—5, 9, 61—9, 71, 8—85, 8, 96, 902, 5, 9).

L. 1 cl. VIII. Georgescu V. Ligia (E : 2324, 5, 36, 8, 50, 9, 65, 6), Sencovici Gabriela (E : 2307, 11—4, 6, 8, 9, 21, 3, 5, 6), cl. IX — Popescu Florin (6863, 935, 99, 7001 ; E : 2310, 21, 3—9, 33, 4, 54—60, 2—6), Zarioiu Gh. (6840, 9, 50, 3, 70, 928, 30—3, 5, 6 41 6, 9, 62, 7) E : 2333), cl. X. Chiroiu Pompiliu (6927—35, 42, 6, 9), Topalescu Diana (6927—35, 42, 6, 9).

FILIAŞI (Oltenia). *L. 1* cl. IX. Băluţă Constantin (6920—2, 4, 7—43, 45, 6, 9, 50, 2—5, 7—66, 9, 71—3, 5, 80, 3, 7—9, 95—7005, 7, 8, 10, 3, 6, 8—22, 4, 7, 37, 47).

FIZEŞ (Banat) Sc. prof. cl. III Cioloca Adam (6927, 8, 30—3, 41, 57 ; E : 2333).

FOCŞANI Sc. de 8 ani cl. V Iacob Dan (E : 2336—9, 54, 6, 7,). *L. Unirea* cl. X. Bolboceanu Ion (6847, 9, 50, 9, 62, 4—7, 9, 79, 81), cl. XI. Iancu Viorel (6847—9, 52, 9, 64, 79—81, 927, 30, 31, 41, 54, 7002), Maxen Ariana (6847, 8, 50, 4, 9, 62, 3, 70, 80, 1, 8, 927, 8, 30—4, 7, 41, 6, 50).

FRÎNCEȘTI (Argeș). Sc. de 8 ani cl. VII. Paraschiv Dumitru (E : 2299, 300, 2, 24—8), GALAȚI. Abs. *Andrei Viorel* (6912, 56, 87—91, 3, 5—7007, 10, 3, 4, 6—8, 21, 2, 5,. 7, 8, 33, 5, 40, 3—7).

Șc. de 8 ani 7 cl. VI Iordan Magdalena (E : 2307, 8, 14, 6, 25, 6, 8, 33). Șc. 8 ani 23 cl. VIII Thiel Valeriu (E : 2325, 6, 56—60, 4). Șc. de 8 ani 24 cl. VIII Costiniuc Florin (E : 2311, 2, 4, 6, 23—9, 33, 4, 6—9, 41, 5, 50, 6, 7, 66). Șc. de 8 ani 26 cl. VII. Răpițeanu Răzvan (E : 2323, 5, 7, 8, 38, 54, 6, 9, 66). *L. 1* cl. IX. Herscovici Isaia (6847—51, 5, 62, 4, 5, 7—9, 72, 9, 81, 3, 4, 7, 8, 921, 9—33, 6, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 63, 96, 7004—4, E : 2319—22), Rosenzweig Niky (6847—9, 55, 62, 4—8, 79—81, 927, 8, 31, 2, 4, 8, 46, 9 ; E : 2319—21), cl. XI. Paraschivescu Constantin (6840—2, 4, 50, 3, 3, 8, 68, 74, 84, 9, 98). *L. 2* cl. X. Caloianu Lucia (6927, 31, 4, 8, 46, 50—2, 4, 7003, 50, 69), Moscopol Agatha (6848—50, 2, 62, 4, 70, 2, 9, 81, 4, 70, 2, 9, 81, 4, 932, 8, 46, 9), cl. XI. Caloianu Maria (6927, 31, 7, 8, 41, 50, 4, 6, 7003, 50—3). *L. 4* cl. VII Ariton Petrică (2325, 6, 36, 8, 9, 56, 8, 66), cl. X Buruiană Rodica (6927, 9, 31 2, 8, 46, 57, 88, 9, 7002, 50, 69, 73), Tiribegea Maricel (6847, 8, 50, 62, 6, 7, 88, 6920, 1, 8—30, 3, 5, 8, 45, 6, 9, 55, 7, 9, 86, 8). *L. 5* cl. VIII Haină Roșie A. Lucia (E : 2307, 8, 19, 25, 6, 36—9, 50, 2), cl. IX. Anghel D. Marian (6847, 8, 50, 62, 4, 88, 931, 57, 9, 62, 7, 33), Anghelescu Gabriela (6354, 64, 5, 9, 79, 81, 8, 96, 927, 9—31, 3, 8, 46, 9, 56, 7002, 3, 5). Bejan Ortansa (6849, 65, 7, 927, 9—33, 46, 7002, 3, 110). *L. 5* cl. X. Lupoaie Marian (6920, 7—35, 49, 98, 7002, 3), Olaru Liliana (6840, 1, 64, 5, 8—70, 8, 9, 81, 4, 931). *L. 6* cl. VII Grimberg A. (E : 2307, 8, 11, 4—7, 23—8). *Sc. muzică.* cl. VII Damașcan Gabriela (E : 2325, 6, 8, 38, 54, 6, 7, 9), cl. VIII Onu Costică (E : 2324—6, 38, 9, 56, 9, 66),

GĂIEȘTI (Argeș). L. 1 cl. X. Prodan Ion (6847—9, 59, 64—6, 8, 78, 9, 81, 4, 8, 916, 29—34, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2, 63, 71, 95, 6, 7002, 3), cl. X. Prundeanu Valentin (6851, 9, 62, 4, 5, 8—70, 9, 81, 4, 8, 927, 9—34, 41, 5, 6, 9, 50, 4, 6, 96, 7002, 3, 5).

GĂTAIA cl. IX. Simu Nicolae (6847—50, 62, 4, 7, 9, 79, 81, 8, 927, 9—32, 4, 8, 46, 9, 95, 7003 ; E : 2319—21).

GHERLA (Cluj). L. 1 cl. IX Sipoș Ioan (6740, 1, 7—50, 5, 6, 62, 4, 5, 7—9, 72, 8, 9, 71, 4, 7, 8, 909, 16 ; E : 2319, 21, 3).

GIURGIU. Sc. de 8 ani 7 cl. VIII Popescu Gh. Dragoș (E : 2325—31, 3, 36—40, 2, 4—6, 54—9, 63—6). *L. 1* cl. X. *Litoiu Petrișor* (6841, 7—54, 9, 62, 4, 5, 7—9, 79, 81, 4, 8, 96, 927, 30, 1, 3, 5, 6, 8, 41, 3—7, 50, 3, 4, 6, 7, 7002, 3, 5, 22, 45), *Mărăcineanu Eugen* (6840, 5—52, 5, 6, 62—5, 8, 9, 81, 3, 4, 8—90, 921, 7—33, 46, 50, 7, 60, 73).

L. 2. cl. VIII. Răsuceanu Rodica (6847σ9, 62, 6, 8, 1 ; E : 2312, 6, 9, 20), cl. IX. Bolborici Marin (6847—50, 62, 4, 6, 9, 70, 9—81, 3, 4, 9, 927, 31, 2, 50, 4), Isar Laurelian (E : 2308, 11, 24—6, 33, 6—9, 50), cl. IX *Marinescu Nicolae* (6840, 1, 8—52, 5, 6, 62—70, 2, 8—85, 7—90, 7—36, 8, 41, 2, 5, 6, 9, 57, 63, 6).

GLAD (Cluj). Sc. de 8 ani cl. VIII Cadar Ileana (E : 307, 8, 12, 24—26, 9, 33).

GOLEȘTI — COASTA (Argeș). Sc. de 8 ani de VIII Stoican Viorel (E : 2307, 8, 12, 6, 25—8, 40, 6 ; 5747, 9, 62, 4, 70, 89, 945, 6, 57, 7001, 2).

GURA HUMORULUI (Suceava). L. 1 cl. X. Buburuzan Lucian (6847, 8, 52, 3, 64, 9, 70, 931, 43, 5, 6, 50, 2, 4), Greoleanu Constantin (6923, 8, 31—3, 6, 7, 41, 9—51, 4).

HAȚEG (Hunedoara). L. 1 cl. IX. Berghian Ion (6840, 7—51, 62, 4—6, 8, 70, 9—81, 4, 9, 915, 16, 27, 9—34, 8, 46, 9, 57), Tîrjoianu D. Corina (6840, 1, 7—51, 5, 6, 64, 6, 8—70, 8, 84), cl. XI *Maftei Nicolae* (6847—9, 53, 5, 6, 62—70, 8, 81—4, 8, 916, 27—35, 8, 46, 9, 63), cl. XI. *Marton Virgil* (6840—3, 5—55, 7, 8, 72—74, 8—81, 3—5, 7—90, 5, 6, 902, 20—4, 7—33, 5—9, 41—3, 5, 6, 9, 50, 2—4, 6—9, 61, 70, 1, 85—7, 90—2, 5—7, 9—7005, 14, 21, 6, 45).

HĂDĂRENI (Mureș). Abs. Bărbățan Emil (6841, 7—50, 2, 5, 62—71, 4, 6—81, 4, 5, 8, 96).

HOREZU (Argeș). *L. 1* cl. IX Munteanu Ion (6840, 7—9, 51, 5, 62, 4—9, 72, 81, 3, 4, 7, 8, 927, 9, 31—4, 8, 45, 6, 9, 63), cl. XI Bușe Marcu (6920—4, 7—43, 5—7, 9, 50, 2—5, 7, 8, 60, 2—4, 67, 73, 8p0, 7048—56, 9—64, 6, 8, 9, 73, 5, 6, 7, 9, 80, 3, 8, 9, 91, 6, 105, 6, 8, 11, 4), Cojocaru Constantin (6920—3, 7—33, 5, 6, 8, 41—3, 5, 6, 9, 54—7, 87).

HUNEDOARA Abs. Belu Emil (6842, 5, 6, 87, 909, 22, 3, 9, 55, 7, 75, 80, 8, 93, 5—8, 7000, 2—6, 14, 5, 44, 5, 7). *Căpățînă Ion* (6889, 92, 5, 902, 28—30, 2—4, 6, 9—47, 9, 52, 3, 5, 7, 8, 63, 9, 75, 95, 7, 7002, 3, 5, 16, 21, 44, 5, 7), Tănasie Gh. (6847—9, 52, 9—61, 5, 7, 79, 81, 927, 9—34, 43, 6, 9, 50, 4).

Șc. de 8 ani 4 cl. VII Pitca Mihai (6868, 7002 ; E : 2307, 8, 11, 24—26, 40). *L. 1* cl. VIII Beia Maria (E : 2327, 7, 16, 23—6, 36), Jenei Mihaela (E : 2323—6, 8, 33, 6—8), Jula Angela (E : 2298, 307, 8, 11, 6, 23, 5, 6), cl. IX, Nedelcu Violeta (E : 2307, 8, 15, 6, 20, 4, 5, 7, 8, 9, 50), *Oprișa Doru* (6927, 9—34, 6 8, 40—3, 6, 9, 50, 2, 4, 6, 7, 60, 1, 3, 95, 6, 8, 7000—4, 51, 61, 8—70, 3, 6, 80), Păușan D. Virgil (6847—50, 5, 6, 62—70, 9—81, 3, 4, 8, 927, 30—4,

30—4, 8, 41, 5, 6, 9), cl. X. Petrescu Petre (6847—50, 2, 4, 9, 62, 4—7, 9, 70, 2, 9—81, 8, 927, 30—3, 6, 8, 41, 2, 6, 9, 50, 2, 4, 7), cl. XI *Căpăţînă Octav* (6874, 6, (6874, 6, 85, 6, 92, 5, 918, 22—4, 7—47, 9—54, 6—8, 63, 9, 70, 6, 86, 90—2, 5—8, 7002, 3, 5, 7, 14, 6, 7, 21, 2, 4, 5, 8, 31, 3—5, 7). *Suruceanu Alexandru* (6840, 1, 7—52, 4—8, 62, 5—70, 3, 4, 9—81, 7, 8, 90, 920, 7—34, 6, 8, 49, 50, 4, 6, 7).

HUŞI. *L. 1* cl. XI *Darie Viorel* (6841, 7.55, 62, 4—9, 78—81, 3, 4, 95, 6, 927, 9, 31—3, 41, 2, 5, 6, 9, 50, 4, 7).

IAŞI. *S. g. 7* cl. VI. Balan Carmen (E : 2307—11, 23—6, 36), Goldstein Margit (E : 2223—7, 37—9, 54), Petrăchioaie Eugen (E : 2224—6, 8, 36—9, 56, 7, 9). Cl. VIII. Acatrinei Ion (E : 2223, 5, 33, 6—9, 60, 65), Agavriloaie Leon (E : 2324—6, 8, 9, 36—8, 57, 9, 65, 9), Caufman Claudia (E : 2301, 2, 11—4, 21, 33, 4 ; 6862, 4, 7), Hörer Silvia (E : 2325, 7, 33, 6—9, 41, 54, 6, 65), Petrăchioaie Dorin (E : 2324—9, 33, 6—9, 54, 6), Radu Bianca (E : 2324—9, 33, 4, 6—9), Radu Dinu (E : 2324—8, 33, 6—9, 45, 6). *S. g. 14* cl. VII. Poroşnicu Gabriela (E : 2324, 6, 8, 43, 4, 6—9, 44, 50), Rotariuc Maria (E : 2325, 6, 34, 7, 8, 53, 6, 9). Cl. VIII. Topor Vasile (E : 2307, 8, 10, 13, 2, 8, 24—7). *Liceul 1* cl. VI. Rimer Maria (E : 2307, 8, 11, 3, 23—6, 36). Cl. VIII. Istrate Nuşa (E : 2307, 8, 12, 3, 8, 25—7, 33), Mistreanu Gabriela (E : 2318, 25, 6, 37, 9, 56, 9, 66), Nistor Silviu (E : 2307—9, 12—4, 6, 64, 6). Cl. XI. *Chiriac Iulian* (6920—4, 7—43, 5—8, 50, 2, 4—7, 9, 62, 3, 83). *L.* 2 cl. VII. Mirtu Mihai (E : 2236, 8, 9, 54, 6, 7, 9, 65, 6). *L. 3* cl. VI. Lupescu Silviu (E : 2324—6, 8, 9, 33, 6—9). C. VIII. Chircă Liviu (E : 2307—16), Teodorescu Horia (E : 2307, 8, 14, 6, 8, 23—6, 8, 33, 6—9, 45, 68, 80). Cl. IX. Iacob Florin (6840, 1, 7—53, 5, 6, 62—70, 2, 8, 9, 80, 1, 3—5, 7—90, 915), Ichim Horia (E : 2333, 47, 8, 62, 4, 8—70, 8, 9, 81, 3, 927, 32), Huţanu Virgil (6945, 57, 7002, 3, 5, 22, 4, 8, 63, 9, 73, 6, 7, 80, 1). Cl. X. Leahu Petru (6847, 9, 50, 62, 4, 81, 927, 30—3, 5, 6, 45, 6, 9), Liacu Mihai (6927, 9, 31, 6—8, 41, 5, 9, 50, 2, 4), Săveanu Florin (9920, 2—4, 30—3, 5—8, 41—3, 5—7, 9, 50, 2, 4, 7, 8, 61, 95—7, 9, 7000—2, 4, 5), Stănel René (6920, 7, 30—3, 8, 45, 6, 57, 63, 95, 6). Cl. XI. Aizicovici Sergiu (6927, 31—4, 6, 46, 9, 50, 4, 7, 60, 3, 71), Botez Constantin (6922, 3, 7, 8, 30—4, 7, 41, 50, 4—7, 7003, 45, 60, 2—4, 6, 9), Gorez Liviu (6920—4, 7—34, 8). *L.* 4 cl. VIII. Focşa Gabriela (E : 2307, 8, 13, 5, 8, 9, 21, 3—8, 33), Picoş Sabina (E : 2319—22, 33, 4, 48, 50, 3). Cl. IX. Enăsescu Anca (6867, 8, 80, 927, 8, 30—5, 96, 7, 7002—4). *L.* 6 cl. IX. Gavril Magda (6847, 8, 62, 4, 7, 9, 81, 927, 31, 3, 4, 6, 96). *Liceul 7.* cl. VII. Vulpoiu Grigore (E : 2323, 5, 6, 33, 6—40). Cl. VIII. Curteanu Nicolae (E : 2323—7, 36, 9, 54 ; 6927, 31). Cl. XI. Lovinescu Cătălina (6847, 8, 52, 62, 4, 5, 9, 70, 9, 81, 3, 4, 8, 9, 90), Popescu Angela (6920, 2, 7—33, 5, 6, 41, 5, 6, 9, 50, 4, 7, 8). Liceul 8. cl. X. Amariţei Gheorghiţa (6932, 5, 6, 43, 57, 8, 70, 82, 95, 7002, 3). Cl. XI. Baraboi Adrian (6921—3, 30, 1, 6, 8, 41, 3, 5, 6, 56, 68, 75, 7007, 21, 2), Creţu Ovidiu (6922, 7, 8, 30—4, 6, 8, 41, 2, 6, 9, 50, 2, 4). L. 9 cl. VIII. Builă Horia (E : 2307, 8, 12—4, 9—22). Cl. XI. *Lovinescu Cătălina* (6921—3, 7—39, 41—3, 5—7, 9, 50, 2, 4, 6, 7, 63, 90—2, 5, 8—7003), Chiriţoiu Neculai (6928, 9, 32, 5—7, 63, 89, 95—7, 7002, 3, 6, 2i, 44, 5, 61, 2, 4, 76, 80).

ILIA (Hunedoara). Cl. X. Mitrofan Florin (6851, 2, 6, 9, 69, 82—5, 8—90, 6).

INEU. Liceul mixt. cl. XI. Pop Marius (6920—2, 9, 30, 2, 8, 49, 53—5, 7, 9), Vasiu Iulian (6927, 8, 30—2, 7, 8, 41—3, 5, 6, 9—50, 2, 4, 6, 7). Absolvent Pătruţ Popa Ion (6920, 4, 5, 41, 2, 7—9, 51—3, 5, 60, 9—72, 3, 87, 95, 7000—4, 24, 45).

LUGOJ. *S. g. 6* cl. VIII. Eneşca Gabriela (E : 2307, 8, 16, 25, 6, 36, 7, 50, 6, 9, 65). L. 1 cl. IX. Apostolescu Ioan (6927—38, 42, 57). Cl. XI. Băcilă Dan (6840, 1, 7—50, 62, 4—9, 78, 9, 83—5, 7—9, 920, 7, 8, 31—4, 50, 2). L. 2 cl. X. *Popişteanu Delia* (6848—50, 62—7, 71, 9, 83, 4, 8, 921, 7—34, 7—41, 3, 5, 6, 9, 50, 4, 7, 95—8, 7002, 3, 5). Cl. XI. Ploscaru Gabriel (6930—3, 8, 43, 6, 9, 50, 2, 4, 5). Absolvent Iovănescu Ioan (6847—50, 2, 4, 9, 61—6, 9, 76, 9, 81, 4, 8, 96, 51), Jiurcă Ioan (6840, 74, 8, 80, 915, 20, 56, 63, 87, 8, 94—7000, 3—6, 14, 34, 9, 45—7).

LUPENI. Cl. X. Poenar Gabriela (6927, 9, 31, 3, 6, 8, 46, 9, 57, 8, 7002, 3).

MĂCIN (Dobrogea). Cl. XI. Simion Andrei (6840, 2, 4, 7—57, 62—70, 3—4, 8—82, 97).

MALU (Bucureşti). Cl. VII. Căpran Stela (E : 2323—9, 36—42, 5, 6).

MĂRĂŞEŞTI. Cl. XI. Chiriţă Constantin (6927—31, 3, 4, 6—8, 41, 5, 6, 9, 50, 2, 4, 5, 7, 72, 80).

MEDGIDIA. L. 2 cl. VIII. Pelican Gheorghe (6792, 847—50, 5, 62, 4, 5, 7, 71, 81, 3, 4).

MEDIAŞ. L. 2 cl. X. Brădişteanu Smarand (6939, 43, 50, 87—9, 91, 5—7000, 2—5, 22, 4, 7, 9—52, 72—4, 105, 7, 8, 10, 2, 3, 7). Cl XI. Georgescu Clement (6873, 8, 80, 2 3, 5, 6, 901, 21, 3, 7—33, 5—8, 41—3, 9, 50, 2, 4, 7, 9).

MEHADIA. Absolvent Ciortan Mihail (6847—50, 62—4, 6, 8, 70, 9—81, 3—6, 927, 8, 30—3, 41, 3, 6, 9, 50, 95—7, 7002—4).

MIHAI BRAVUL (Galaţi). Alexe Gheorghe (6931, 58, 75, 80, 8, 90, 5, 7002, 3, 5, 21, 8, 44, 5).

MIZIL. S. g. 1 cl. VIII. Stanciu Eliza (E : 2225, 37, 8, 53, 6, 7, 9, 65), Vlădoreanu Doina (E : 2233, 6—9, 50, 6, 7, 9, 64—6).

MOGOŞANI (Argeş). S. g. cl. VIII. Badea Gheorghe (E : 2324—6, 8, 36, 9, 45, 53, 5—9, 61, 3—6, 32 ; 7002).

MOLDOVA NOUA (Banat). Cl. XI. Tismănariu Mihai (6847, 9, 62, 4, 79, 80, 1, 4, 927, 8, 30—3, 41, 6, 7, 50, 6, 7002, 3).

MORENI. Cl. VIII. Nedelcu Constantin (E : 2323, 5, 6, 8, 37, 8, 40, 56, 9, 64—6).

MOZĂCENI DEAL (Argeş). Cl. XI. Soru Gheorghe (6847, 9, 54, 62, 4, 9, 79, 81, 928, 31, 3, 46, 50, 4, 6), Serbănoiu Teodora (6842, 7—70, 8, 9, 81, 4, 8, 31, 50).

NĂDLAC (Banat). Cl. VIII. Cobzaş Gh. (E : 2323—8, 30—3).

NĂDRAG (Banat). Cl. XI. *David Nicolae* (6795, 6, 803, 9, 18, 24, 40, 2, 55, 7, 8, 93, 6, 916, 8, 20, 7, 8, 30—4, 6—43, 5—7, 50, 4, 71, 86), Hubali Ioan (6931, 8, 46, 50, 95, 7, 7002, 4, 7, 45, 51, 70, 3), Todor Ion (6931, 8, 46, 50, 88, 7003, 14, 22, 6, 45, 70, 3, 8).

NĂSĂUD (Cluj). Cl. IX. Scurtu Vasile (6849, 55, 68, 80, 927, 31—5, 8, 41, 5, 6, 9, 57, 63). Cl. X. Vălean Emil (6927, 8, 30—2, 8, 42, 6, 9, 63, 88, 96, 7002—4). Cl. XI. Vălean Aurora (6927—33, 8, 42, 6, 9, 50, 88, 96, 7003).

NEGREŞTI (Iaşi). Cl. XI. Ungureanu Ion (6923, 4, 7, 41, 6, 9, 50, 4, 7, 63, 90, 7005, 24, 5, 8).

NICOREŞTI (Galaţi). Cl. VII. Oprea Dorin (E : 2336—40, 56, 7, 9, 65, 6).

NOVACI (Oltenia). Cl. IX. Manta Alexandru (6927, 8, 30—3, 5, 6, 8, 42, 5, 6, 9, 52, 7002, 53). Cl. XI. Comănescu Gheorghe (6921, 3, 4, 7—33, 5, 6, 8, 41—3, 6, 52—4, 90, 1, 7003, 23).

OCNA MUREŞULUI. Cl. VIII. Ursu Tiberiu (E : 2323—9, 36—9, 44, 50, 9, 54, 6—60, 4—6 ; 6927—34).

OLTENIŢA. L. 2 cl. X. Vasilian Mihai (6920, 7, 8, 30—6, 8, 42, 5, 6, 9, 52, 9), Vlăsceanu Stan (6920, 2, 4, 30, 2, 41, 3, 7, 53, 7, 60, 73, 80, 6, 8, 90, 5—7, 7002, 3, 5, 7, 24, 45).

ORADEA. Cl. X. Bologa Florin (6847—57, 9, 62, 4, 7, 73, 81), Buscianu Adrian (6808, 17, 21, 9, 31, 42, 3, 7, 52, 4, 62, 4, 5, 7, 78, 81, 3, 8, 922, 7, 30, 1, 4, 6, 8, 9, 41, 50, 4, 6), *Hăncu Marius* (6843, 51, 7, 8, 63, 85, 7, 901, 28, 34—7, 9, 41—3, 62, 4, 89—92, 5—7005, 7, 10, 4, 24, 40, 5), Mănucu Dumitru (6852, 65, 80, 4, 7, 96, 909, 34, 95, 7002, 3, 5, 45), Meer Petru (6922—4, 7—32, 4, 6—41, 3, 6, 9, 50, 2, 4, 5, 60, 3), Urdă Ioan (6942, 6, 57, 9, 62, 3, 88, 7001, 10, 21, 4, 51, 73, 7, 80, 91). Cl. XI. But Tiberiu (6811, 5, 7, 24, 40—2, 4, 7—50, 2, 4, 7, 9, 62, 4—70, 8, 9, 81, 3, 4, 8, 9), Lazăr Virgil (6847—51, 6—9, 62—4, 79, 81, 3, 4, 8, 927—32, 46, 9—51, 7000, 1). Absolvent Memetea Ovidiu (6750—5, 7, 9, 62—5, 76, 95, 7, 803, 8, 11, 7, 21, 4, 5, 8, 9, 31, 5).

ORLEŞTI (Argeş). Cl. VII. Preoteasa Valentin (E : 2324—6, 8, 37, 8, 56, 7, 9). Cl. VIII. Pistol Gheorghe (E : 2324—6, 8, 37, 8, 56, 7, 9, 66).

ORAŞ GHEORGHIU-DEJ. *L. 1* cl. XI. Şerban Nicolae (6843, 54, 5, 9, 62, 4, 7—9, 72, 6, 9, 81, 4, 6), Tudor Darie (6762, 4, 95—7, 9, 801, 5, 928, 44, 69—51). Absolvent TimaruTheodor (6750—8, 60—4, 76, 80, 2).

ORAŞTIE. Absolvent Hîndoran Constantin (6750—64, 80, 90—3, 5—9, 801—3, 17, 8, 24, 9, 31, 6).

ORAVIŢA. Cl. VI. Beică Doina (E : 2307, 8, 14, 6, 24—6, 33, 4, 7).

ORŞOVA. C. IX. Drăghici Ion (6847, 55, 64—6, 9, 79, 81, 8, 927, 38, 46), Erimescu Ion (E : 2347, 50, 3 ; 6988, 9, 95—7, 9, 7001—4). Cl. X. Frumosu Nicolae (6927, 31—4, 6, 7, 41, 6, 54, 97, 7002, 61).

OŢELUL ROŞU. Cl. VIII. Anonim (E : 2324, 8, 33, 56—9, 66).

PANCIU. C. XI. *Fătu Ion* (6842, 3, 9, 53, 4, 9, 73, 4, 85, 7, 902, 20, 1, 3, 9, 34—7, 41—3, 6, 9, 50, 2—5, 7, 8, 88, 90—2, 5, 6, 7000, 2—5). Absolvent Tudorache Ion (6987,8, 90, 3, 5, 6, 8—7007, 4—7, 44).

PĂTÎRLAGELE (Ploieşti). Cl. IX. Băiculescu Gheorghe (6847, 8, 62, 64, 7, 70, 9, 80, 1, 927, 30, 1, 6), Toma Veronel (6921, 7—36, 41, 2, 5, 9, 52, 5, 7, 9, 63). Cl. X. Băiculescu Ion (6847—50, 62—7, 1, 70, 8—81, 4), Toma Florin (6842, 7—50, 2, 4, 62—70, 3, 8—81, 4), Popa Dumitru (6927—35, 7—41, 5, 6, 50, 4—7), Poşoiu Constantin (6920, 7, 8, 30—7, 41, 7, 9, 50, 2, 4, 7, 9, 60, 3, 4, 71, 3, 5). Absolvent Pavel Dumitru (6920, 7, 30—4, 40, 1, 3—6, 9—51, 3—5, 95—8, 7002—5).

PĂUNEŞTI (Bacău). Cl. VI. Neagu Viorica (E : 2310, 6, 23 ; 6860, 3, 8, 932, 97, 7002), Nica Lucia (E : 2308, 13, 27, 8, 33, 6—8), Novac Maria (E : 2327, 8, 37, 8, 54, 6, 61, 5, 6), Onea Victor (E : 2293, 307, 11, 3, 23, 4, 5, 8, 33, 8), Şandu Mariana (E : 2318, 27, 9, 26—9 ; 6868). Cl. VII. Anghel Florica (E : 2307, 8, 10—3, 23—5, 33), Berbece Maria (E : 2310, 1, 6,

8, 23, 6, 8, 33, 4), Conduraru Maria (E : 2328, 34, 7—9, 54, 9, 66), Neagu Viorica (E : 2336—9, 50, 3, 4, 6, 9), Novac N. Maria (E : 2314, 6, 23—8, 37—9, 53, 4, 9 ; 6850, 64), Rizuc Rodica (E : 2318, 21, 3, 8, 9, 34, 5, 6, 7). Cl. VIII. Gheorghiu Gabriela (E : 2323, 7, 37—9, 54, 66 ; 6997), Ursei Paraschiva (E : 2323, 4, 33, 7, 8, 53, 4, 9, 66), Vişan Stefan (E : 2311—3, 5, 6, 9, 20, 2 ; 6862, 4, 80, 930, 2, 3).

PETROŞENI S. g. 1 cl. VIII. Sternberg Margit (E : 2325, 6, 8, 30, 1, 6—8, 40, 2). L. 1 cl. IX. *Popa Lucia* (6862—70, 2, 3, 8—81, 3—5, 7—90, 920, 1, 7—38, 41, 2, 5, 50, 63, 939, 43, 6, 52—6, 9, 87—9, 95—705, 19, 22, 4, 49—52, 9, 60—4, 9, 70, 6—8, 80, 91 ; E : 2333, 50, 1, 63—6, P). Cl. X. *Paraianu Sorin* (6920, 1, 7—36, 412, 5, 6, 52—8, 60, 3, 86, 8, 95—7004, 20—2, 51, 2, 63, 6, 8, 70, 3, 6, 80, 112, 7).

PECIUL NOU (Banat). Cl. X. Stoianovici Radislav (6841, 8, 51, 2, 7, 67, 73, 84, 8, 96, 936, 7, 41—3, 6, 50, 4, 6).

PEŞTEANA JIU (Oltenia). Cl. IX. Livezeanu Constantin (6847—51, 62—4, 6, 8—70, 9, 80, 1), Truşcă Matei (6927—34, 6, 7, 41, 2, 7, 5, 6, 9, 57, 60, 95—9, 7002, 3).

PIATRA NEAMŢ. L. 1 cl. XI. Lazarovici Antonie (6852, 79—81, 8, 95, 927, 30, 1, 2, 4, 8, 46, 50).

PITEŞTI. S. g. 4 cl. VII. Ruse Lilian (E : 2308, 9,11—6,8, 24—8, 33). S. g. 8 cl. VII. Postelnicu Mariana (E : 2323, 5, 6, 33, 55—7, 9). L. 1 cl. IX. *Lungulescu Bogdan* (6840—3, 6—53, 5, 6, 9—74, 7—81, 3, 4, 7—90, 3, 5—8, 902, 9, 16, 20, 11, 4, 5, 7—34, 6—55, 7, 61—4, 71—3, 5, 80, P), Rubinstein Magda (6852, 5, 60, 8, 9, 72, 90, 921, 7, 31, 2, 5, 46, 9, 60, 7). Cl. X. Giuglan Daniel (6847—9, 54, 62—6, 8—70, 9—81, 4, 927, 30—4, 41, 9, 50, 4, 60), Pavelescu Ion (6927, 8, 31—3, 5, 8, 41, 2, 5, 6, 7003, 63), *Pietreanu Cristian* (6795, 6, 803, 17, 47—52, 9, 62, 4—7, 70, 4, 8, 9, 927, 8, 30—8, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 63), Stoica Vasile (6921, 36, 8, 42, 9, 50, 2, 5, 7, 75, 87—9, 95—7, 7000, 1, 10, 21, 2). Cl. XI. Sterian Marian (6847, 8, 51—4, 62—4, 6—70, 8—81, 3—5), Topologeanu Marian (6865, 9, 79, 80, 5, 927, 30—3 46,9 , 54, 7003). L. 2 cl. VI. Zaharescu Agata (E : 2307, 11, 3, 25, 6, 8, 37—9). Cl. X. Grigore Mihai (6847—52, 9, 62, 4, 5, 7, 9, 70, 81), Preda Vasile (6928, 9, 34, 6, 40—3, 60, 3, 4, 86, 8, 95—7, 7001—4, 24, 61, 4, 69, 70, 3, 8, 80, 3, 91). Cl. XI. Branişte Dumitru (6851, 3, 68, 9, 83, 7 ,86, 942, 5, 7, 56, 95—8, 7000, 2—5, 14, 24, 8, 45), Gheorghe Ion (6847—9, 62—9, 73, 9—81, 927, 30—4, 50, 4, 7003, 5). L. 3 cl. X. *Nistoreanu Constantin* (6841—4, 7—59, 62—74, 8—85, 7—90, 920—4, 7—43, 60—4, 87—92, 5—7005).

PLOIEŞTI. S. g. 15. Andrei Constanţa (E : 2324—7, 36, 7, 9, 50 ; 6927, 31). S. g. 21 cl. VII Moisescu Dorina (E : 2307, 8, 12, 24—6, 8, 37, 68). L. 1. cl. VII. Florescu Radu (E : 2324—6, 33, 6—8, 40, 2), Olteanu Gheorghe (E : 2327, 8, 38—41, 3, 5, 50, 1). Cl. VIII. Ionescu Marita (E : 2307, 8, 14, 24—6, 36, 9, 40, 60), Iordache Sorin (E : 2336, 8, 9, 53,4, 6—9, 61, 5, 6), Vasile Maria (E : 2323—7, 36—9, 50, 3, 6—9, 63—6). Cl. IX. Botoşanu Lidia (6840, 1, 7, 8, 62—70, 8—81, 8, 927—33, 45, 6, 9, 50, 4, 88, 95, 8, 7002), Călţaru Tiberiu (6847,—50, 64, 78—81, 4, 927, 32, 46, 96, 7002—4), Căsăndroiu Dănuţ (6811, 40, 7—52, 56, 62, 4, 6, 8—70, 8—81, 3, 4, 8, 912, 30—3, 5, 8, 45, 6, 95, 7003), Dragomirescu Cezar (6840, 1, 9, 50, 1, 62—6, 70, 8, 9, 80, 1, 3, 4, 8, 927, 30—4, 8), Ionescu Lucian (6847—50, 9, 62, 7, 8, 70, 9, 81, 3, 8), Nicolae Aurelian (6847—50, 4, 5, 62, 4, 5, 7, 71, 81, 4, 8, 9, 927, 31—4, 42, 5, 6, 9, 954, 65, 7003, 14), Zamfir Cristian (6847—50, 62, 5, 7, 9, 78, 9, 81, 3, 8), *Bîzu Marius* (6795, 824, 42—4, 7—55, 7, 9, 62—70, 8—84, 7—9, 92, 927—, 30—3), Cl. X. Mihăilescu Ion (6847—50, 62, 4, 5, 9, 81, 8, 927, 31, 3, 8, 63, 7002, 3), Dragomirescu Cezar (6936, 42, 5, 9, 37, 95, 6, 7, 9, 7000, 2, 3, 21), Gheorghe Ioana (6847, 9, 62, 4, 5, 9—81, 927, 30—3, 46), *Stoenescu Dan* (6902, 9, 15, 9, 20—4, 7—47, 9—64, 6—9, 80, 2), Vasilescu Cristian (6847—9, 51, 62, 4, 5, 7—70, 2, 9—81, 3, 8, 927, 8, 30—3, 41, 2, 9, 52—60, 95, 7002—5). Cl. XI. Cosma Tudor (6849, 50—2, 9, 84, 96, 31—3, 46, 9, 50, 4), Oprea Cornel (6927, 8, 30—5, 7, 43, 6, 9, 50, 2, 4), *Reghină Vasile* (6920, 1, 7—39, 41, 3, 5, 6, 9, 50, 2—9, 61, 3, 95—7000, 2, 3, 5), Stan Ion (6840—3, 7—59, 62—70, 80, 1, 4, 7—9, 909, 71), Vasiliu Constantin (6796, 8, 803, 11—3, 17—9, 23, 40, 5—7, 80, 2, 3, 5—90, 5—9, 927, 9—58). *L. 2* cl. VII. Miron Alexandru (E : 2323—8, 33, 6—9). Cl. VIII. Cătuneanu Irina (E : 2324—8, 37—9, 44—6, 53), Cătuneanu Radu (E : 2327, 8, 33, 4, 7, 41, 5, 6, 53), Nicolaescu Traian (E : 2323—5, 8, 33, 4, 8, 9, 54, 9, 64), Stătescu Vivian (E : 2339, 45, 53, 4, 6, 7, 9, 64—6), Teodorescu Nicolae (E : 2338, 9, 56—9, 65, 6, 96). Cl. IX. Brenner Mircea (6847—9, 62, 4, 6—8, 70, 9, 80, 1, 927, 8, 31—3, 95, 6, 7002, 4), Georgescu Cecilia (6927—34, 46, 9, 57, 7002, 3), Mazăre Alexandru (6872, 8, 921, 7—33, 5—8, 41, 5, 6, 52, 9, 63, 6, 95, 9, 7001—5, 19, 22), *Mignea Arminius* (6887—92, 915, 6, 20, 1, 7—38, 41, 2, 5, 6, 9, 52, 7—60, 3—7, 71, 3, 5), Mîndrilă Dumitru (6847—50, 62, 4—70, 9, 80, 1, 3), Neagoe Paulina 6847—50, 62, 4, 7—9, 79, 81, 927, 31, 3, 46, 9), Tomescu Carmen (6840, 1, 9, 50, 62, 4, 7, 9, 79, 81, 3, 4, 927, 31—3, 46, 7003, 22). Cl. X. Enache Ion (6927, 30—6, 8, 46, 9, 7, 63), Florian Aura (6931, 4, 6, 8, 9, 45, 6, 9, 50, 4, 5, 7002, 3), Mîndrilă Dumitru (6927—32, 4—6,

8, 41, 5, 6, 9, 57), *Orășanu Laurențiu* (6843, 54, 73, 91, 2, 16, 22—4, 39, 54, 6, 66, 87—90, 5—7003, 10, 3, 4, 9, 21, 2, 4, 37, 9, 48—52, 9—63, 6, 7, 70, 3), Tănăsescu Mariana (6847—50, 62, 4, 79, 81, 931, 46, 50, 4, 7003), Vișan Stefan (6887—9, 902, 6, 7, 9, 12, 6, 9). Cl. XI. *Dăscălescu Adrian* (6847—50, 2, 4, 6, 9, 62—9, 79—81, 4, 920—3, 7—38, 43, 5, 6, 50, 2—5, 7—9, 7002, 3), Dinu Cornel (6927—34, 8—40, 3, 6, 7, 65, 49, 50, 3, 5), Mazepa Lidia (6841, 7—50, 2, 4, 5, 62—5, 7—70, 8—82, 4, 5, 927—34, 6—8), *Stan Emil* (6957—73, 5—8, 80—3, 5—7008, 10, 4, 6, 21, 2, 31, 44—6), Tintă Mircea (6920—4, 7—50, 2—9, 75), *L. 3* cl. VIII. Scheffer Toma (E : 2336—42, 4—6), Neagu Victoria (E : 2336—9, 45, 56, 7, 9). Cl. IX. Spiegel Wilhelmina (6841, 52, 3, 71, 2, 8, 80, 2, 3, 920, 1, 7, 9—38, 45, 6, 9, 50, 2, 5, 7, 9, 62, 3). L. 4 cl. X. Pomîrlă Ioana (6927, 8, 30—4, 6, 8, 42, 6, 9, 52, 7), *Sachelarie Dan* (6920—4, 7—59, 61—7, 9, 71—3, 88—93, 5—7005, 10, 3, 4, 21, 4—8, 40, 4—6). (va urma)

TABLA DE MATERII

a Gazetei Matematice seria B pe anul XVI — 1965

I — ARTICOLE

Pag.

1. *Ion I. Cristea,* Despre șirurile recurente 1
2. *Eugen Rusu,* Probleme de maxim și minim 49
3. *C. Ionescu-Bujor,* Despre unele transformări geometrice 193
4. *Gheorghe Opaiț,* Numere prime 243
5. *David Rimmer,* Transformări geometrice 289
6. *Traian Cohal,* Legi de compoziție 296
7. *Anastasie P. Petrescu,* Polinoame de mai multe variabile 340
8. *O. Sacter,* Relații geometrice exprimate prin numere complexe 391
9. *Vasile Vasu,* Asupra unor transformări prin inversiune 451
10. *Iosif Varga,* Formula generalizată a binomului 499
11. *Aurelian Stan,* Unele proprietăți geometrice deduse prin considerații de mecanică 545

II — EDITORIALE, DIN VIAȚA SOCIETĂȚII, DIVERSE

1. Cu prilejul împlinirii a 15 ani de apariție a Gazetei Matematice seria B, de *C. Ionescu-Bujor* 97
2. A VI-a Olimpiadă internațională de matematice de *Tiberiu Roman* 100
3. Facultatea de matematică-mecanică a Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj, *de D. D. Stancu* 241
4. Perspective mărețe deschise de Congres de *N. Teodorescu* 337
5. La a 70-a aniversare a Gazetei Matematice de *Ștefan Bălan* 385
6. Gazeta Matematică la 70 de ani 387
7. Aspecte de la Olimpiada de matematică 1965 de *T. Roman* 394
8. Premiile Gazetei Matematice seria B pe anul 1964 94
9. Rezultatul olimpiadei de matematică 1965 325
10. A VII-a Olimpiadă internațională de matematică de *T. Roman* 463
11. Evidențiații celei de-a VII-a O. I. M. — Premiile 466
12. Olimpiada de matematică 1966, materia cerută 573

III — PENTRU CERCURILE DE ELEVI. ARTICOLE SCURTE

1. Cu privire la metoda inducției complete de *O. Sacter* 15
2. Pierre Fermat (1601—1565) de *Lucia Țene* 200
3. Dispozitive pentru desenarea unor figuri de *Dan Brânzei* 302
4. Despre activitatea cercurilor de matematică la școala medie nr. 2 din Craiova de *L. Gâdea, A. Rusu* și *Cornelia Tuțescu* 370
5. Din activitatea cercurilor de elevi ai claselor a VII-a din orașul Brașov de *Al. Corniciuc* 484

Pag.

6. Rezolvarea grafică a ecuației $a \sin x + b \cos x = c$ de *Ermil Caraman* 501
7. Posibilitățile de distribuire a n obiecte la k persoane de *T. Zamfirescu* 505
8. Cercul elevilor de clasa a IX-a de la liceul nr. 15 din București de *Elena Flondor* 531
9. Folosirea semnului $\sum$ în sumarea unor expresii algebrice de Savu Isai 549

IV — NOTE MATEMATICE

1. O aplicație a calculului vectorial de *C. Herling* 10
2. Generalizarea problemelor 4547 și 5446 de *Liviu Pârșan*. 13
3. Cîteva proprietăți proiective ale figurilor plane de I. Chițescu 57
4. Asupra problemelor 5996, 6200 de *Valeriu Leibovici* 60
5. În legătură cu proprietatea optică a conicelor de Corneliu Popescu 60
6. Demonstrarea unor relații geometrice de *Viorel I. Mihăilescu* 155
7. Generalizarea problemelor 5882, 6278 de *I. Bârsan* 156
8. Asupra problemei 6501 de *Aleksei Sosinski*, Moscova 158
9. Aplicații în legătură cu triunghiul isoscel de *El Kiss* și *B. Orban* 207
10. Asupra unei inegalități de *Cornel Popovici* 247
11. Generalizarea problemei 5907 de *Eugen Popa* 304
12. Generalizarea relației lui Stewart de *Valeria Nicola* 305
13. Generalizarea problemei 6501 de *Octavian Băscă* 346
14. Asupra problemei 6499 de *Eleodor Popescu* 347
15. Asupra unor polinoame de *Dan Voiculescu* 397
16. În legătură cu o proprietate a unor numere naturale de *Eugen Popa* 399
17. Generalizarea problemelor E : 1468 și 1844 de *W. Maurer* 459
18. Ecuațiile bisectoarelor unui triunghi de *E. Bucowski* 460
19. Despre inegalitățile dintre mediile aritmetice și geometrice a două mulțimi de trei numere pozitive de *A. Oppenheim* (traducere din l. engleză) 552
20. Generalizarea problemei 6327 de *Dan Voiculescu* 554

V — CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. Identități interesante, după R. P. Domoriad, de *O. Sacter* 62
2. Marea teoremă a lui Fermat de *Dan Voiculescu* 204
3. Patrate între cuburi între patrate de *Eugen Popa* 206
4. Jocuri distractive de *Lucia Țene* 400

VI — PROBLEME REZOLVATE *)

6128 (17), 6929 (18), 6135 (19), 6135 (20), 6149 (21), 6150 (22), 6151 (23), 6152 (23), 6153 (64), 6154 (24), 6156 (26), 6163 (65), 6179 (27), 6180 (27), 6181 (66), 6182 (66), 6186 (28), 7189 (67), 6190 (69), 6191 (70), 6192 (70), 6193 (71), 6194 (72), 6100 (72), 6211 (74), 6219 (5), 6224 (75), 6232 (76), 6236 (76), 6240 (77), 6231 (78), 5251 (78), 6258 (79), 6287 (80), 6293 (81), 6323 1160), 6328 (161), 6329 (161), 6336 (162), 6341 (163), 6342 (165), 6343 (166), 6446 (208), 6348 (210), 6351 (211), 6353 (212), 6355 (212), 6357 (213), 6379 (214), 6398 (215), 6419 (248), 6420 (250), 6421 (251), 6441 (306), 6449 (252), 6456 (252), 6456 (252), 6467 (253), 6497 (103), 6498 (104, 307), 6499 (109), 6500 149), 6501 (149, 158), 6502 (151), 6538 (254), 6543 (255), 6558 (407), 6559 (402), 6564 (399), 6568 (358), 6572 (350), 6573 (352), 6559 (402), 6579 (308), 6598 (353), 6600 (353), 6607 (351), 6612 (355), 6615 (310), 6619 (403), 5520 (405), 6621 (405), 6649 (406), 6661 (310), 6662 (407), 6621 (405), 6649 (406), 6692 (409), 6694 (410), 6700 (467), 6703 (411), 6707 (411), 6708 (467), 6709 (469), 6728 (469), 6731 (470), 6739 (470), 6740 (471), 6746 (472), 6748 (508), 6783 (509), 6785 (510), 6789 (510), 6889 (511), 6891 (511), 6892 (513), 6893 (555), 6897 (515), 6900 (515), 6906 6910 (516), 6911 (588), 6911 (588), 6912, (519), 6957 (520), 6958 (520), 6969 (561) : 6980 (556), 6983 (557) 6984 (557), 6986(558), 6988 (559), 7008 (559) 7009 (560), 7010 (560). Total 154 probleme

E : 2082 (20), 2089 (30), 2091 (31), 2203 (256), 2205 (167), 2210 (168), 2219 (18), 2222 (311), 2241 (311), 2228 (412), 2230 (412), 2308 (513), 2320 (514), 2315 (561), 2324 (562).

*) În paranteză sînt trecute paginile la care se află soluția problemelor.

VII – CHESTIUNI DE EXAMEN, PROBLEME PROPUSE

Pag.

— Probleme date la examenul de admitere în facultatea de matematică-mecanică, Iaşi, 1964 31
— Probleme date la Institutul de ştiinţe economice, Bucureşti 1964, facultatea de economie generală 33
— Facultatea de credit, contabilitate, Bucureşti 33
— Probleme date la facultatea de matematică-mecanică Timişoara, 1964, curs de zi şi fără frecvenţă 82
— Probleme propuse pentru O. I. M. . . . . (87, 89, 171)
— Probleme date la olimpiada în R. D.G. . . . . (92, 93, 178)
— Probleme date la Institutul de construcţii Bucureşti 169
— Olimpiada de matematică, etapa locală Bucureşti 1965 216
— Olimpiada de matematică, etapa locală Timişoara 1965 218
— Olimpiada de matematică, etapa locală Cluj 1965 220
— Olimpiada matematică, Moscova, Kiew 227
— Olimpiada de matematică, etapa locală Iaşi, 1965 257
— Probleme date la Institutul politehnic Iaşi 1964, curs de zi şi seral 260
— Probleme date la facultatea de fizică, ianuarie 1964 264
— Olimpiada de matematică 1965, etapa regională 313
— Olimpiada de matematică, 1965, etapa finală 356
— Probleme date la Institutul pedagogic Timişoara 1964 413
— Probleme date la examenul de maturitate 1965, Bucureşti 473, 524
— Subiectele date la a VII-a O. I. M. Berlin 1965 476
— Bacc. Mathématique, Franţa 1962 (pag. 36, 37, 177, 322, 364, 265, 475, 664, 666)
— Bacalaureat Pondichery 1963 . . . . . (pag. 39, 365)
— Bacalaureat Réunion 1964 . . . . . (474)
— Bacalaureat Maroc 1964 . . . . . (84, 226, 322, 473, 474, 544, 664)
— Bacalaureat Guineea 1963 . . . . . (84)
— La concursul general al liceelor şi şcolilor normale Paris, 1964 85
— Bacalaureat Istanbul 1964 . . . . . (225)
— Journal de mathématiques élémentaires, Paris, 1965 . . . . . (227, 336, 474)
— Bacalaureat Montreal, New York . . . . . (316, 363, 368, 365, 664)
— Bacalaureat Antile, Mexico 1964 . . . . . (665)
— Bacalaureat Cambodgia, 1964 . . . . . (475)
— Bacalaureat Tahiti, 1963 . . . . . (476, 664)
— Probleme date la admiterea în facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti 1965 572
— Probleme date la Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1965 . . . 522
— Probleme date la Facultatea de fizică, Bucureşti 1965 523

VIII. PROBLEME PROPUSE REPARTIZATE PE AUTORI

Abason Ernest (7159), *Abramescu N.* (7014, 7156), *Alaci V.* (7016, 7066), *Albescu I.* (7193), *Albu Toma* (6906), *Ambrozius Iulius* (7143, 7196), *American Mathematical Monthly* (7100), *Angheluţă Th.* (7160), *Antohi Ştefan* (7019), *Ball Iuliana* (6960, 6974, 7136, 7237), *Băghină V.* (6978), *Bănescu Grigore* (6836), *Bazacov Gh.* (7075, 7085, 7239, 7306), *Bena I. Dorin* (6731), *Berdan C.* (6815, 6983, 7253), *Bîrzan Romanel* (6680), *Bîscă Octavian* (7089), *Boer Margareta* (6993), *Bogza Mihai* (7185), *Bortaş E.* (7060, 7062), *Botea N.* (7114), *Botez Mihai* (7072), *Bucur Liliana* (7184), *Buicliu Gh.* (6984, 7111, 7301), *Candrea Ion* (7189), 7194), *Cara C.* (7061), *Cernescu P.* (7058), *Chisăliţă Adrian* (6701), *Chiţescu Ion* (6727, 7137, 7256), *Ciorănescu N.* (7112), *Cistelecan M.* (7254), *Climescu G.* (7288), *Cocuz Mihai* (7024), *Cocea Gh. Theodor* (7132, 7255), *Cohal Lidia* (7041), *Cohal Traian* (7018, 7030), *Constantinescu G. G.* (7162), *Constantinescu Laura* (7188, 7201, 7262, 7293), *Costăchescu V. C.* (7250, 7259), *Coşniţă Cezar* (7068), *Craioveanu Mircea* (7021, 7035), *Crăciunescu Eugen* (6688), *Cristescu V.* (7153), *Cristu Petrişor* (7186), *Crişan Victor* (6687), *Cristea I. Ion* (6891, 6957, 6968, 7131, 7233), *Curcanu G.* (7296), *Dabija Mircea* (7050), *Dăncilă Ioan* (7149), *Dodu Marin* (6705), *Dimitriu N.* (6995), *Dumitrescu P.* (6831), *Eureka, Cambridge* (6729, 6742, 7010), *Farkaş Mikoş* (7192), *Filipoiu Alexandru* (6819), *Flondor Elena* (6699, 7056), *Focşeneanu I. Mihail* (6743, 6900, 7195, 7197), *Gălăţeanu Mihai* (7027), *Georgescu Corneliu* (6834), 7049, 7052, 7077, 7087), *Georgescu George* (6689, 6820), *Gheorghiu Adrian* (6830, 6832, 6901), *Gheorghiu Doina Rodica* (7187), *Gheorghiu N.* (7042), *Gheorghiu*

Şerban (7164), *Ghermănescu M.* (7109), *Gligor Ioan* (6888), *Gidea Liviu* (7086), *Grigorescu D. Nicolae* (*E* : 2254, 2271), *Hărăguş Ştefan* (6902), *Herling C.* (6811, 6905), *Iancu Ioana* (7033), *Ilioi C.C.* (7034), *Ioachimescu G. A.* (7154), *Ionescu H. Florica* (6818, 7127, 7244), *Ionescu I.* (7151), *Ionescu-Bujor C.* (6912, 7013), *Ionescu P. H.* (7117), *Ionescu-Ţiu C.* (6691, 6700, 6704, 6741, 6745, 6816, 6829, 6895, 6909, 6962, 6979, 6980, 6988, 7017, 7037, 7051, 7070, 7092, 7113, 7150, 7162, 7215, 7249, 7305, 7310), *Ionescu V. D.* (7069), *Ionescu Traian* (6682, 6706, 6735, 7300), *Kacsó F.* (6736, 6969, 7242, 7309), *Kurta Ferenc* (7032, 7148), *Lalescu Traian* (7155), *Laşită Ileana* (7205), *Leonte Aristide* (6894, 6896, 7093), *Linteş I.* (7110), *Lungulescu Bogdan Eugen* (7141), *Marian Victor* (6887), *Marica Ştefan* (6140), *Marinov Cornel* (7204), *Mănescu Lucian* (6737, 6977, 6991), *Matei Constanţa* (7287), *Matematica, Sofia* (6985, 6981), *Matematikai* Budapesta (7007), *Mărculescu Origen* (7001), *Maurer S.* (7190), *Matematika v şcole*, Moscova (7009), *Mihalaşcu D.* (*E* : 2256), *Mihalca Dan* (6749, 7290), *Mihăileanu N.* (7116, 7165), *Mişacova O. T.* (6919), 6981, 6982, 7134), *Mincinopschi Gh.* (6899), *Mîrzan D.* (7289), *Mirea S.* (7157), *Mocanu Ovidiu* (7039), *Mortun Emil* (6828), *Munteanu Corneliu* (6720), *Nanu Gh.* (7023, 7025, 7026), *Necşoiu Dan* (6959), *Neumann Maria* (7074), *Negoiescu N.* (7238), *Negrei Veronica* (7080, 7088, 7090), *Niculescu G. G.* (7236, 7298), *Nicolescu Miron* (7107), *Obreja Petru* (6681), *Onofraş E.* (6973), *Oprea Gh.* (6837), *Oprea Miron* (6990, 7302), *Parascan Ilie* (7135), *Păunescu Alex.* (7080), *Păun Nicolae* (6683, 6828, 6890, 7247, 7261), *Petre Liviu* (6679, 6699, 7126), *Pestroiu Daniel* (6721, 6745, 7299), *Petrescu A. Ion* (7099), *Petrescu P. Anastasie* (7083, 7094), *Pelteanu Ion* (6725), *Peligrad Nicolae* (6730, 6730, 6733, 6987), *Petrescu N.* (6903), *Piscati C.* (6994), *Pîrşan Liviu* (6707, 6722, 6814, 6957, 6970, 7145, 7246, 7292), *Pompeiu D.* (7073), *Popa Eugen* (6686, 6744, 7020, 7022, 7031, 7146, 7232), *Popescu Eleodor* (6966, 7076, 7082), *Popescu N. Corneliu* (6898, 6963, 6971, 7129, 7240, 7291), *Pop Gh.* (6693), *Popescu M. Ioan* (6839), *Popescu Gh.* (6998), *Popescu Mihai* (6997), *Popovici Tiberiu* (7106), *Predescu Ştefan* (6813), *Rădoi Ioan* (7191), *Ralescu Dan* (7231), *Rimmer D.* (7036), *Roman T.* (7057), *Sacter O.* (6975, 7054, 7055, 7214), *Sava Petru* (6684, *Săndulache C.* (6703, 6822, 7038, 7303), *Scheffel Gabriela* (6824), *Sdrulla Ion* (6992), *Semenescu Emilian* (6892), *Sergescu P.* (7158), *Şerb Ioan* (6836), *Şerban Nicolae* (6965), *Simon Petru* (6972, 7130), *Simion Gheorghe* (7139), *Simionescu D. Gh.* (7053, 7058, 7118, 7166), *Strbu Aurel* (7202), *Strbu Maria* (7200), *Sorescu D. G.* (6692), *Stanciu A.* (6976), *Stavre P.* (7078, 7091), *Stancu I.* (6726, 6732), *Stănescu Dan* (6967, 7243), *Stănescu Ilie* (6734, 7199, 7203), *Stamate I. I.* (7163), *Siclovan I.* (6826, 7251), *Ştefănescu Mirela* (7028), *Szollosy Gh.* (7212), *Teodorescu I.* (7235), *Teodorescu N.* (7065), *Tonceanu Dan* (7142), *Toma Perl* (7297), *Tomescu I. Ion* (6911, 7241, 7260, 7307), *Trofimov P.* (7067), *Tudor N. C.* (6910), *Tudor R. G.* (6685), *Turdăşan Vasile* (7210, 7213), *Ţene Lucia* (7000, 7040, 7048), *Ţino O.* (7115), *Ţiţeica Gh.* (7152), *Udrişte C.* (6812), *Vasiliu Ovidiu* (7286), *Vasu Vasile* (7071, 7206, 7207, 7208), *Velescu I.* (7289), *Vîlceanu Viorel* (7029), *Vâlcovici V.* (7015), *Voiculescu Dan* (6690, 6694, 6723, 6739, 6893, 7209, 7234, 7294), *Weinstein Jack* (7248), *Zamfirescu Tudor* (6906, 7147, 7257).

IX. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII REPARTIZATE PE AUTORI

Achiţei Gh. (F : 2249), *Albescu Ion* E : 2272, 2271, 2273, 2326, 2327, 2372), *Baieră Bogdan* (E : 2263, 2370, 2383, 2403, 2410, 2316), *Bogatu Ilie* (E : 2424), *Brînzei Dan* (E : 2026, 2344), *Bucur Ioan* (E : 2296 2404), *Buga Gh.* (E : 2339), *Carpiuc Dumitru* (E : 2317), *Căpitan I. Gh.* (E : 2252, 2294), *Cojocaru Dumitru* (E : 2347), *Cojocaru Ion* (E : 2264), *Constantinevici Sorin* (E : 2399, 2435), *Corban Aurelian* (E : 2301, 2325, 2333, 2397, 2423), *Cornea Filp* (E : 2381), *Dinu Cornel* (E : 2323), *Dobre I. Nelu* (E : 2248, 2258, 2302, 2373, 2398, 2415), *Dobre, T.* (E : 2269), *Dumitriu C.* (E : 2261), *Dumitrescu I. Florea* (E : 2330, 2363, 2422), *Farkaş Mikoş* (E : 2391), *Filipoiu Al.* (E : 2293, 2367), *Georgescu Corneliu* (E : 2361, 2362), *Goicu N.* (E : 2394), *Gorea Aristide* (E : 2305), *Grăjdeanu Petru* (E : 2364, 2369, 2400, 2417), *Grozescu Tiberiu* (E :2276), *Ionescu Virgil* (E : 2307, 2310), *Ionescu-Ţiu C.* (E : 2306, 2322, 2427), *Ioniţă Marin* (E : 2376, 2395, 2412), *Lambă Stelian* (E : 2270), *Ludoşan Ilie* (E : 2387), *Mangu Ion* (E : 2418), *Manolache N.* (E : 2311, 2312, 2405), *Marica Ştefan* (E : 2308, 2320, 234, 2366, 2379), *Mîrzan D.* (E : 2265, 2304, 2324, 2328, 2358, 2359, 2365, 2384, 2393, 2306), *Moisă Dorin* (E : 2338), *Munteanu I.* (E : 2267, 2350), *Munteanu Romeo* (E : 2313, 2316, 2407), *Muşat St. I.* (E 2356, 2357), *Năstăsoiu Lidia* (E : 2310), *Neacşu M.* (E : 2280), *Negoiescu N.* (E : 2371), *Nicola Valeria* (E : 2341, 2343), *Nistor V* (E : 2255, 2257, 2314, 2315, 2319, 2348), *Onofraş E.* (E : 2334), *Parlapan Ştefan* (E : 2299), *Pravăt V. V.* (E : 2392), *Popa E.* (E : 2353), *Popescu N. Corneliu* (E : 2332, 2349), *Purice Ilie* (E : 2390), *Radu Gh.* (E : 2351), *Robilă Ioan* (E : 2352), *Samoilă V. G.* (E : 2266, 2268), *Simon P.* (E : 2262), *Stanciu I.* (E : 2279), *Stamate I. I.* (E : 2321), *Suciu Liviu* (E : 2380), *Sullea O.* (E : 2374, 2411), *Teodorescu I.*

MUSEUM KÖNYVTÁRA 1883

(E : 2408), *Ţigănoiu Al.* (E : 2382, 2426), *Ursulescu O.* (E : 2295), *Vanea Adrian* (E : 2385), *Văleanu V.* (E : 2318), *Velescu I.* (E : 2260), *Vlaşcu D.* (E : 2336), *Vişan I.* (E : 2355), *Voiculescu Dan* (E : 2335), *Zoltan Demeny* (E : 2300).

X – CARŢI NOI. EVIDENŢIERI. RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pag.

— *Gh. D. Simionescu*, Trigonometrie sferică 179
— *Agneta Vescan*, Sumabilitatea seriilor 180
— *C. Coşniţă, F. Turtoiu*, Culegere de probleme de algebră ed. II 271
— Probleme actuale de matematică (conferinţe ţinute la cursurile de vară organizate de S. S. M. la Săcele 1963) 326
— *S. Guiaşu* şi *R. Theodorescu*, Matematica şi informaţia 326
— *O. Sacter*, Culegere de probleme de matematică ed. IV 326
— *N. Mihăilă*, Introducere în teoria probabilităţilor şi statistică matematică . . . 535
— *Gh. Ciucu, M. Iosifescu, R. Theodorescu*, Teoria jocurilor 535
— *Florica T. Cîmpan*, Istoria numărului π 535
— *I. I. Perelman*. Geometria distractivă 535
— *N. N. Mihăileanu*, Complemente de geometrie sintetică. 573
— Evidenţierea rezolvitorilor de probleme pe 1964 94
— Rezultatul Olimpiadei de matematică 1965 325
— Rezultatul întrecerii între şcolile medii din ţară privind activitatea extraşcolară la matematică în anul 1964 112
— Rubrica rezolvitorilor de probleme şi evidenţieri (pag. 42, 95, 137, 180, 230, 272, 326, 374, 422, 486, 533, 574)

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

— *Rezolvînd probleme pregătiți și Olimpiada Matematică 1966.*

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 35—40 soluții bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au mai fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volmul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Solicităm probleme interesante legate de practică.

— *Problemele propuse urmînd a fi publicate ținînd seama de predarea la clasă a materiei respective, autorii lor sînt rugați să trimită problemele din vreme însoțite de una sau mai multe soluții îngrijit scrise precum și observări, discuții sau uneori generalizări arătînd și modul cum au fost stabilite.*

— *Problemele propuse* (P), *note matematice* (N), *articole* (A), *materiale privind cercurile de elevi* (C), *se vor trimite redacției* G.M.-B. *de preferat într-un plic separat de problemele rezolvate.*

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *revăzute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor a IX-a pot trimite soluții și la problemele propuse pentru clasa VIII-a. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimile trei numere apărute în G.M.B. *Problemele rezolvate*, vor fi expediate în cursul unei luni și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordinea crescîndă. Pe plic se vor scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului. Probleme propuse vor fi separate, corect rezolvate și citeț semnate. Desenele să fie făcute îngrijit pe foi separate.

Elevii claselor V—VIII vor fi anunțați la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit odată cel puțin 8 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor IX—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— *Rezolvitorii de probleme din G.M.-B. care în anul 1965 au întrunit peste 150 probleme rezolvate și anunțate la rubrica rezolvitorilor în primele 12 numere apărute, pot trimite redacției, de îndată, o fișe arătînd care sînt aceste probleme, arătînd și totalul pentru a face controlul la întocmirea listei elevilor care vor fi premiați pe anul 1965.*

— Liceele care în 1965 au elevi ca rezolvitori de probleme sau premiați la Olimpiada de matematică, pot trimite fișa cu activitatea extrașcolară la matematică, conform regulamentului întrecerii publicat în G.M-B, nr. 3 — 1965 pag. 112. La clasificarea liceelor se va ține seama și de numărul de clase medii pe care le-a avut în anul școlari 1964—1965.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și să dea adresa lor exactă.

ERATĂ — La problema 7241 în loc de C_n^k se va scrie C_{2n}^{2k}.

1960 MAR 11

ÎN „BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN R.S.R." AU APĂRUT URMĂTOARELE CĂRȚI DE MATEMATICĂ, MECANICĂ ȘI DE ASTRONOMIE

*1. E. RUSU : Bazele teoriei numerelor, 2. A. I. MARKUȘEVICI : Șiruri recurente, 3. N. N. VOROBIEV : Numerele lui Fibonacci, 4. P. S. ALEXANDROV : Introducerea în teoria grupurilor, 5. I. S. SOMINSKI : Metoda inducției matematice, 6. GH. MIHOC : Elemente de calculul probabilităților, 7. H. IONESCU : Calcule numerice, 8. A. I. MARKUȘEVICI : Arii și logaritmi, 9. A. I. GHELFOND : Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi, 10. O. SACTER : Despre conice și alte curbe, 11. ION IONESCU : Maxime și minime geometrice, 12. F. I. ZIGHEL : Cometele, 12. S. SKLOWSKI : Radioastronomia, 15. V. V. ȘARONOV : Soarele și observarea lui, 16. O. KREINDLER : Elemente de calcul vectorial, 18. M. V. PENTKOVSKI : Nomograme, 19. A. KAHANE : Elemente de teoria congruențelor de drepte, 20. GH. ȚIȚEICA : Culegere de probleme de geometriei ed. V (revăzută și completată de G. D. Simionescu), 2. A. HALANAY : Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, 24. C. N. BERMAN : Cicloida, 25. C. BORȘ : Noțiuni de geometrie proiectivă, 29. I. S. DUBNOV : Erori în demonstrațiile geometrice, 30. H. STEINHAUS : Caleidoscop matematic, 31. C. POPOVICI : Stelele, date fizice, originea și evoluția lor, 32. C. DRÎMBA : Elemente de mecanică cerească, 33. C. IONESCU-BUJOR : Elemente de transformări geometrice (I), 35. GH. A. CHIȚEI : Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică, 37. C. IONESCU-BUJOR : Elemente de transformări geometrice (II), 38. O. SACTER : Olimpiade matematice, 39. A. I. MARKUȘEVICI : Numere complexe și reprezentări conforme, 40. I. S. GRADSTEIN : Teorema directă și reciprocă, 41. A. I. HINCIN : Fracții continue, 42. V. A. USPENSKI : Unele aplicații ale mecanicii în matematică, 43. V. G. BOLTEANSKI : Ce este derivarea ?, 44. G. N. BERMAN : Despre numere și studiul numerelor, 45. A. IAGLOM și I. IAGLOM : Probleme neelementare tratate elementar, 46. G. CIUCU și G. SIMBOAN : Probleme de calculul probabilităților și statistică matematică, 47. FEODOROV : Cicloida, 48. O. SACTER : Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente, 50. C. BORȘ și D. BORȘ : Numere complexe, 52. D. RIMER : Noțiuni de teoria mulțimilor, 53. * * * : Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Piatra Neamț), 54. M. GHERMĂNESCU : Aplicații ale trigonometriei, 55. * * * : Ipotezele care stau la baza geometriei de B. Riemann (studii și comentarii de E. Gergely), 57. A. HAIMOVICI : Grupuri de transformări, 58. A. TOTH : Noțiuni de teoria construcțiilor geometrice, 60. T. ROMAN : Simetria, 61. C. IONESCU-BUJOR : Elemente de transformări geometrice (partea a treia), 63. E. NICOLAU : Introducere în cibernetică, 64. * * * : Probleme actuale de matematică (conferințe ținute la cursurile de vară de la Săcele-Brașov 1962), 65. N. MIHAILĂ : Introducere în programarea liniară, 66. GH. D. SIMIONESCU : Trigonometrie sferică, 67. AGNETA VESCAN : Sumabilitatea seriilor, 68. * * * : Jocuri și probleme distractive de matematici, 69. * * * : Probleme actuale de matematici III, 70. N. MIHĂILĂ : Teoria probabilităților și statistică matematică, 71. G. CIUCU, M. IOSIFESCU, R. TEODORESCU : Introducere în teoria jocurilor, 72. I. MUȘAT și C. IONESCU-ȚIU : Exerciții și probleme de matematică pentru admiterea în clasa a IX-a.*

Tirajul fiind limitat, gazetele se trimit mai întîi abonaților și de aceea rugăm colaboratorii noștri să se aboneze de îndată. Prețul este de 2 lei exemplarul.

Fiecare abonat este rugat să facă cunoscut această publicație și altor colegi, pentru a se abona din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

Abonamentele se pot face prin oficiile poștale locale.

I. P. „Informația" — c. 4298

INDEX 41601

Lei 2